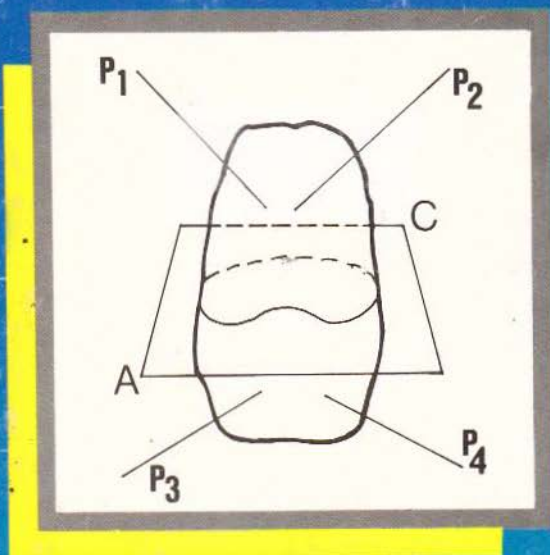


# MEKANIKA TEKNIK

(MECHANICS OF MATERIALS)



EDISI KEDUA  
(VERSI SI)

**E.P. POPOV**  
ZAINUL ASTAMAR

Edisi Baru

# Mekanika Teknik

(Mechanics of Materials)

EDISI KEDUA (Versi SI)

**E. P. POPOV**

*Professor of Civil Engineering*

*University of California, Berkeley*

Teks dalam kerjasama dengan :

**S. Nagarajan**

*Associate Research Scientist*

*Lockheed Missiles & Space Company*

*Sunnyvale, California*

Soal-soal dengan bantuan :

**Z.A. Lu**

*Associate, T. Y. Lin International, Inc.*

*San Francisco, California*

Alih Bahasa:

**Zainul Astamar Tanisan M.Sc.**

*Universitas Krisnadwipayana*

**PENERBIT ERLANGGA**

Jl. H. Baping Raya No. 100

Ciracas, Jakarta 13740

(Anggota IKAPI)





UNIVERSITY OF CALIFORNIA, BERKELEY

BERKELEY • DAVIS • IRVINE • LOS ANGELES • RIVERSIDE • SAN DIEGO • SAN FRANCISCO



SANTA BARBARA • SANTA CRUZ

COLLEGE OF ENGINEERING  
DEPARTMENT OF CIVIL ENGINEERING  
DIVISION OF STRUCTURAL ENGINEERING  
AND STRUCTURAL MECHANICS

BERKELEY, CALIFORNIA 94720

January 19, 1984

PENERBIT "ERLANGGA"  
Kramat IV No. 11  
JAKARTA PUSAT  
INDONESIA

I was delighted to learn that my book "Mechanics of Materials" is being translated in Indonesia. I feel greatly honored.

Per your request I am enclosing several photographs, a 1976 ASCE brochure giving my brief curriculum vitae, a 1982 California Engineer with my interview, and an August 1983 Engineering News. To this it may be of interest to add that together with my students and colleagues I have generated about 170 technical papers and over 50 book-size reports.

I would be very interested in receiving the upcoming translation of the book to add to my collection in eight other languages. Your writeups on the "author" would also be most welcome.

Sincerely yours,

A handwritten signature in blue ink that reads "E. P. Popov".

Egor P. Popov  
Professor Emeritus of Civil Engineering

EPP/cjp

# Daftar Isi

**Singkatan dan Lambang: lihat kulit muka sebelah dalam**  
**Satuan SI: lihat kulit luar bagian dalam**

## Kata Pengantar

xiii

### 1. Tegangan – Beban Aksial

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 1-1 | Pendahuluan  | 1  |
| 1-2 | Metoda Irisan (Method of Sections)                                     | 3  |
| 1-3 | Tegangan (Stress)  | 4  |
| 1-4 | Beban Aksial; Tegangan Normal (Axial Load; Normal Stress)              | 7  |
| 1-5 | Tegangan Geser Rata-rata (Average Shearing Stress)                     | 10 |
| 1-6 | Masalah dalam Tegangan Normal dan Geser                                | 12 |
| 1-7 | Tegangan Ijin; Faktor Keamanan (Allowable Stressess, Factor of Safety) | 21 |
| 1-8 | Disain Batang dengan Beban Aksial dan Pasak                            | 25 |
| 1-9 | Pendekatan Dasar (Basic Approach)                                      | 29 |

### 2. Regangan – Hukum Hooke – Masalah-Masalah Beban Aksial

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 2-1 | Pendahuluan                                       | 37 |
| 2-2 | Regangan (Strain)                                 | 37 |
| 2-3 | Diagram Tegangan-Regangan                         | 39 |
| 2-4 | Hukum Hooke                                       | 40 |
| 2-5 | Catatan Lanjut mengenai Diagram Tegangan-Regangan | 41 |
| 2-6 | Defleksi Batang Beban Aksial                      | 42 |



|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| 2-7       | Perbandingan Poisson  | 47         |
| *2-8      | Hukum Hooke Umum  | 49         |
| 2-9       | Tegangan Geser pada Bidang-bidang Saling Tegaklurus                         | 52         |
| 2-10      | Hukum Hooke untuk Tegangan dan Regangan Geser                               | 53         |
| *2-11     | Konsentrasi Tegangan  | 55         |
| <b>3.</b> | <b>Puntiran</b>   | <b>65</b>  |
| 3-1       | Pendahuluan   | 65         |
| 3-2       | Penggunaan Metoda Irisan  | 66         |
| 3-3       | Pengandaian Dasar   | 67         |
| 3-4       | Rumus Puntiran  | 68         |
| 3-5       | Catatan mengenai Rumus Puntiran   | 71         |
| 3-6       | Disain Batang Puntiran Melingkar  | 74         |
| 3-7       | Sudut Pelintir Batang Melingkar   | 76         |
| *3-8      | Tegangan Geser dan Deformasi dalam Poros Melingkar dalam Daerah Tak Elastis | 80         |
| *3-9      | Konsentrasi Tegangan  | 85         |
| *3-10     | Batang Padat Bukan Melingkar  | 87         |
| *3-11     | Batang Rongga Dinding Tipis   | 90         |
| *3-12     | Kopling Poros   | 93         |
| <b>4.</b> | <b>Gaya Aksial – Geser – dan Momen Lentur</b>                               | <b>101</b> |
| 4-1       | Pendahuluan   | 101        |
| 4-2       | Kaidah Diagramatis untuk Tumpuan  | 102        |
| 4-3       | Kaidah Diagramatis untuk Pembebanan   | 104        |
| 4-4       | Klasifikasi Balok   | 106        |
| 4-5       | Perhitungan Reaksi Balok  | 107        |
| 4-6       | Penggunaan Metoda Irisan  | 111        |
| 4-7       | Geser dalam Balok   | 113        |
| 4-8       | Gaya Aksial dalam Balok   | 114        |
| 4-9       | Momen Lentur dalam Balok  | 115        |
| 4-10      | Diagram Geser, Gaya Aksial dan Momen Lentur                                 | 116        |
| 4-11      | Prosedur Langkah demi Langkah   | 123        |
| <b>5.</b> | <b>Lenturan Murni Balok</b>   | <b>131</b> |
| 5-1       | Pendahuluan   | 131        |
| 5-2       | Beberapa Pembatasan Penting dari Teori                                      | 131        |
| 5-3       | Pengandaian Dasar   | 132        |
| 5-4       | Rumus Lenturan  | 136        |
| 5-5       | Penghitungan Momen Inersia  | 139        |
| 5-6       | Catatan mengenai Rumus Lenturan   | 143        |
| *5-7      | Lenturan Murni Balok dengan Irisan Tak Simetris                             | 147        |
| *5-8      | Lenturan Tak Elastis Balok  | 148        |
| *5-9      | Konsentrasi Tegangan  | 156        |

|       |                 |     |
|-------|-----------------|-----|
| *5-10 | Balok Dua Bahan | 159 |
| *5-11 | Balok Lengkung  | 165 |

## 6. Tegangan Geser dalam Balok 179

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 6-1  | Pendahuluan                                       | 179 |
| 6-2  | Hubungan Antara Geser dan Momen Lentur            | 180 |
| 6-3  | Aliran Geser                                      | 184 |
| 6-4  | Rumus Tegangan Geser Balok                        | 191 |
| *6-5 | Pembatasan Rumus Tegangan Geser                   | 200 |
| *6-6 | Catatan Lanjut mengenai Distribusi Tegangan Geser | 202 |
| *6-7 | Pusat Geser                                       | 204 |

## 7. Tegangan Majemuk 219

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 7-1  | Pendahuluan   | 219 |
| 7-2  | Superposisi dan Batasan-batasannya  | 220 |
| *7-3 | Catatan Mengenai Masalah-masalah yang Melibatkan Gaya-gaya Aksial dan Momen-momen Lentur: Masalah Bendungan | 230 |
| *7-4 | Batasan Khusus: Masalah Cerobong  | 231 |
| 7-5  | Gaya yang Dilakukan pada Batang Prismatic yang Sejajar dengan Sumbunya                                      | 233 |
| 7-6  | Lenturan Tak Simetris   | 237 |
| 7-7  | Superposisi Tegangan Geser  | 241 |
| *7-8 | Tegangan dalam Pegas Ulir Gelung Rapat  | 243 |
| *7-9 | Defleksi dalam Pegas Ulir Gelung Rapat  | 246 |

## 8. Analisis Tegangan dan Regangan Bidang 259

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| 8-1   | Pendahuluan   | 259 |
| 8-2   | Persoalan Dasar   | 260 |
| 8-3   | Persamaan Transformasi Tegangan Bidang  | 263 |
| 8-4   | Tegangan Utama  | 265 |
| 8-5   | Tegangan Geser Maksimum   | 266 |
| 8-6   | Transformasi Tegangan Penting   | 270 |
| 8-7   | Lingkaran Tegangan Mohr   | 271 |
| 8-8   | Konstruksi Lingkaran Tegangan Mohr  | 273 |
| *8-9  | Lingkaran Tegangan Mohr untuk Status Tegangan Umum                                      | 278 |
| *8-10 | Analisis Regangan Bidang: Catatan Umum  | 280 |
| *8-11 | Persamaan transformasi Regangan Bidang  | 281 |
| *8-12 | Lingkaran Regangan Mohr   | 284 |
| *8-13 | Pengukuran Regangan; Roset  | 286 |
| *8-14 | Hubungan Linier Tambahan Antara Tegangan dan Regangan dan di antara $E$ , $G$ dan $\nu$ | 289 |



## Lampiran Bab 8.

|   |     |
|---|-----|
| Transformasi Momen Inersia Luas Terhadap Sumbu-sumbu yang Berbeda | 293 |
| 8A-1 Persamaan Transformasi untuk Perputaran Sumbu                | 293 |
| 8A-2 Sumbu Utama dan Momen Inersia Utama                          | 294 |

## 9. Tegangan Gabungan – Bejana Tekan – Teori Kegagalan 303

|  |     |
|--|-----|
| 9-1 Pendahuluan                                      | 303 |
| 9-2 Penyelidikan Terhadap Tegangan pada Sebuah Titik | 303 |
| *9-3 Batang dalam Status Tegangan Dua-Dimensi        | 311 |
| *9-4 Metoda Analisa Tegangan Fotoelastik             | 312 |
| 9-5 Bejana Tekan Dinding Tipis                       | 317 |
| 9-6 Catatan Mengenai Bejana Tekan Dinding Tipis      | 320 |
| 9-7 Teori Kegagalan: Catatan Pendahuluan             | 322 |
| 9-8 Teori Tegangan Geser Maksimum                    | 324 |
| 9-9 Teori Distorsi Energi Maksimum                   | 325 |
| 9-10 Teori Tegangan Normal Maksimum                  | 327 |
| 9-11 Perbandingan Teori; Teori-teori Lain            | 328 |

## 10. Disain Batang dengan Kriteria Kekuatan 341

|  |     |
|--|-----|
| 10-1 Pendahuluan   | 341 |
| 10-2 Disain Batang Beban Aksial                                  | 341 |
| 10-3 Disain Batang Puntiran                                      | 342 |
| 10-4 Kriteria Disain Balok Prismatic                             | 343 |
| 10-5 Diagram Geser dengan Penjumlahan                            | 346 |
| 10-6 Diagram Momen dengan Penjumlahan                            | 348 |
| *10-7 Catatan Lanjut mengenai Konstruksi Diagram Geser dan Momen | 354 |
| *10-8 Diagram Momen dan Kurva Elastis                            | 358 |
| *10-9 Disain Balok Prismatic                                     | 360 |
| *10-10 Disain Balok Bukan Prismatic                              | 366 |
| *10-11 Disain Batang Rumit                                       | 368 |

## 11. Defleksi Balok 385

|  |     |
|--|-----|
| 11-1 Pendahuluan   | 385 |
| 11-2 Hubungan Kurva-Regangan dan Kurva Momen                         | 386 |
| 11-3 Penentuan Persamaan Diferensi untuk Defleksi Balok Elastis      | 388 |
| 11-4 Persamaan Diferensial Alternatif untuk Balok Elastis            | 391 |
| 11-5 Syarat-syarat Batas   | 391 |
| 11-6 Penyelesaian Soal-soal Defleksi Balok dengan Integrasi Langsung | 393 |
| 11-7 Masalah Balok Elastis Statis Tak Tentu                          | 403 |
| 11-8 Catatan Mengenai Defleksi Balok Elastis                         | 407 |
| *11-9 Defleksi Elastis Balok dalam Lenturan Tak Simetris             | 410 |
| *11-10 Defleksi Balok Tak Elastis                                    | 410 |

|            |  |            |
|------------|--|------------|
| *11-11     | Pendahuluan Metoda Luas-Momen (Moment-Area)                                | 413        |
| *11-12     | Penurunan Teorema Luas-Momen (Moment-Area)                                 | 414        |
| <b>12.</b> | <b>Masalah Statis Tak Tentu</b>  | <b>439</b> |
| 12-1       | Pendahuluan  | 439        |
| 12-2       | Pendekatan Umum  | 440        |
| 12-3       | Tegangan Karena Suhu   | 447        |
| 12-4       | Analisa Sistem Tak Tentu Berdasarkan Superposisi                           | 450        |
| *12-5      | Metoda Gaya (Force Method)   | 451        |
| *12-6      | Metoda Pergeseran (Displacement Method)                                    | 458        |
| *12-7      | Metoda Luas-Momen untuk Balok Statis Tak Tentu                             | 466        |
| *12-8      | Persamaan Tiga-Momen   | 473        |
| *12-9      | Konstanta pada Kasus Beban Khusus  | 475        |
| *12-10     | Analisa Batas Balok  | 479        |
| *12-11     | Kesimpulan   | 485        |
| <b>13.</b> | <b>Kolom</b>   | <b>501</b> |
| 31-1       | Pendahuluan  | 501        |
| 13-2       | Stabilitas Keseimbangan  | 503        |
| 13-3       | Rumus Euler untuk Kolom Ujung Pasak  | 506        |
| *13-4      | Rumus Euler untuk Kolom dengan Pengekang Ujung yang Berlainan              | 508        |
| *13-5      | Tekuk Elastis Kolom dengan Menggunakan Persamaan Diferensial Derajat Empat | 511        |
| *13-6      | Analisa Balok-Kolom  | 512        |
| 13-7       | Pembatasan Rumus Euler   | 514        |
| 13-8       | Rumus Beban-Tekuk Euler Umum   | 516        |
| 13-9       | Rumus Sekan  | 518        |
| 13-10      | Disain Kolom   | 521        |
| 13-11      | Rumus Kolom untuk Pembebanan Terpusat (Konsentris)                         | 523        |
| *13-12     | Rumus Kolom untuk Pembebanan Eksentris                                     | 527        |
| *13-13     | Balok Tanpa Tumpuan Lateral  | 534        |
| <b>14.</b> | <b>Sambungan Struktur</b>  | <b>543</b> |
| 14-1       | Pendahuluan  | 543        |
| 14-2       | Sambungan Paku Keling dan Baut   | 543        |
| 14-3       | Metoda Kegagalan Sambungan Paku Keling dan Baut                            | 546        |
| 14-4       | Sambungan Paku Keling dan Baut Eksentris                                   | 555        |
| 14-5       | Sambungan Las  | 559        |
| 14-6       | Sambungan Las Eksentris  | 561        |
| <b>15.</b> | <b>Metoda Energi</b>   | <b>569</b> |
| 15-1       | Pendahuluan  | 569        |
| 15-2       | Energi Regangan Elastis untuk Tegangan Sumbu Tunggal                       | 570        |
| 15-3       | Energi Regangan Elastis dalam Lenturan Murni                               | 573        |



|            |  |            |
|------------|--|------------|
| 15-4       | Energi Regangan Elastis untuk Tegangan Geser       | 575        |
| *15-5      | Energi Regangan untuk Status Tegangan Sumbu-Banyak | 577        |
| *15-6      | Disain Batang untuk Beban Energi Energi            | 577        |
| 15-7       | Defleksi dengan Metoda Energi                      | 579        |
| *15-8      | Beban Tumbuk                                       | 582        |
| *15-9      | Metoda Kerja Semu untuk Defleksi                   | 586        |
| *15-10     | Persamaan Kerja Semu untuk Sistem Elastis          | 588        |
| *15-11     | Persoalan Statis Tak Tentu                         | 594        |
| <b>16.</b> | <b>Silinder Dinding Tebal</b>                      | <b>603</b> |
| 16-1       | Pendahuluan  | 603        |
| 16-2       | Pemecahan Persoalan Umum                           | 603        |
| 16-3       | Kasus Khusus                                       | 608        |
| 16-4       | Sifat Silinder Dinding Tebal Pastis Ideal          | 611        |
|            | <b>Lampiran Tabel-Tabel</b>                        | <b>617</b> |

# 1 Tegangan — Beban Aksial

## 1-1 PENDAHULUAN

Pada semua konstruksi teknik bagian-bagian pelengkap suatu bangunan haruslah diberi ukuran-ukuran fisik yang tertentu. Bagian-bagian tersebut haruslah diukur dengan tepat untuk dapat menahan gaya-gaya yang sesungguhnya atau yang mungkin akan dibebankan kepadanya. Jadi dinding sebuah bejana tekan haruslah mempunyai kekuatan yang cukup memadai untuk dapat menahan tekanan dalam; lantai sebuah gedung haruslah cukup kuat untuk tujuan yang dikehendaki; poros sebuah mesin haruslah berukuran yang cukup memadai untuk memuat momen puntir yang diperlukan; sayap sebuah pesawat terbang haruslah sanggup menahan dengan aman beban-beban aerodinamik yang mungkin ditemui ketika terbang atau mendarat. Demikian pula, bagian-bagian suatu struktur komposit harus cukup tegar hingga tidak akan melentur atau melengkung secara berlebihan bila bekerja di bawah beban yang diberikan. Lantai sebuah gedung mungkin cukup kuat tapi masih melentur secara berlebihan yang suatu saat mungkin menyebabkan rusaknya penjajaran perlengkapan produksi, atau dalam kasus yang lain menghasilkan keretakan langit-langit plester yang dipasang di bawahnya. Juga suatu bagian bangunan yang begitu tipis atau ramping, bila diberikan pembebanan desak, akan menjadi hancur melalui penekukan; yaitu susunan bagian struktur menjadi tidak stabil. Kemampuan untuk menentukan beban maksimum yang dapat dimuat oleh suatu kolom ramping sebelum terjadinya penekukan atau penentuan tingkat keamanan vakum yang akan dipertahankan oleh sebuah bejana adalah penting sekali dalam praktek.

Dalam praktek keteknikan, kebutuhan-kebutuhan tersebut haruslah disesuaikan pula dengan pengeluaran biaya minimal untuk suatu bahan tertentu. Di samping ongkos, sekaligus — seperti dalam disain satelit-kelayakan dan keberhasilan dari keseluruhan tugas dapat tergantung pada berat sebuah paket. Subyek *mekanika bahan* (mechanics of materials) atau *kekuatan bahan* (strength of materials) yang selama ini biasa dinamakan demikian, menyangkut metoda-metoda analitis yang menerangkan **kekuatan** (strength),

**kekakuan** (atau stiffness, yaitu karakter-karakter deformasi) dan **kestabilan** (stability) dari pelbagai bagian bangunan pemuat beban. Istilah lain dari subyek ini adalah *mekanika benda padat yang berubah bentuk* (the mechanics of solid deformable bodies).

Mekanika bahan merupakan subyek yang agak tua umurnya, yang umumnya bermula dari karya Galileo pada bagian permulaan abad ketujuh belas. Sebelum penyelidikan yang dilakukannya mengenai sifat benda-benda padat yang dibebani, para ahli bangunan mengikuti aturan-aturan yang biasa dipakai serta bersifat empiris. Galileo merupakan yang pertama berusaha menjelaskan kelakuan bagian struktur yang dibebani secara rasional. Ia mempelajari bagian struktur di bawah tarik dan tekan, serta lebih terkenal dari kapal yang dipergunakan untuk konstruksi lambung kapal buat Angkatan Laut Italia. Tentulah banyak kemajuan yang telah dicapai semenjak waktu tersebut, tetapi haruslah dicatat bahwa dalam mencapai di antara yang sekian banyak itu diakui bahwa dalam pengembangan subyek ini penemu-penemu bangsa Perancis yang antara lain terdiri dari orang-orang terkemuka seperti Coulomb, Poisson, Navier, St. Venant dan Cauchy, yang berkarya pada permulaan abad kesembilan belas, telah meninggalkan kesan yang tidak dapat dilenyapkan begitu saja dalam subyek ini.

Subyek mekanika bahan mencapai secara meluas semua cabang profesi keteknikan dengan banyak penggunaan yang luar biasa. Metoda-metodanya dibutuhkan oleh para ahli disain bangunan lepas pantai; oleh Insinyur sipil untuk mendisain jembatan dan gedung; oleh Insinyur Tambang dan Arsitek yang berminat dengan bangunan; oleh Insinyur bidang Nuklir dalam disain komponen reaktor; oleh Insinyur Mesin dan Kimia yang mengandalkan metoda-metoda dalam subyek ini untuk mendisain permesinan dan bejana tekan; oleh ahli metalurgi yang memerlukan konsep-konsep dasar dari subyek ini untuk memahami cara meningkatkan lebih lanjut bahan-bahan yang ada; akhirnya oleh Insinyur Elektroteknik yang membutuhkan metoda-metoda subyek ini karena pentingnya tahap-tahap keteknikan mesin dengan banyak bagian peralatan listrik. Mekanika bahan mempunyai metoda-metoda karakteristik sendiri-sendiri. Ini adalah suatu disiplin tertentu dan salah satu subyek dasar dari kurikulum teknik, berdiri sejajar dengan subyek-subyek dasar lain seperti mekanika fluida, termodinamika dan listrik dasar.

Kelakuan bagian struktur yang memperoleh gaya tidak hanya tergantung dari hukum-hukum dasar mekanika Newton yang mengatur keseimbangan antar gaya tetapi juga *karakteristik fisik* dari bahan bagian struktur tersebut. Keterangan penting yang berkenaan dengan yang terakhir datang dari laboratorium di mana bahan diberi aksi gaya yang diketahui secara teliti dan sifat contoh bahan uji yang diamati dengan perhatian khusus pada gejala-gejala seperti terjadinya pemecahan, deformasi dan seterusnya. Penjelasan dari gejala-gejala demikian adalah bagian vital dari subyek ini tetapi cabang subyek ini biar diberikan pada buku-buku lain.\* Hasil akhir dari penyelidikan demikian adalah menarik perhatian dan rangkaian pelajaran ini menyangkut bagian analitis dan matematis dari subyek ini yang tentu berbeda dengan eksperimen. Berdasarkan pikiran di atas, kita dapat melihat bahwa mekanika bahan adalah campuran ilmu pengetahuan eksperimen dengan postulat-postulat Newtonian mekanika analitis. Dari yang terakhir

\* Lihat H. E. Davis, G. E. Trowell dan C. T. Wiskocil, *Testing and Inspection of Engineering Materials* (2nd ed.), New York, McGraw-Hill, 1955. Lihat juga L. H. Van Vlack, *Material Science for Engineers*, New York, Addison Wesley, 1977.



dipinjam cabang ilmu pengetahuan yang disebut *statika*, yaitu suatu subyek yang dianggap sudah dikenal oleh pembaca di mana buku ini banyak menggunakannya.

Buku ini akan dibatasi pada pokok-pokok yang sederhana dari subyek ini. Meskipun metoda-metoda yang dikerjakan di sini relatif sederhana, tetapi teknik-teknik yang dihasilkan sangat bermanfaat sebagaimana telah digunakan untuk sejumlah besar masalah-masalah teknis yang penting.

Hal yang pokok dapat dikuasai sebaik-baiknya dengan perantaraan penyelesaian berbagai soal. Jumlah rumus yang diperlukan untuk menelaah dan mendisain bagian-bagian struktur dan permesinan dengan metoda-metoda mekanika bahan tidak banyak, tetapi melalui pelajaran ini mahasiswa harus mengembangkan *kemampuan* untuk melihat suatu masalah dan hakekat dari besaran yang dihitung. *Lengkap, berhati-hati dalam menyimpulkan secara diagramatis sketsa soal yang harus diselesaikan, akan memberikan saham yang besar dalam menguasai subyek ini lebih cepat dan sempurna.*

## 1-2 METODA IRISAN (METHOD OF SECTIONS)

Salah satu masalah utama mekanika bahan ialah menyelidiki tahanan dalam dari sebuah benda, yaitu *hakekat gaya-gaya yang ada di dalam suatu benda yang mengimbangi gaya-gaya luar terpakai*. Untuk maksud ini, kita melakukan metoda pendekatan yang seragam. Kita buat sebuah sket diagramatis yang lengkap dari bagian struktur yang akan diselidiki di mana *semua* gaya luar yang bekerja pada sebuah benda diperlihatkan pada masing-masing titik tangkapnya. Sket tersebut kita sebut diagram *benda bebas* (free-body diagram). Semua gaya-gaya yang bekerja pada sebuah benda, termasuk gaya reaksi yang disebabkan oleh tumpuan dan berat\* dari benda itu sendiri, dipandang sebagai gaya-gaya luar. Selanjutnya, karena sebuah benda stabil akan diam pada kesesimbangannya, maka gaya-gaya yang bekerja padanya akan memenuhi persamaan keseimbangan statis. Jadi bila gaya-gaya yang bekerja pada sebuah benda seperti yang diperlihatkan dalam Gambar 1-1(a) memenuhi persamaan keseimbangan statis dan semuanya



Gambar 1-1 Pengirisan sebuah benda

\* Singkatnya, berkat dari benda itu, atau lebih umum, gaya-gaya inersial yang disebabkan oleh percepatan, dan seterusnya adalah "gaya-gaya benda" dan bekerja ke seluruh benda dengan jalan menyatu dengan satuan-satuan volume benda, tetapi dalam banyak hal gaya-gaya tersebut dapat dianggap sebagai beban-beban luar.

terlihat dalam diagram benda bebas. Kemudian karena penentuan gaya dalam yang dihasilkan oleh gaya luar adalah salah satu dasar yang diperlihatkan oleh subyek ini, maka sebuah irisan tertentu dibuat pada benda, yang secara lengkap memisahkannya menjadi dua bagian. Hasil proses tersebut dapat dilihat dalam Gambar 1-1(b) dan (c) di mana bidang tertentu *ABCD* memisahkan benda semula menjadi *dua bagian yang berlainan*. Metoda ini akan disebut sebagai *metoda irisan* (method of section). Kemudian, bila benda itu secara keseluruhan berada dalam keseimbangan, maka *setiap bagian* dari padanya berada pula dalam keseimbangan. Untuk bagian-bagian benda tersebut, bagaimana pun, gaya yang diperlukan untuk mempertahankan keseimbangan haruslah bekerja pada irisan yang terpotong. Pengandaian ini akan membawa kita pada kesimpulan yang fundamental berikut:

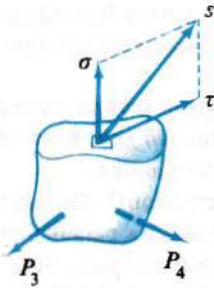
*Gaya-gaya luar terpakai pada sebuah sisi potongan tertentu haruslah diimbangi oleh gaya-gaya dalam yang terbentuk dalam potongan tersebut*, atau ringkasnya, gaya-gaya luar diimbangi oleh gaya-gaya dalam. Kelak akan terlihat bahwa bidang-bidang potongan tersebut akan berorientasi kepada suatu arah tertentu untuk disesuaikan dengan kebutuhan-kebutuhan khusus. Tetapi konsep di atas akan kita andalkan sebagai langkah pertama untuk memecahkan *semua* soal di mana gaya-gaya dalam sedang diselidiki.

Dalam membahas metoda irisan, kita perlu memperhatikan bahwa semua benda, meskipun tidak dalam keseimbangan statis, akan berada dalam keseimbangan dinamis. Masalah ini dapat kita permudah menjadi persoalan statika. Pertama, percepatan dari bagian yang dipertanyakan kita hitung, kemudian dikalikan dengan massa benda, hingga memberikan gaya  $F = ma$ . Bila gaya yang dihitung diberikan kepada benda tersebut pada titik pusat massanya menurut arah yang berlawanan dengan percepatan, maka persoalan dinamika menjadi persoalan statika. Ini disebut *azas d'Alembert*. Dari segi pandangan ini, semua benda dapat dipikirkan berada sesaat dalam status keseimbangan statis. Karena itu untuk setiap benda, baik dalam keseimbangan statis maupun dinamis, kita dapat membuat suatu diagram benda bebas untuk menunjukkan gaya-gaya yang diperlukan untuk menjaga benda secara keseluruhan berada dalam keadaan keseimbangannya. Selanjutnya persoalan menjadi sama dengan yang dibahas di atas.

### 1-3 TEGANGAN (STRESS)

Umumnya, gaya dalam yang bekerja pada luas yang kecil takberhingga sebuah potongan, akan terdiri dari bermacam-macam besaran dan arah, seperti yang diperlihatkan secara diagramatis dalam Gambar 1-1(b) dan (c). Gaya-gaya dalam ini merupakan vektor dalam alam dan bertahan dalam keseimbangan terhadap gaya-gaya luar terpakai. Dalam mekanika bahan kita perlu menentukan *intensitas* dari gaya-gaya ini dalam berbagai bagian dari potongan, sebagai perlawanan terhadap deformasi sedang kemampuan bahan untuk menahan gaya tersebut tergantung pada intensitas ini. Pada umumnya, intensitas gaya yang bekerja pada luas yang kecil takberhingga suatu potongan berubah-ubah dari suatu titik ke titik lain, umumnya intensitas ini berarah miring pada bidang potongan. Dalam praktek keteknikan biasanya intensitas gaya diuraikan menjadi tegaklurus dan sejajar dengan irisan yang sedang diselidiki. Penguraian intensitas gaya ini pada luas kecil takberhingga diperlihatkan dalam Gambar 1-2. Intensitas gaya yang *tegaklurus* atau *normal terhadap irisan* disebut *tegangan normal* (normal stress) pada sebuah titik. Dalam buku ini ia akan dilambangkan dengan huruf Yunani  $\sigma$  (sigma). Suatu tegangan tertentu





Gambar 1-2 Komponen-komponen normal dan geser dari tegangan

yang dianggap benar-benar bertitik-titik pada sebuah titik, secara matematis didefinisikan sebagai

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

di mana  $F$  adalah suatu gaya yang bekerja tegak lurus terhadap potongan, sedangkan  $A$  merupakan luas yang bersangkutan. Tegangan normal yang menghasilkan tarikan (traction atau tension) pada permukaan sebuah potongan biasa kita sebut *tegangan tarik* (tensile stress). Di pihak lain, tegangan normal yang mendorong potongan tersebut disebut *tegangan tekan* (compressive stress).

Komponen yang lain dari intensitas gaya yang bekerja *sejajar dengan bidang dari luas elementer*, adalah seperti yang terlihat dalam Gambar 1-2. Komponen intensitas gaya ini disebut *tegangan geser* (shearing stress). Ini dilambangkan dengan abjad Yunani  $\tau$  (tau). Secara matematis ia didefinisikan sebagai

$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta A}$$

di mana  $A$  menyatakan luas sedangkan  $V$  adalah komponen gaya yang sejajar dengan potongan. Perlu kita perhatikan bahwa definisi-definisi dari tegangan-tegangan ini pada sebuah titik adalah mencakup konsep pengambilan  $\Delta A \rightarrow 0$  dan akan dapat merupakan pertanyaan pula bila ditinjau dari segi atomik. Bagaimana pun, model yang homogen yang ditunjukkan oleh persamaan-persamaan ini telah merupakan pendekatan yang baik terhadap keadaan yang bukan homogen dari tingkat makroskopis. Karena itu disebut juga sebagai menggunakan pendekatan yang fenomenologis

Pembaca haruslah dapat membayangkan gambar pemikiran yang jelas mengenai tegangan-tegangan yang disebut normal atau yang dinamakan geser. Untuk diulangi lagi, tegangan normal merupakan akibat komponen-komponen gaya yang tegak lurus dengan bidang potongan, sedang tegangan geser adalah hasil komponen-komponen yang sejajar dengan bidang potongan tersebut.

Dari definisi tegangan-tegangan normal dan geser di atas, karena mereka merupakan intensitas gaya pada sebuah luas, maka kita melihat bahwa tegangan\* diukur dalam

\* Dalam beberapa buku istilah "satuan tegangan" dipergunakan untuk menunjukkan tegangan persatuan luas tetapi dalam buku ini perkataan "tegangan" yang dipergunakan sebagai konsep ini.



satuan gaya dibagi dengan satuan luas. Karena gaya adalah vektor sedang luas adalah suatu skalar maka hasil bagi dari keduanya yang dinyatakan sebagai komponen-komponen gaya dalam arah tertentu, adalah suatu besaran vektor.\*

Perlu diperhatikan bahwa *tegangan-tegangan yang dikalikan dengan masing-masing luas di mana mereka bekerja akan menghasilkan gaya-gaya sedang jumlah gaya-gaya ini pada sebuah potongan khayal haruslah menjaga benda dalam keseimbangannya.*

Sistem satuan metrik yang dikenal sebagai Sistem Satuan Internasional, disingkat dengan SI, dari bahasa Perancis *Systeme International d'Unites* akan kita pergunakan dalam seluruh buku ini. Perubahan menjadi sistem pengukuran metrik yang dipermoderen ini telah mengambil tempat ke seluruh penjuru dunia. Di Amerika Serikat sejumlah industri besar telah merencanakan peralihan kesatuan SI. Antara lain industri-industri dalam bidang permobilan, alat pertanian, dan permesinan dalam bisnis. Tidak dapat dielakkan lagi perubahan-perubahan ini membuat satuan SI menjadi sistem pengukuran yang menonjol di Amerika Serikat.

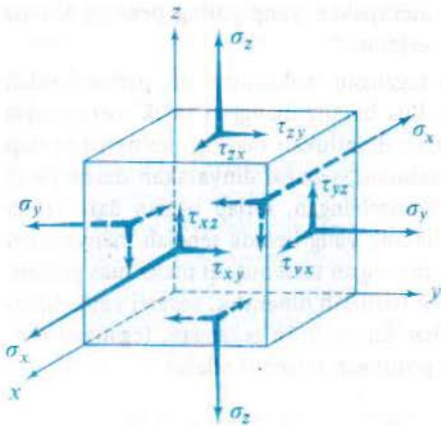
Satuan dasar SI adalah *meter* (m) untuk panjang, *kilogram* (kg) untuk massa dan *detik* (s) untuk waktu. Satuan turunan (derived units) SI untuk luas adalah *meter kuadrat* ( $m^2$ ), dan untuk percepatan adalah *meter per detik kuadrat* ( $m/s^2$ ). Satuan gaya didefinisikan sebagai satuan massa dikalikan dengan satuan percepatan yaitu *kilogram meter per detik kuadrat* ( $kg \cdot m/s^2$ ) dan disingkat dengan *newton* (N). Satuan tegangan adalah *newton per meter kuadrat* ( $N/m^2$ ), disingkat pula dengan *pascal* (Pa). Kita pergunakan pula huruf awalan pada satuan yang merupakan kelipatan 1000. Misalnya, gaya dapat ditulis dalam bentuk-bentuk *milli newton* ( $1 \text{ mN} = 0,001 \text{ N}$ ), *newton*, atau *kilonewton* ( $1 \text{ kN} = 1000 \text{ N}$ ), panjang dalam *millimeter* ( $1 \text{ mm} = 0,001 \text{ m}$ ), *meter* dan *kilometer* ( $1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$ ). Tegangan dalam *kilo pascal* ( $1 \text{ kPa} = 1000 \text{ Pa}$ ), *mega pascal* ( $1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa}$ ), *giga pascal* ( $1 \text{ GPa} = 10^9 \text{ Pa}$ ), dan seterusnya.†

Tegangan yang secara numerik dinyatakan dalam satuan  $N/m^2$  luar biasa kecilnya bila dibandingkan dengan yang biasanya kita nyatakan dalam sistem satuan Inggris. Ini disebabkan oleh karena gaya dalam satuan newton adalah kecil terhadap satu pon gaya sedang satu meter bujur sangkar adalah luas yang amat besar dibandingkan dengan satu inci kuadrat. Oleh karena itu lebih dapat diterima bila menuliskan tegangan dalam satuan  $N/mm^2$ , yaitu notasi yang mula-mula tidak direkomendasikan. Tetapi, karena ini setara betul dengan megapascal (MPa) maka notasi yang terakhir memperoleh pengakuan yang luas.

Bila di samping bidang seperti *ABCD* dalam Gambar 1-1(a) ditambahkan bidang lain yang berjarak kecil takberhingga dan sejajar dengan yang pertama, yang dibuat melalui benda tersebut, suatu elemen tipis dari benda dapat dipisahkan sendiri dari benda tersebut. Yaitu seperti kubus yang terlihat dalam Gambar 1-3. Di sini untuk maksud-maksud identifikasi, proses penguraian tegangan menjadi komponen-komponen dilakukan melebihi dari yang dibahas sebelumnya. Pada tiap permukaan, tegangan geser  $\tau$  di-

\* Untuk perincian selanjutnya lihatlah Pasal 8-2.

† Pembahasan terperinci dari satuan SI, termasuk faktor konversi, yang mengatur gaya SI, serta penggunaannya, dapat ditemukan pada buku pedoman komprehensif yang diterbitkan oleh The American Society for Testing and Materials (Testing Bahan oleh Masyarakat Amerika) dengan judul ASTM E-380-1974. Untuk baiknya, tabel singkat faktor konversi dari satuan Inggris ke dalam SI terdapat dalam halaman belakang buku ini.



Gambar 1-3 Status tegangan yang paling umum yang bekerja pada sebuah elemen

uraikan ke dalam dua komponen yang sejajar dengan sekumpulan sumbu tertentu. Tanda huruf pada  $\sigma$  menunjukkan arah tegangan normal sepanjang sumbu tertentu, di mana tegangan itu sendiri bekerja pada bidang yang tegak lurus pada sumbu yang sama. Tanda huruf yang pertama dari  $\tau$  menunjukkan tegangan geser pada bidang yang tegak lurus pada sumbu tertentu, sedang tanda huruf yang kedua menentukan arah tegangan geser.

Kubus kecil takberhingga seperti yang terlihat dalam Gambar 1-3, dapat digunakan sebagai dasar untuk perumusan eksak dari persoalan mekanika bahan. Metoda untuk mempelajari sebuah kubus seperti itu (yang menyangkut penulisan suatu persamaan dalam keseimbangannya dan memastikan bahwa kubus tersebut setelah mengalami deformasi akibat gaya-gaya yang bekerja terhadapnya, akan sama secara geometris dengan kubus-kubus kecil takberhingga yang ada di sampingnya) berada di luar jangkauan bahasan buku ini. Ini merupakan bidang teori elastisitas (elasticity) matematis. Prosedur-prosedur yang digunakan dalam buku ini tidak dibawa kepada keadaan umum yang dinyatakan oleh Gambar 1-3. Metoda-metoda yang dipergunakan di sini akan sederhana sekali.

#### 1-4 BEBAN AKSIAL; TEGANGAN NORMAL (AXIAL LOAD; NORMAL STRESS)

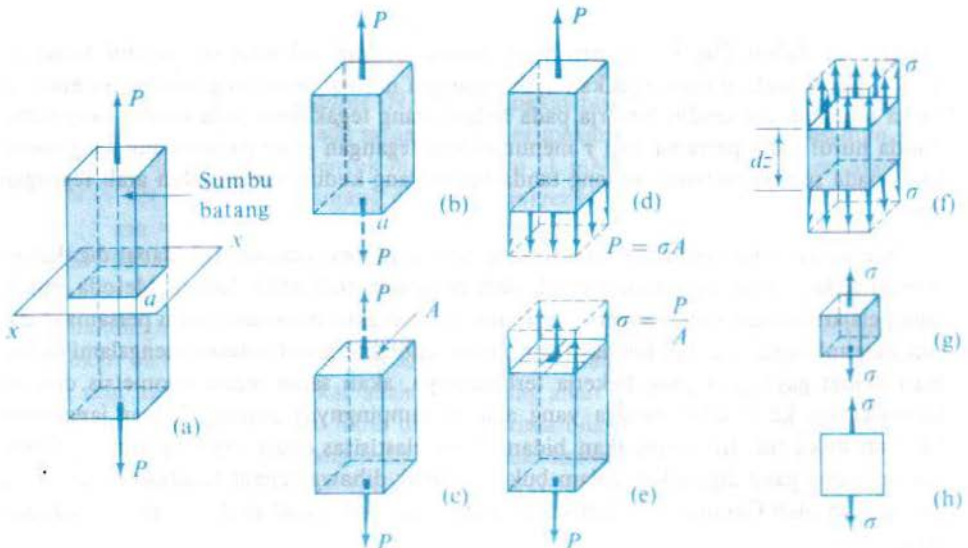
Dalam kebanyakan keadaan praktis, bila arah bidang khayal memotong sebuah bagian struktur yang dipilih dengan bijaksana, maka tegangan yang bekerja pada potongan tersebut akan sangat penting dan mudah menentukannya. Keadaan penting seperti itu terdapat pada suatu pembebanan batang aksial lurus dalam gaya tarik, *asalkan bidang dibuat tegak lurus terhadap sumbu batang*. Tegangan tarik yang bekerja pada potongan tersebut merupakan tegangan *maksimum*, sedangkan potongan yang lain yang tidak tegak lurus pada sumbu batang akan mempunyai permukaan yang lebih luas untuk



melawan gaya terpakai. Tegangan maksimum merupakan yang paling penting karena cenderung akan menyebabkan kegagalan bahan tersebut.\*

Untuk memperoleh ungkapan aljabar dari tegangan maksimum ini, perhatikanlah keadaan yang dilukiskan dalam Gambar 1-4(a). Bila batang dianggap tidak mempunyai berat, dua gaya  $P$  yang sama dan berlawanan arah diperlukan masing-masing pada tiap ujung batang untuk menjaga keseimbangan. Kemudian, sebagai dinyatakan dalam Pasal 1-2, karena keseluruhan benda berada dalam keseimbangan, setiap bagian dari benda berada pula dalam keadaan seimbang. Bagian batang yang berada sebelah menyebelah potongan  $x-x$  berada dalam keseimbangan. Pada potongan tersebut, di mana luas penampang batang adalah  $A$ , gaya yang setara dengan  $P$  haruslah dibentuk, seperti yang diperlihatkan dalam Gambar 1-4(b) dan (c). Kemudian dari definisi tegangan, tegangan normal atau tegangan yang berlaku tegaklurus pada potongan tersebut adalah

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad \text{atau} \quad \frac{\text{gaya}}{\text{luas}} \quad \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right] \quad (1-1)$$



Gambar 1-4 Urutan langkah analisis tegangan sebuah benda

Tegangan *normal* ini didistribusikan dengan *merata* pada luas penampang  $A$ †. Hakekat besaran yang dihitung oleh Persamaan 1-1 dapat dilihat dalam gambar-gambar 1-4(d) dan (e). *Pada umumnya, gaya  $P$  adalah resultante sejumlah gaya pada suatu sisi atau sisi yang satunya lagi dari potongan tersebut.*

\* Beberapa bahan memiliki kekuatan yang jauh lebih besar pada tegangan normal daripada tegangan geser. Untuk bahan tersebut kegagalan ditemui pada bidang miring. Ini akan dibahas dalam Bab 9.

† Persamaan 1-1 digunakan hanya bila luas penampang konstan sepanjang batang. Untuk pembahasan keadaan di mana terdapat diskontinuitas tajam pada luas penampang, lihatlah Pasal 2-11.



Bila sebuah potongan tambahan dibuat sejajar dengan bidang  $x$ - $x$ , dalam Gambar 1-4(a), maka irisan yang terpisah sendiri oleh kedua potongan tersebut dapat ditunjukkan seperti dalam Gambar 1-4(f), sedang bila pemotongan yang seperti itu dilakukan terus mendekati bidang  $x$ - $x$  dalam Gambar 1-4(a), maka kita memperoleh sebuah kubus yang kecil takberhingga seperti yang terlihat dalam Gambar 1-4(g). Jenis tegangan yang muncul di sini hanyalah tegangan normal pada kedua permukaan kubus. Status tegangan pada sebuah elemen seperti itu disebut sebagai *tegangan sumbu-tunggal* (uniaxial stress). Dalam praktek, pandangan isometris yang terdapat dalam Gambar 1-4(g) jarang dipergunakan; yang sering dipakai adalah diagram yang disederhanakan seperti yang terlihat dalam Gambar 1-4(h). Meskipun demikian, mahasiswa tidak boleh melupakan keadaan tiga dimensi dari masalah yang dikerjakan.

Pada sebuah potongan, sistem tegangan tarik yang dihitung oleh Persamaan 1-1 memberikan suatu pengimbang pada gaya luar terpakai. Bila tegangan-tegangan normal ini dikalikan dengan luas kecil takberhingga yang bersangkutan dan kemudian dijumlahkan untuk seluruh luas potongan, maka penjumlahan ini sama dengan gaya  $P$ . Selanjutnya, resultante penjumlahan ini haruslah bekerja melalui *titik berat* sebuah irisan. Sebaliknya, untuk mendapatkan distribusi tegangan yang merata pada sebuah batang, gaya aksial terpakai haruslah bekerja pada titik berat luas penampang yang diselidiki. Umpamanya, bagian mesin yang diperlihatkan dalam Gambar 1-5(a), tegangan tidak dapat diperoleh hanya dari Persamaan 1-1 saja. Di sini pada irisan semacam  $A$ - $A$ , suatu sistem gaya yang setara dengan statis yang terbentuk dalam bahan haruslah tidak hanya terdiri dari gaya  $P$ , tetapi juga dari momen lentur  $M$  yang harus menahan gaya luar terpakai berada dalam keseimbangan. Ini mengakibatkan terjadinya distribusi tegangan yang tidak merata dalam bagian struktur tersebut. Ini akan kita lakukan dalam Bab 7.



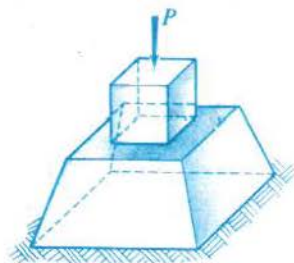
Gambar 1-5 Bagian mesin dengan distribusi tegangan yang tidak merata pada Irisan  $A$ - $A$ .

Dalam menerima Persamaan 1-1, kita harus tetap mengingat bahwa sifat bahan tersebut telah kita *idealisasikan*. Setiap partikel benda kita andalkan menyokong dengan sama melawan gaya. Suatu keserbaseragaman yang sempurna dari benda hanyalah merupakan suatu pengandaian seperti di atas. Bahan-bahan yang ada dalam kenyataan, seperti logam, terdiri dari butiran-butiran, sedang kayu mempunyai serat. Dalam bahan-bahan yang nyata sebagian partikel memberikan perlawanan gaya yang melebihi dari yang lainnya. Tegangan yang diperlihatkan dalam gambar-gambar 1-4(d) dan (e) sebenarnya tidak ada. Diagram distribusi tegangan yang sesungguhnya berubah-ubah untuk tiap kasus dan benar-benar tidak teratur dan bergerigi. Tetapi secara rata-rata atau ber-

bicara dalam bahasa statistik, perhitungan yang berdasarkan Persamaan 1-1 adalah benar dan karenanya tegangan yang kita hitung dapat memberikan besaran yang sangat berarti.

Pertimbangan serupa dapat pula diberikan kepada batang yang memperoleh gaya tekan. Tegangan normal atau tekan maksimum dapat pula diperoleh dengan membuat irisan yang tegak lurus pada sumbu sebuah batang serta menggunakan Persamaan 1-1. Tegangan yang diperoleh itu akan mempunyai intensitas yang merata selama resultante gaya-gaya terpakai berimpit dengan *titik berat* dari potongan. Tetapi kita harus berhati-hati dalam menghadapi batang yang mendapat gaya tekan. Ini dapat berbentuk sedemikian ramping hingga mereka tidak mempunyai sifat bentuk yang dikehendaki. Misalnya sebuah alat ukur meter biasa bila memperoleh gaya tekan yang kecil saja akan berubah menjadi melengkung dan patah. Tinjauan mengenai *ketidak-stabilan* demikian dari batang tekan akan dibahas dalam Bab 13. *Persamaan 1-1 bermanfaat hanya untuk batang tekan yang mempunyai beban aksial yang agak gempal*, yaitu seperti blok pendek. Seperti akan diperlihatkan kelak dalam Bab 13. Sebuah blok yang sisinya paling pendek kira-kira sepersepuluh panjang dapat dianggap sebagai blok pendek. Misalnya sepotong kayu 50 mm × 100 mm yang panjangnya 500 mm masih dianggap blok pendek.

Sering terjadi di mana sebuah benda didukung oleh benda lain. Bila resultante gaya-gaya terpakai berhimpitan dengan titik berat luas persentuhan kedua benda, maka intensitas gaya atau tegangan antara kedua benda dapat pula ditentukan dengan Persamaan 1-1. Biasanya tegangan normal ini disebut *tegangan dukung* (bearing stress). Gambar 1-6 memperlihatkan sebuah blok menghimpit sebuah landasan beton yang seterusnya menghimpit tanah, menunjukkan tegangan seperti itu. Tegangan dukung ini diperoleh dengan membagi gaya terpakai  $P$  dengan luas persentuhan kedua benda yang bersangkutan.



Gambar 1-6 Tegangan dukung yang terdapat antara blok dan bantalan

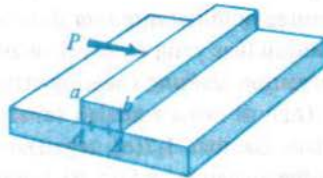
## 1-5 TEGANGAN GESER RATA-RATA (AVERAGE SHEARING STRESS)

Keadaan lain yang sering kita temui dalam praktek akan diperlihatkan oleh Gambar 1-7(a), (c) dan (e). Dalam semua kasus ini gaya-gaya yang diantarkan dari sebuah bagian benda kepada yang lainnya adalah dengan menimbulkan tegangan-tegangan dalam bidang yang sejajar dengan gaya terpakai. Untuk mendapatkan tegangan dalam hal

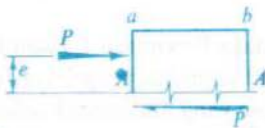


seperti itu, bidang-bidang pemotongan seperti  $A-A$  kita pilih sedang diagram benda bebas\* seperti yang terlihat dalam Gambar 1-7(b), (d) dan (f) akan kita gunakan. Gaya-gaya diantarkan melalui tiap luas potongan yang bersangkutan. Jadi dengan *menganggap* bahwa tegangan yang *bekerja dalam bidang potongan-potongan ini akan didistribusikan secara merata*, maka kita akan memperoleh suatu hubungan tegangan

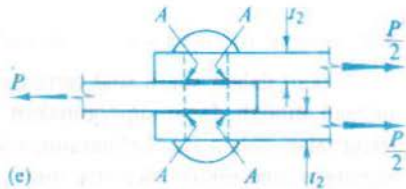
$$\tau = \frac{P}{A} \text{ atau } \frac{\text{gaya}}{\text{luas}} \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right] \quad (1-2)$$



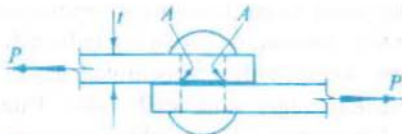
(a)



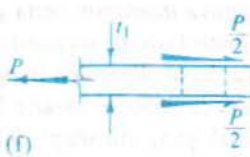
(b)



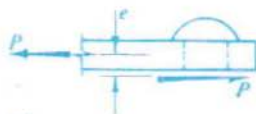
(c)



(d)



(e)



(f)



(g)

**Gambar 1-7** Keadaan pembebanan yang mengakibatkan tegangan geser.

di mana  $\tau$  didefinisikan sebagai tegangan geser,  $P$  adalah gaya total yang bekerja sepanjang dan sejajar dengan potongan tersebut, yang sering disebut sebagai *geseran* (shear), sedang  $A$  merupakan luas penampang potongan dari bagian struktur tersebut. Dengan pertimbangan yang akan dibahas kemudian, tidak sebagaimana halnya tegangan normal, maka tegangan geser yang diberikan oleh Persamaan 1-2 hanyalah *hampir men-*

\* Suatu momen kecil yang tidak setimbang yang sama dengan  $Pe$  terdapat dalam kedua kasus pertama dalam Gambar 1-7, tetapi karena kecil biasanya diabaikan.



*dekati* benar. Untuk kasus yang diperlihatkan itu, tegangan geser sebenarnya didistribusikan pada model yang tidak merata sepanjang luas potongan. Besaran yang diberikan oleh Persamaan 1-2 menyatakan tegangan geser *rata-rata*.

Tegangan geser yang dihitung oleh Persamaan 1-2 diperlihatkan secara diagramatis dalam Gambar 1-7(g). Perhatikanlah bahwa untuk kasus yang terlihat dalam Gambar 1-7(e) ada *dua bidang* dari paku keling yang melawan gaya. Paku keling seperti yang disebutkan berada dalam geseran *ganda* (double shear).

Dalam kasus seperti yang terdapat dalam Gambar 1-7(c) dan (e), begitu gaya  $P$  diberikan, maka tekanan yang sangat tidak teratur terjadi antara sebuah paku keling atau baut dengan pelat. Intensitas nominal *rata-rata* dari tekanan ini diperoleh dengan membagi gaya yang diantar dengan luas yang diproyeksikan oleh paku keling pada pelat tersebut. Ini disebut sebagai *tegangan dukung* (bearing stress). Tegangan dukung dalam Gambar 1-7(c) adalah  $\sigma_b = P/(td)$ , di mana  $t$  adalah tebal pelat dan  $d$  adalah diameter paku keling. Untuk kasus dalam Gambar 1-7(e), tegangan dukung untuk pelat tengah dan pelat-pelat luar masing-masing adalah  $\sigma_1 = P/(t_1 d)$  dan  $\sigma_2 = P/(2t_2 d)$ .

## 1-6 MASALAH DALAM TEGANGAN NORMAL DAN GESER

Sekali dalam suatu soal tertentu  $P$  dan  $A$  ditentukan, maka Persamaan 1-1 dan 1-2 dengan mudah dapat dipergunakan. Persamaan-persamaan ini memiliki pengertian fisis yang jelas. Selain itu, kelihatannya jelas bahwa besar tegangan yang dikehendaki adalah *tegangan maksimum*, karena merupakan gangguan yang paling besar pada kekuatan sesuatu bahan. Tegangan yang paling besar terdapat pada potongan atau irisan yang luas penampangnya *minimum* serta gaya aksial yang paling besar. Irisan-irisan seperti ini disebut *irisn kritis* (critical section). Irisan kritis untuk susunan tertentu yang sedang ditelaah biasanya dapat diperoleh dengan pemeriksaan. Tetapi untuk menentukan gaya  $P$  yang bekerja pada sebuah batang biasanya merupakan tugas yang lebih sukar. Pada kebanyakan soal yang dihadapi dalam buku ini keterangan yang terakhir diperoleh dari statika.

Untuk keseimbangan sebuah benda dalam ruang, persamaan-persamaan statika memerlukan penyelesaian dengan syarat-syarat yang berikut :

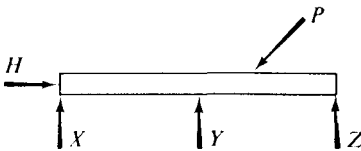
$$\left. \begin{array}{ll} \sum F_x = 0 & \sum M_x = 0 \\ \sum F_y = 0 & \sum M_y = 0 \\ \sum F_z = 0 & \sum M_z = 0 \end{array} \right\} \quad (1-3)$$

Kolom pertama Persamaan 1-3 menyatakan bahwa jumlah *semua* gaya yang bekerja pada benda menurut arah  $(x, y, z)$  haruslah sama dengan nol. Kolom kedua mengemukakan bahwa penjumlahan momen-momen *semua* gaya terhadap sumbu yang sejajar dengan arah  $(x, y, z)$  haruslah sama pula dengan nol dalam keseimbangan. Dalam soal *planar* (sebidang) yaitu bila semua batang dan gaya terletak pada sebuah bidang sementara, seperti bidang  $x$ - $y$ , maka hubungan-hubungan  $\sum F_z = 0$ ,  $\sum M_x = 0$  dan  $\sum M_y = 0$  sementara masih berlaku, tidak diperlukan.

Persamaan-persamaan statika ini dapat dipergunakan langsung untuk benda-benda padat yang berubah bentuk (berdeformasi). Deformasi yang diterima dalam bidang

teknik bangunan biasanya sangat kecil dibandingkan dengan keseluruhan dimensi bangunan. Oleh karena itu, untuk *tujuan memperoleh gaya-gaya yang terdapat dalam batang-batang, dimensi awal dari batang-batang yang tidak terdeformasi dipergunakan dalam perhitungan.*

Ada soal-soal di mana persamaan-persamaan statika tidak cukup untuk menentukan gaya-gaya di dalam, atau pun yang bekerja *pada* batang. Umpamanya, gaya-gaya reaksi untuk sebuah balok lurus yang terlihat dalam Gambar 1-8, yang ditumpu secara vertikal pada tiga buah titik, tidak dapat ditentukan hanya dari statika. Pada soal planar ini ada empat buah komponen reaksi yang tidak diketahui, sedang persamaan statika hanya ada tiga buah yang saling *tidak bergantung*. Soal-soal tersebut dinamakan *statis tak tentu* (statically indeterminate). Tinjauan mengenai persoalan statis tak tentu akan ditunda sampai Bab 11. Untuk yang sekarang serta sembilan bab yang berikutnya dari buku ini, *semua struktur dan bagian struktur yang kita tinjau adalah statis tertentu*, yakni semua gaya luar yang bekerja pada benda dapat ditentukan dengan Persamaan-persamaan 1-3. Adalah tidak kurang banyaknya soal-soal statis tertentu yang berarti praktis.



**Gambar 1-8** Balok statis tak tentu

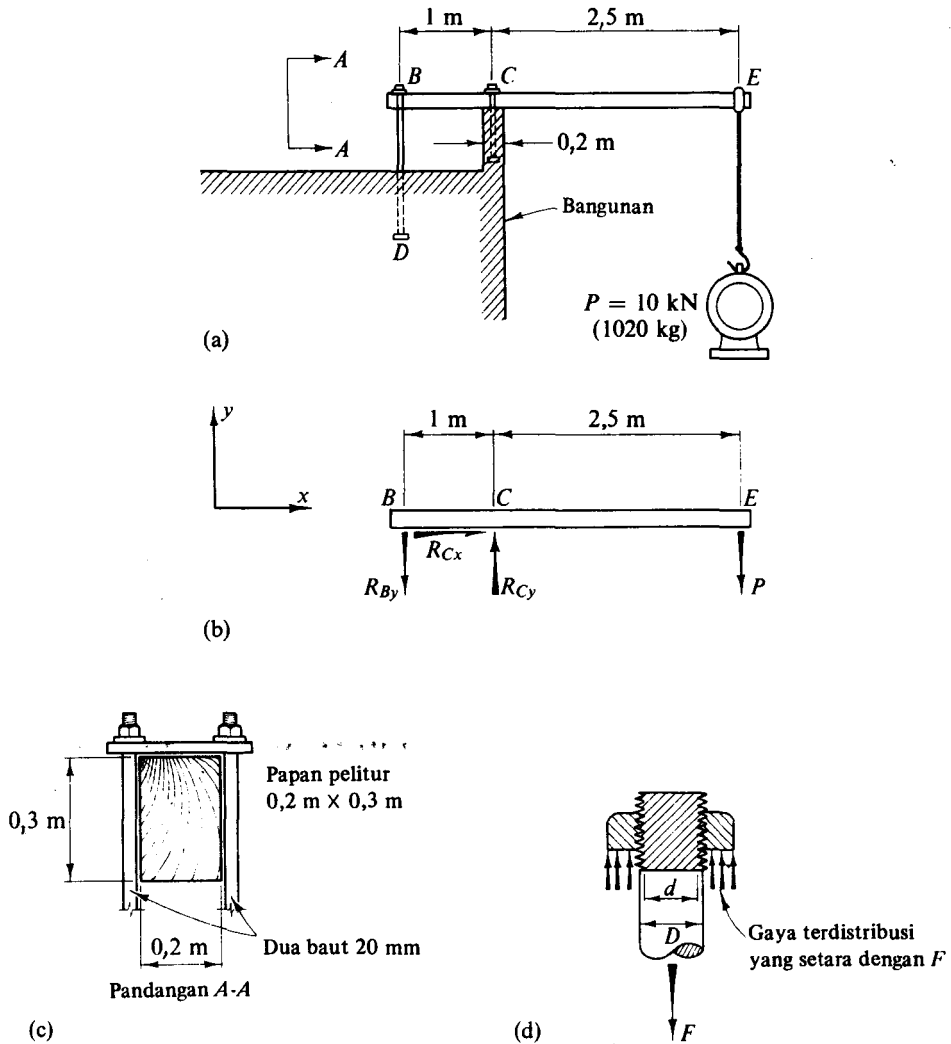
Persamaan-persamaan 1-3 seharusnya sudah terbiasa oleh mahasiswa. Biarpun demikian, beberapa contoh penggunaan Persamaan-persamaan 1-3 akan diberikan sedang ditekan kepada penggunaan teknik-teknik yang profesional. Contoh-contoh ini menyajikan tinjauan ulang informal beberapa azas statika serta memperlihatkan penggunaan Persamaan-persamaan 1-1 dan 1-2.

#### CONTOH 1-1

Balok *BE* dalam Gambar 1-9(a) dipergunakan untuk mengerek mesin. Balok ini ditahan oleh dua buah baut pada *B* dan *C*, di mana pada titik yang terakhir balok diam di atas sebuah dinding sandaran. Perincian-perincian yang perlu dapat dilihat dalam gambar. Perhatikanlah bahwa baut-baut menembus ke dalam dinding seperti yang terlihat dalam Gambar 1-9(d) dengan  $d = 16$  mm pada kaki ulir baut. Bila susunan ini dipergunakan untuk mengerek perlengkapan sebesar 10 kN, tentukanlah tegangan dalam baut-baut *BD* dan tegangan dukung pada titik *C*. Anggaplah bahwa berat balok diabaikan terhadap beban yang dipikul.

#### PENYELESAIAN

Untuk menyelesaikan soal ini, keadaan yang sebenarnya haruslah diidealisasikan, sedang sebuah diagram benda bebas dibuat untuk memperlihatkan semua gaya yang diketahui



Gambar 1-9

dan tidak diketahui. Ini dapat dilihat dalam Gambar 1-9(b). Reaksi-reaksi vertikal pada titik-titik B dan C tidaklah diketahui. Mereka masing-masing ditunjukkan sebagai  $R_{By}$  dan  $R_{Cy}$ , di mana tanda huruf yang pertama menentukan letak dan yang kedua garis aksi gaya yang tidak diketahui. Sehubungan baut-baut panjang BD tidaklah efektif dalam melawan gaya mendatar, maka hanya reaksi mendatar yang tidak diketahui yang terletak pada titik C yang akan kita andaikan dan ditulis sebagai  $R_{Cx}$ . Gaya terpakai yang diketahui  $P$  dapat dilihat pada letaknya yang tepat. Setelah diagram benda bebas dibuat, persamaan-persamaan statika dipergunakan dan dipecahkan untuk gaya-gaya yang tidak diketahui.



$$\begin{aligned}
 \sum F_x &= 0 & R_{Cx} &= 0 \\
 \sum M_B &= 0 \circ +, & 10(2,5 + 1) - R_{Cy}(1) &= 0, & R_{Cy} &= 35 \text{ kN} \uparrow \\
 \sum M_C &= 0 \circ +, & 10(2,5) - R_{By}(1) &= 0, & R_{By} &= 25 \text{ kN} \downarrow \\
 \text{Periksa:} & \sum F_y &= 0 \uparrow +, & -25 + 35 - 10 &= 0
 \end{aligned}$$

Langkah-langkah ini adalah lengkap serta memeriksa tugas untuk menentukan gaya-gaya. Berbagai luas bahan yang melawan gaya-gaya ini menyusul akan kita tentukan dan Persamaan 1-1 kita gunakan.

Luas penampang sebuah baut 20 mm:  $A = \pi(0,02/2)^2 = 0,000314 \text{ m}^2$ . Ini bukanlah luas minimum sebuah baut; ulir memperkecilnya.

Luas penampang sebuah baut 20 mm pada kaki ulir baut adalah

$$A_{\text{net}} = \pi(0,016/2)^2 = 0,000201 \text{ m}^2$$

Tegangan tarik normal maksimum\* masing-masing kedua baut BD:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{R_{By}}{2A} = \frac{25}{2(0,000201)} = 62\,000 \text{ kN/m}^2 = 62 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 62 \text{ MPa}$$

Tegangan tarik dalam tangkai baut BD:

$$\sigma = \frac{25}{2(0,000314)} = 39\,800 \text{ kN/m}^2 = 39,8 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 39,8 \text{ MPa}$$

Luas persentuhan pada titik C:

$$A = 0,2 \times 0,2 = 0,04 \text{ m}^2$$

Tegangan dukung pada titik C:

$$\sigma_b = \frac{R_{Cy}}{A} = \frac{35}{0,04} = 875 \text{ kN/m}^2 = 0,875 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 0,875 \text{ MPa}$$

## CONTOH 1-2

Landasan beton yang terlihat dalam Gambar 1-10(a) dibebani pada atasnya dengan sebuah beban yang terdistribusi secara merata dari  $20 \text{ kN/m}^2$ . Selidikilah keadaan tegangan pada tingkat 1 m di atas dasar. Gaya gravitasi yang terbentuk oleh beton adalah  $25 \text{ kN/m}^3$ .

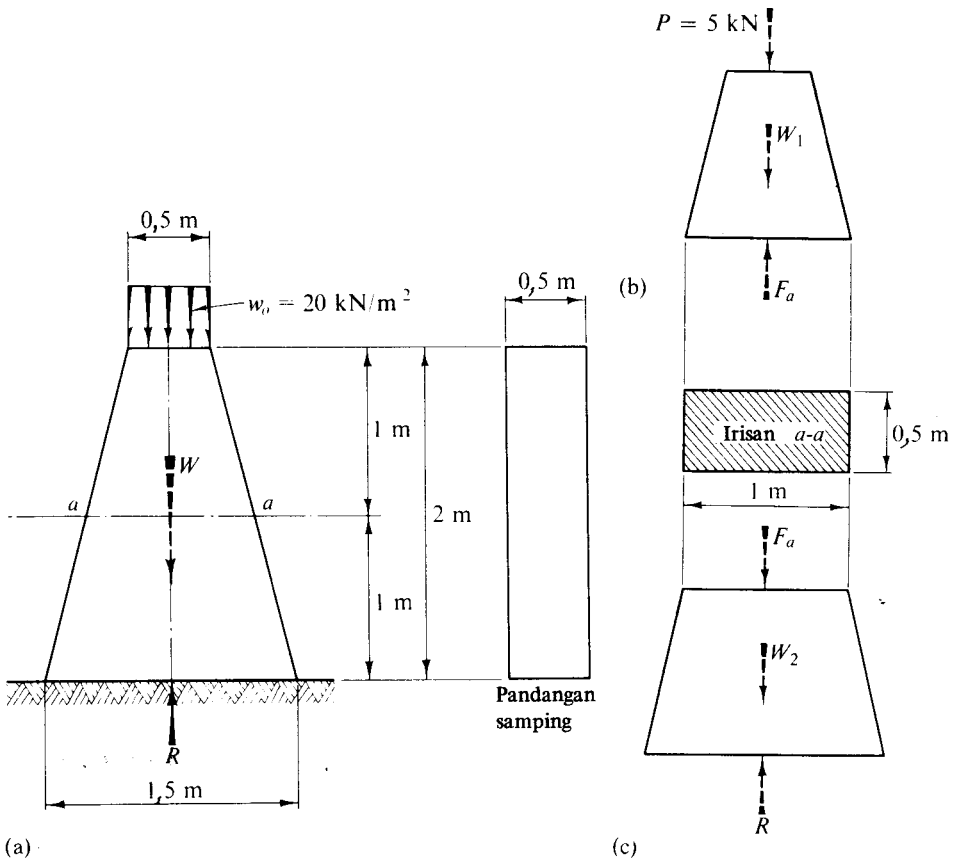
## PENYELESAIAN

Dalam soal ini berat struktur itu sendiri cukup besar dan harus disertakan dalam perhitungan-perhitungan.

Beban atau gaya dari seluruh landasan :

$$W = [(0,5 + 1,5)/2](0,5)(2)(25) = 25 \text{ kN}$$

\* Lihat juga pembahasan konsentrasi tegangan pada Pasal 2-11.



**Gambar 1-10**

Gaya terpakai total :

$$P = 20(0,5)(0,5) = 5 \text{ kN}$$

Dari  $\sum F_y = 0$ , reaksi pada dasar :

$$R = W + P = 30 \text{ kN}$$

Gaya-gaya ini dapat dilihat secara skematis dalam diagram sebagaimana halnya gaya-gaya terpusat yang bekerja melalui titik berat yang bersangkutan. Kemudian untuk menentukan tegangan pada tingkat yang dikehendaki, benda tersebut dipotong menjadi dua bagian yang terpisah. Sebuah diagram benda bebas salah satu bagian cukup untuk memecahkan persoalan ini. Sebagai perbandingan soal ini akan kita selesaikan dengan dua cara.

Dengan menggunakan bagian yang atas dari landasan sebagai sebuah benda bebas, Gambar 1-10(b), maka gaya landasan tersebut di atas potongan adalah :

$$W_1 = (0,5 + 1)(0,5)(1)(25/2) = 9,4 \text{ kN}$$

Dari  $\sum F_y = 0$ , gaya pada potongan:

$$F_a = P + W_1 = 14,4 \text{ kN.}$$

Jadi dengan menggunakan Persamaan 1-1, tegangan normal pada tingkat *a-a* adalah

$$\sigma_a = \frac{F_a}{A} = \frac{14,4}{(0,5)(1)} = 28,8 \text{ kN/m}^2$$

Tegangan ini adalah tekan sebagai  $F_a$  bekerja pada potongan tersebut.

Dengan menggunakan bagian bawah dari landasan sebagai benda bebas, Gambar 1-10(c), maka gaya dari landasan di bawah potongan adalah:

$$W_2 = (1 + 1,5)(0,5)(1)(25/2) = 15,6 \text{ kN}$$

Dari  $\sum F_y = 0$ , gaya pada potongan :

$$F_a = R - W_2 = 14,4 \text{ kN}$$

Selebihnya soal ini adalah sama dengan yang terdahulu. Landasan yang kita tinjau di sini mempunyai sebuah sumbu simetri yang vertikal, yang membuat penggunaan Persamaan 1-1 dapat dilakukan.\*

### CONTOH 1-3

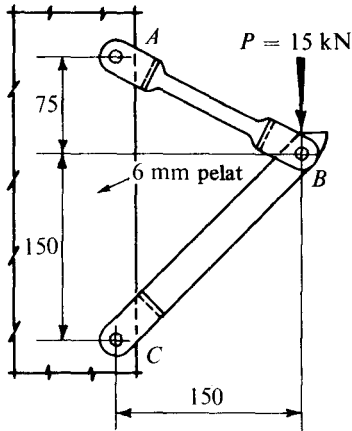
Sebuah konsol dengan massa yang diabaikan yang terlihat dalam Gambar 1-11(a) di-bebani dengan gaya  $P$  sebesar 15 kN. Untuk maksud antarmubungan ujung-ujung batang dibuat bercabang dua. Ukuran-ukuran yang bersangkutan dapat dilihat dalam gambar. Hitunglah tegangan normal dalam batang-batang  $AB$  dan  $BC$  serta tegangan-tegangan dukung dan geser untuk pasak  $C$ . Semua pasak berdiameter 10 mm.

### PENYELESAIAN

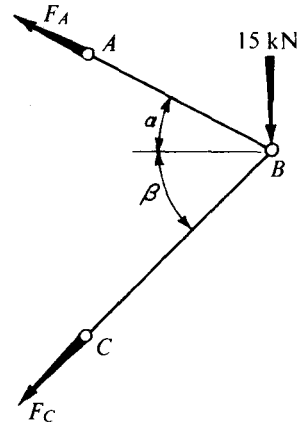
Mula-mula kita buat sebuah diagram benda bebas yang diidealisasikan terdiri dari kedua batang dengan pasak pada ujung-ujungnya, Gambar 1-11(b). Berhubung tidak ada gaya-gaya menengah yang bekerja pada batang sedang gaya terpakai bekerja melalui sambungan di titik  $B$ , maka gaya-gaya dalam batang mempunyai arah sepanjang garis-garis  $AB$  dan  $BC$ , sedang batang-batang  $AB$  dan  $BC$  diberi beban secara aksial. Besaran gaya-

\* Sesungguhnya penyelesaian yang diperoleh tidak eksak di mana sisi landasan adalah miring. Bila sudut antara kedua sisi ini besar, penyelesaian ini tidaklah cukup. Untuk perincian yang lebih lanjut lihatlah S. Timoshenko dan J. N. Goodier, *Theory of Elasticity* (3rd ed.), New York: McGraw-Hill, 1970, halaman 139.

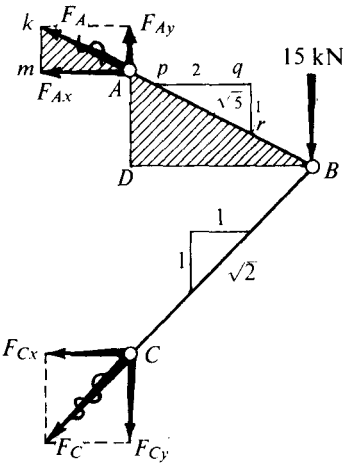




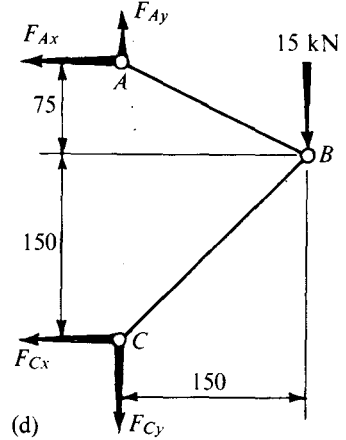
(a)



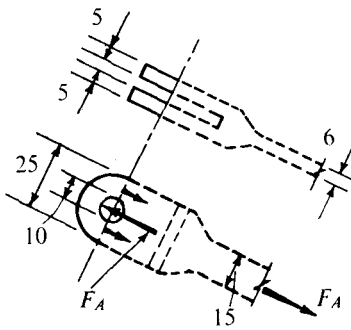
(b)



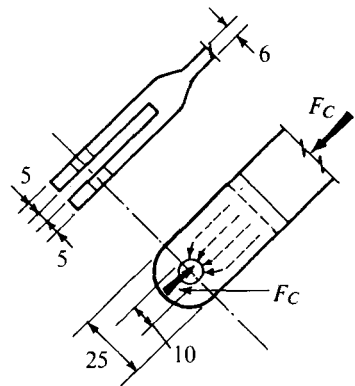
(c)



(d)



(e) (Semua ukuran dalam mm)



(f)

Gambar 1-11

gaya tidak diketahui, dan ditulis  $F_A$  dan  $F_C$  dalam diagram.\* Gaya-gaya ini dapat ditentukan secara grafis dengan melengkapi gaya-gaya sebuah segitiga  $F_A$ ,  $F_C$  dan  $P$ . Gaya-gaya ini dapat pula diperoleh secara analitis dari dua persamaan yang simultan  $\Sigma F_y = 0$  dan  $\Sigma F_x = 0$ , ditulis dalam bentuk gaya-gaya yang tidak diketahui  $F_A$  dan  $F_C$ , gaya yang diketahui  $P$  dan kedua sudut yang diketahui  $\alpha$  dan  $\beta$ . Kedua prosedur ini dapat dilakukan. Tetapi dalam kuliah ini biasanya kita akan memperoleh manfaat bila mengolah dengan suatu cara yang berbeda. Daripada melakukan gaya-gaya  $F_A$  dan  $F_C$  secara langsung, lebih baik kita menggunakan komponen-komponennya; sebagai pengganti  $\Sigma F = 0$ , maka  $\Sigma M = 0$  menjadi alat utama.

Suatu gaya dapat kita uraikan menjadi komponen-komponennya. Misalnya,  $F_A$  dapat diuraikan menjadi  $F_{Ax}$  dan  $F_{Ay}$ , seperti yang terlihat dalam Gambar 1-11(c). Sebaliknya, bila salah satu komponen dari gaya yang terarah diketahui, maka gaya itu sendiri dapat kita tentukan. Ini menyusul dari kesamaan ukuran dan segitiga gaya. Dalam Gambar 1-11(c) segitiga-segitiga  $Akm$  dan  $BAD$  adalah segitiga-segitiga sebangun (dalam diagram keduanya diberi garis-garis miring). Jadi bila  $F_{Ax}$  diketahui, maka

$$F_A = (AB/DB)F_{Ax}$$

Dengan cara yang sama, didapat pula  $F_{Ay} = (AD/DB)F_{Ax}$ . Tetapi, selanjutnya perhatikanlah bahwa  $AB/DB$  ataupun  $AD/DB$  adalah perbandingan-perbandingan, hingga kita dapat menggunakan ukuran-ukuran relatif dari bagian-bagian struktur. Ukuran-ukuran relatif tersebut dapat dilihat dengan sebuah segitiga kecil pada batang  $AB$  dan juga pada  $BC$ . Dalam soal kita sekarang

$$F_A = (\sqrt{5}/2)F_{Ax} \quad \text{dan} \quad F_{Ay} = F_{Ax}/2$$

Dengan mengambil prosedur penguraian gaya-gaya seperti di atas kita membuat diagram benda bebas yang diperbaharui, Gambar 1-11(d). Kedua komponen gaya diperlukan pada sambungan-sambungan pasak. Sesudah gaya-gaya ditentukan dengan statika, Persamaan 1-1 dipergunakan beberapa kali, berpikir dalam bentuk sebuah benda bebas sebuah batang individu, kita memperoleh

$$\Sigma M_C = 0 \circ +, \quad +F_{Ax}(75 + 150) - 15(150) = 0, \quad F_{Ax} = +10 \text{ kN}$$

$$F_{Ay} = F_{Ax}/2 = 10/2 = 5 \text{ kN},$$

$$F_A = 10(\sqrt{5}/2) = +11,2 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_A = 0 \circ +, \quad +15(150) + F_{Cx}(225) = 0,$$

$$F_{Cx} = -10 \text{ kN} \quad (\text{tekan})$$

$$F_{Cy} = F_{Cx} = -10 \text{ kN},$$

$$F_C = \sqrt{2}(-10) = -14,1 \text{ kN}$$

$$\text{Periksa: } \Sigma F_x = 0, \quad F_{Ax} + F_{Cx} = 10 - 10 = 0$$

$$\Sigma F_y = 0, \quad F_{Ay} - F_{Cy} - P = 5 - (-10) - 15 = 0$$

\* Dalam kerangka adalah lebih baik menganggap semua gaya yang tidak diketahui sebagai gaya tarik. Jawaban yang negatif dari penyelesaian menunjukkan batang dalam desakan (tekan).

Tegangan dalam batang utama  $AB$  :

$$\sigma_{AB} = \frac{F_A}{A} = \frac{11.2}{(0,006)(0,015)} = 12,4 \times 10^3 \text{ kN/m}^2 = 124 \text{ MPa} \quad (\text{tarik})$$

Tegangan dalam garpu batang  $AB$ , Gambar 1-11(e) :

$$(\sigma_{AB})_{\text{garpu}} = \frac{F_A}{A_{\text{net}}} = \frac{11.2}{2(0,005)(0,025 - 0,010)} = 74,7 \text{ MPa} \quad (\text{tarik})$$

Tegangan dalam batang utama  $BC$  :

$$\sigma_{BC} = \frac{F_C}{A} = \frac{14,1}{(0,025)(0,006)} = 94 \text{ MPa} \quad (\text{tekan})$$

Dalam batang tekan irisan total pada garpu tidak perlu diselidiki; lihatlah Gambar 1-11(f) untuk pemindahan gaya-gaya. Tegangan dukung pada pasak lebih kritis. Tegangan dukung antara pasak  $C$  dan garpu :

$$\sigma_b = \frac{F_C}{A_{\text{tegangangan dukung}}} = \frac{14,1}{(0,010)(0,005)2} = 141 \text{ MPa}$$

Tegangan dukung antara pasak  $C$  dengan pelat utama :

$$\sigma_b = \frac{F_C}{A} = \frac{14,1}{(0,010)(0,006)} = 235 \text{ MPa}$$

Tegangan geser ganda dalam pasak  $C$  :

$$\tau = \frac{F_C}{A} = \frac{14,1}{2\pi(0,010/2)^2} = 89,8 \text{ MPa}$$

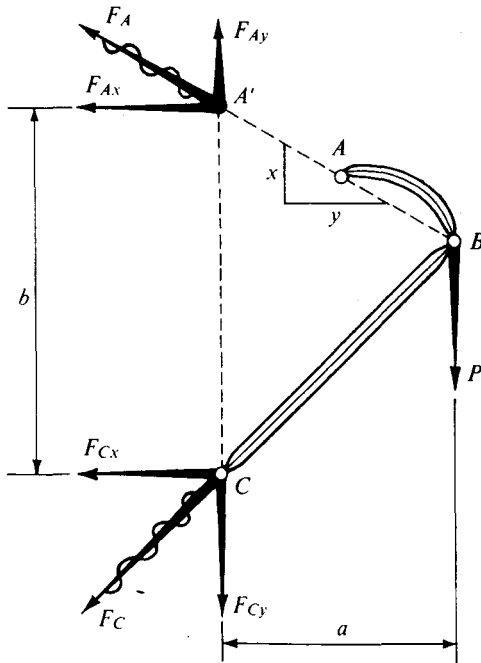
Untuk analisis yang lengkap dari konsol ini, pasak-pasak yang lain harus pula diselidiki. Tetapi kita dapat melihat dengan pemeriksaan bahwa pasak-pasak lain tersebut dalam kasus ini diberikan tegangan yang sama besarnya atau kurang dengan yang dihitung di atas.

Sekarang jelas kelihatan keuntungan dari metoda yang digunakan dalam contoh di atas untuk memperoleh gaya-gaya dalam batang. Ia dapat pula digunakan dengan berhasil dalam soal yang seperti kita lihat dalam Gambar 1-12. Gaya  $F_A$  yang diantarkan batang melengkung  $AB$  bekerja melalui titik-titik  $A$  dan  $B$ , sebab gaya-gaya yang bekerja pada  $A$  dan  $B$  haruslah kolinier (segaris). Dengan menguraikan gaya ini pada titik  $A'$ , maka prosedur yang sama dapat kita ikuti. Garis-garis bergelombang pada  $F_A$  dan  $F_C$  menunjukkan bahwa gaya-gaya ini digantikan oleh kedua komponen yang terlihat. Sebagai kemungkinan lain, gaya  $F_A$  dapat diuraikan pada titik  $A$  dan karena  $F_{Ay} = (x/y)F_{Ax}$  maka penggunaan  $\Sigma M_C = 0$  akan menghasilkan  $F_{Ax}$ .

Dalam kerangka di mana gaya-gaya terpakai tidak bekerja melalui sebuah sambungan, pengolahan semacam di atas, sebegitu jauh dapat dilakukan. Kemudian sebuah



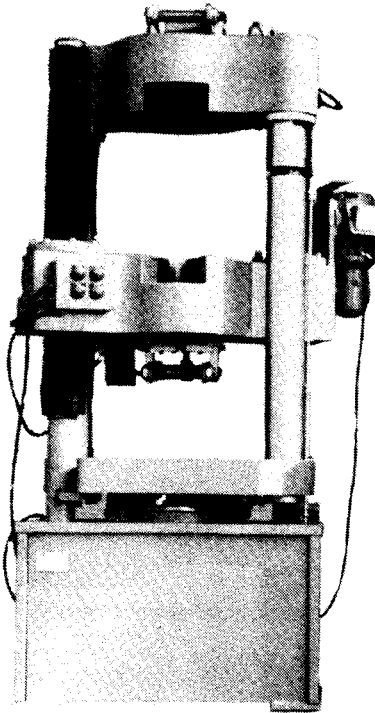
batang dipisahkan tersendiri dan dengan menggunakan diagram benda bebas yang bersangkutan, kita lengkapilah penentuan gaya-gaya. Bila gaya serong bekerja pada struktur, uraikanlah gaya tersebut menjadi komponen-komponen yang memudahkan.



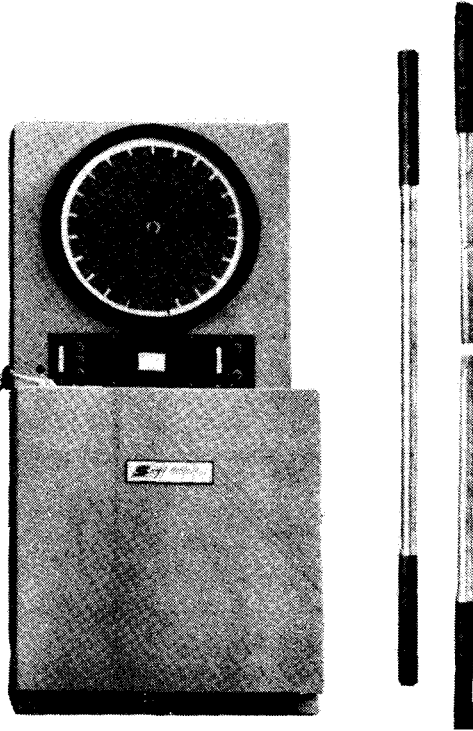
Gambar 1-12

### 1-7 TEGANGAN IJIN; FAKTOR KEAMANAN (ALLOWABLE STRESSES; FACTOR OF SAFETY)

Penentuan tegangan tidak akan berarti sama sekali tanpa melakukan pengujian fisis bahan dalam laboratorium yang memberikan keterangan mengenai ketahanan suatu bahan terhadap tegangan. Dalam laboratorium, contoh-contoh dari bahan yang diketahui, proses pembuatan dan pemanasan dilakukan dengan cermat sampai ukuran yang dikehendaki. Kemudian secara berturut-turut kepada contoh-contoh ini diberikan gaya-gaya yang diketahui yang makin lama makin diperbesar. Pada kebanyakan pengujian yang luas penggunaannya, sebuah batang bundar diberi tegangan tarik sedang contoh ini diberi beban sampai akhirnya menjadi pecah. Gaya yang diperlukan agar terjadi pecah disebut *beban ultimat* (ultimate load). Dengan membagi beban ultimat ini dengan luas penampang contoh *semula*, kita memperoleh *kekuatan ultimat* (ultimate strength) atau *tegangan ultimat* (ultimate stress) dari suatu bahan. Gambar 1-13 memperlihatkan sebuah mesin penguji yang digunakan untuk maksud ini. Sedang Gambar 1-14 merupakan gambar dari sebuah spesimen uji tarikan. Pengujian tarikan sangat luas penggunaannya. Tetapi pengujian-pengujian tekan, lenturan, puntiran dan geseran dapat juga dilakukan. Tabel 1 dari lampiran memberikan kekuatan-kekuatan ultimat dan sifat-sifat fisis yang lain dari beberapa bahan.



**Gambar 1-13** Mesin uji universal  
(atas kebaikan SATEC systems)

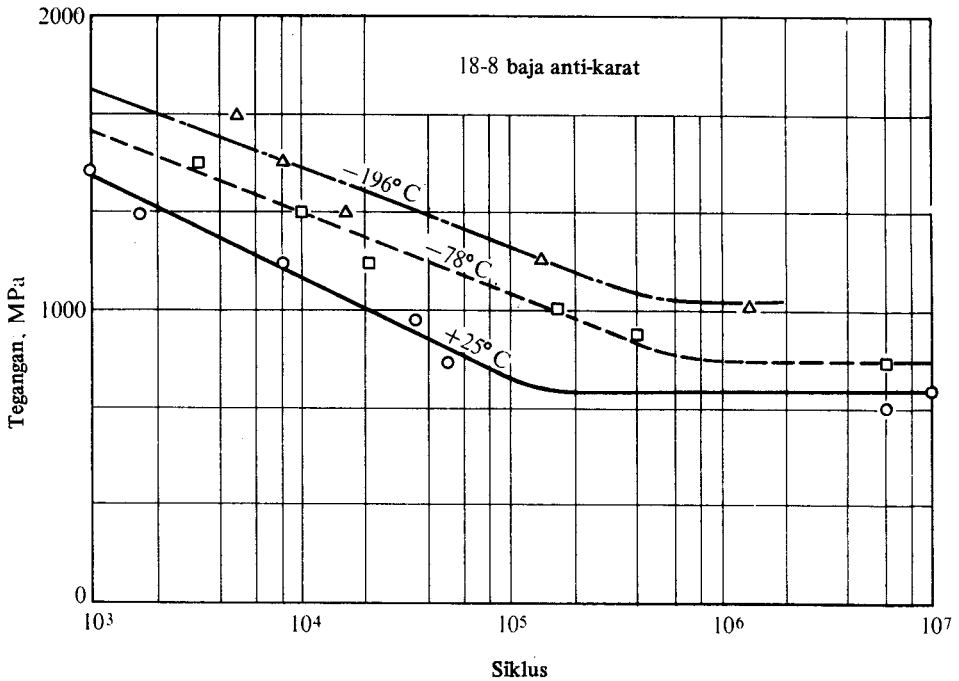


**Gambar 1-14** Contoh uji tarik khas  
dari baja lunak (a) sebelum pecah  
(b) sesudah pecah.

Untuk disain bagian-bagian struktur tingkat tegangan disebut *tegangan ijin* (allowable stress) dibuat benar-benar lebih rendah daripada kekuatan ultimat yang diperoleh dari yang disebut pengujian "statis" tersebut di atas. Ini penting untuk beberapa pertimbangan. Besar eksak gaya yang dapat bekerja pada bangunan yang dirancang jarang diketahui secara pasti. Bahan tidak seluruhnya serba sama. Beberapa bahan diregangkan sebesar yang tidak diperbolehkan sebelum benar-benar pecah, hingga untuk menahan deformasi-deformasi ini, tegangan haruslah dijaga rendah.\* Sementara beberapa bahan benar-benar berkarat. Sedang beberapa bahan lagi mengalir secara plastis di bawah tindihan sebuah beban, suatu gejala yang kita sebut *rangkak* (creep). Dengan suatu jarak waktu tertentu, hal ini mengakibatkan deformasi-deformasi yang besar, yang tentu tidak dapat kita biarkan.

Untuk penggunaan di mana suatu gaya hilang timbul dari bangunan beberapa kali, bahan tidak dapat bertahan terhadap tegangan ultimat dari pengujian statis. Dalam kasus demikian "kekuatan ultimat" tergantung kepada beberapa kali gaya digunakan selama bahan bekerja pada tingkat ketegangan tertentu. Gambar 1-15 memperlihatkan hasil

\* Lihat Bab. 2 untuk yang lebih terperinci.



**Gambar 1-15** Kekuatan lelah baja anti-karat 18-18 pada berbagai suhu (pengujian balok torak).

pengujian\* pada sejumlah contoh yang sejenis pada tegangan yang berbeda. Titik-titik eksperimental menunjukkan jumlah siklus yang dibutuhkan untuk memecahkan contoh pada suatu tegangan tertentu di bawah beban terpakai tidak sama yang berubah-ubah. Pengujian tersebut disebut "pengujian lelah" (fatigue tests) sedang kurva yang sesuai disebut diagram *S-N* (stress-number atau tegangan-jumlah). Seperti dapat dilihat dari Gambar 1-15, pada tegangan yang lebih kecil bahan tersebut dapat bertahan terhadap bertambahnya jumlah siklus pemakaian beban. Untuk beberapa bahan, apalagi baja, kurva *S-N* tersebut pada dasarnya horisontal untuk tegangan rendah. Ini berarti bahwa pada tegangan rendah suatu penegangan bolak-balik dalam jumlah yang tidak berhingga terjadi sebelum benda tersebut pecah. Keterbatasan tegangan waktu terjadinya hal ini disebut *batas ketahanan* (endurance limit) dari bahan. Batasan ini, yang tergantung pada tegangan, diukur dalam satuan newton per meter kuadrat, yaitu dalam MPa.

Perhatian harus diberikan dalam menanggapi diagram *S-N*, khususnya mengenai daerah tegangan terpakai. Pada beberapa pengujian dilakukan tegangan bolak-balik yang lengkap (tarik dan tekan); yang lainnya adalah membuat pembebanan terpakai berubah-ubah dalam cara yang berbeda, seperti dari pembebanan tarik kepada tidak ada pembebanan dan kembali kepada tarik kembali. Sebagian besar dari pengujian pematahan yang dilakukan pada contoh adalah pelenturan.

\* Zambrow, J.L., dan Fontana, M.G., "Mechanical Properties, including Fatigue, of Aircraft Alloys at Very Low Temperatures," *Trans. ASM*, 1949, vol. 41, hal. 498.



Pada beberapa kasus ada hal lain yang memerlukan perhatian. Seperti bahan yang sedang diproduksi, mereka sering dirol, dipencet dan dipalu. Pada pengecoran, bahan-bahan akan mendingin secara tidak merata. Proses ini menyebabkan tegangan dalam yang tinggi yang disebut *tegangan residu* (residual stresses). Pada kasus-kasus yang disajikan dalam buku ini bahan-bahan tersebut dianggap seluruhnya bebas dari tegangan-tegangan yang demikian.

Fakta-fakta yang dikemukakan di atas, ditambah dengan kemustahilan menerangkan tegangan secara teliti dalam bangunan dan mesin yang rumit, mengharuskan pengurangan besar tegangan dibandingkan terhadap kekuatan ultimat bahan di dalam suatu pengujian statis. Misalnya, baja biasa akan menahan suatu tegangan ultimat dari tarikan 400 MPa atau lebih. Bagaimana pun, ia berdeformasi agak secara tiba-tiba dan sama sekali pada tingkat tegangan sekitar 250 MPa, sedang tegangan ijin sekitar 150 MPa digunakan untuk pekerjaan bangunan. Tegangan ijin ini selanjutnya berkurang kira-kira 80 MPa untuk bagian-bagian yang diberi pembebanan bolak-balik yang disebabkan oleh karakteristik lelah (fatigue) dari bahan tersebut. *Sifat-sifat lelah (fatigue) dari bahan-bahan adalah penting sekali dalam perlengkapan mekanis.* Banyak kegagalan bagian-bagian mesin yang bila dicari penyebabnya berhubungan dengan mengabaikan pandangan yang penting ini. (Lihat juga Pasal 2-11).

Perusahaan-perusahaan besar, seperti juga penguasa-penguasa kota dan negara, menetapkan atau menyarankan\* tegangan-tegangan ijin untuk bahan-bahan yang berbeda, tergantung dari pemakaian. Sering tegangan demikian disebut *tegangan karet*.†

Karena menurut Persamaan 1-1, tegangan dikalikan luas sama dengan gaya, maka tegangan ijin dan tegangan ultimat dapat diubah dalam bentuk gaya atau beban yang diijinkan dan ultimat yang dapat ditahan oleh sebuah batang. Suatu perbandingan (ratio) yang penting dapat dibuat :

$$\frac{\text{beban ultimat suatu batang}}{\text{beban ijin suatu batang}}$$

Perbandingan ini disebut *faktor keamanan* (factor of safety) dan harus selalu lebih besar dari satu. Meskipun tidak biasa dipakai, mungkin sebutan yang paling baik untuk perbandingan ini adalah *faktor ketidak-tahuan* (factor of ignorance).

Faktor ini identik dengan perbandingan antara tegangan ultimat dengan tegangan ijin batang tarik. Untuk batang-batang dengan tegangan yang lebih rumit, definisi yang lama dapat kita sertakan, meskipun yang kita gunakan sebenarnya adalah perbandingan tegangan. Dari pembahasan yang berikut akan jelas terlihat bahwa keduanya tidaklah sinonim karena tegangan tidak selalu berbanding linier dengan beban.

\* Misalnya, lihatlah *Manual American Institute of Steel Construction, Building Construction Code of any large city, ANC-5 Strength of Aircraft Elements* yang diterbitkan oleh Komite Sipil Angkatan Darat-Laut tentang Kriteria Desain Pesawat Terbang, dan seterusnya.

† Kata sifat *fiber* (karet) dalam pengertian di atas dipakai untuk dua alasan. Banyak eksperimen yang asli terbuat dari kayu yang memiliki karakteristik karet. Juga pada beberapa perincian yang menyusul, konsep suatu filamen dan karet yang kontinu, dalam sebuah bagian struktur merupakan sebuah alat yang lebih baik untuk memvisualisasikan tindakannya.

Pada industri pesawat terbang, istilah faktor keamanan digantikan oleh yang lain yang didefinisikan sebagai

$$\frac{\text{beban ultimat}}{\text{beban disain}} - 1$$

dan dinamakan sebagai *batas keamanan* (margin of safety). Pada penggunaan yang normal, ini kembali pula kepada

$$\frac{\text{beban ultimat}}{\text{tegangan maksimum akibat beban disain}} - 1$$

Suatu pendekatan yang lain ialah menentukan beban\* runtuh ultimat sebuah bangunan kemudian membagi dengan *faktor beban* (load factor) yang dipilih sesuai untuk mendapatkan beban ijin atau beban kerja. Sebaliknya, bila beban kerja telah ditentukan, maka bagian-bagian struktur berpotongan sedemikian rupa hingga beban ultimat bangunan sama dengan perkalian beban kerja dengan faktor beban. Dua konsep disain tegangan ijin dan disain beban ultimat memberikan hasil yang sama untuk sebuah batang tarik atau tekan yang sederhana ataupun untuk struktur yang lebih rumit di mana kegagalan dapat didefinisikan dengan suatu kriteria kekenyalan. Tetapi disain yang sangat berlainan dapat diperoleh dalam banyak kasus di mana sifat bahan yang bukan kenyal ikut diperhitungkan sedang kriteria kegagalan merupakan deformasi plastis yang berlebihan.

## 1-8 DISAIN BATANG DENGAN BEBAN AKSIAL DAN PASAK

Disain batang-batang untuk gaya aksial adalah agak sederhana. Dari Persamaan 1-1 luas yang dibutuhkan sebuah batang adalah

$$A = \frac{P}{\sigma_{\text{ijin}}} \quad (1-1a)$$

Dalam semua soal statis tertentu gaya aksial  $P$  ditentukan dari statika sedang penggunaan yang dikehendaki dari bahan tersebut menentukan tegangan ijin. Untuk batang tarik, luas  $A$  yang dihitung adalah luas penampang total batang yang diperlukan. Untuk blok tekan yang pendek, Persamaan 1-1a dapat pula digunakan, tetapi *untuk batang-batang yang ramping, usaha untuk menggunakan persamaan di atas tidak dapat dilakukan sebelum pembahasan tentang kolom (Bab. 13).*

Kesederhanaan Persamaan 1-1a tidak ada hubungannya dengan kepentingannya. Sejumlah besar soal-soal yang memerlukan penggunaannya banyak terjadi dalam praktek. Soal-soal berikut menggambarkan beberapa penggunaan Persamaan 1-1a serta juga untuk memperoleh tinjauan tambahan dalam statika.

\* Lihat Pasal 12-10 untuk perincian lebih lanjut.

**CONTOH 1-4**

Perkecil ukuran batang  $AB$  dalam Contoh 1-3 dengan menggunakan bahan yang lebih baik seperti baja chroma-vanadium. Tegangan ultimat dari baja ini kira-kira 825 MPa. Gunakanlah faktor keamanan  $2\frac{1}{2}$ .

**PENYELESAIAN**

$\sigma_{ijin} = 825/2,5 = 330$  MPa. Dari Contoh 1-3 gaya dalam batang  $AB$ :  $F_A = +11,2$  kN. Luas yang dibutuhkan:  $A_{net} = (11,2)/(330.000) = 0,000034 \text{ m}^2 = 34 \text{ mm}^2$ . Ambillah: panjang dan lebar batang sebagai  $6 \text{ mm} \times 6 \text{ mm}$ . Luas yang diperoleh adalah  $6 \times 6 = 36 \text{ mm}^2$ , hingga sedikit melebihi luas yang diperlukan di atas. Banyak ukuran-ukuran lain dari batang yang dapat kita ambil untuk contoh ini.

Dengan dipilihnya luas penampang tersebut, maka tegangan sesungguhnya atau tegangan kerja berada di bawah tegangan ijin:  $\sigma_{aktual} = (11,2)/(36 \times 10^{-6}) = 311$  MPa. Faktor keamanan aktual adalah  $825/(311) = 2,65$  dan batas keamanan aktual adalah 1,65.

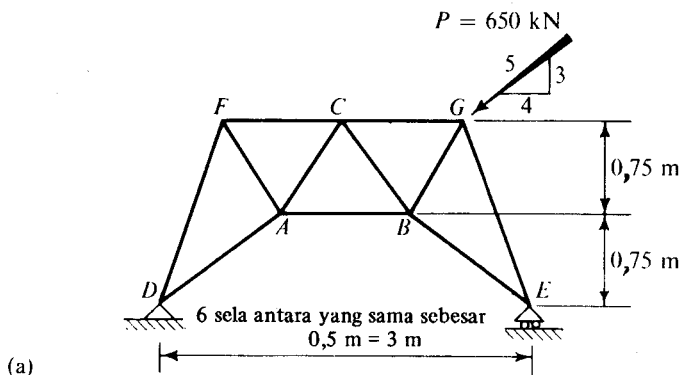
Dalam merancang kembali secara lengkap, maka engsel dan pasak harus pula ditinjau kembali dan bila perlu, diperkecil ukurannya.

**CONTOH 1-5**

Pilihlah batang-batang  $FC$  dan  $CB$  dari kerangka dalam Gambar 1-16(a) untuk memuat gaya miring  $P$  dari 650 kN. Ambillah tegangan tarik ijin pada  $140.000 \text{ kN/m}^2$ .

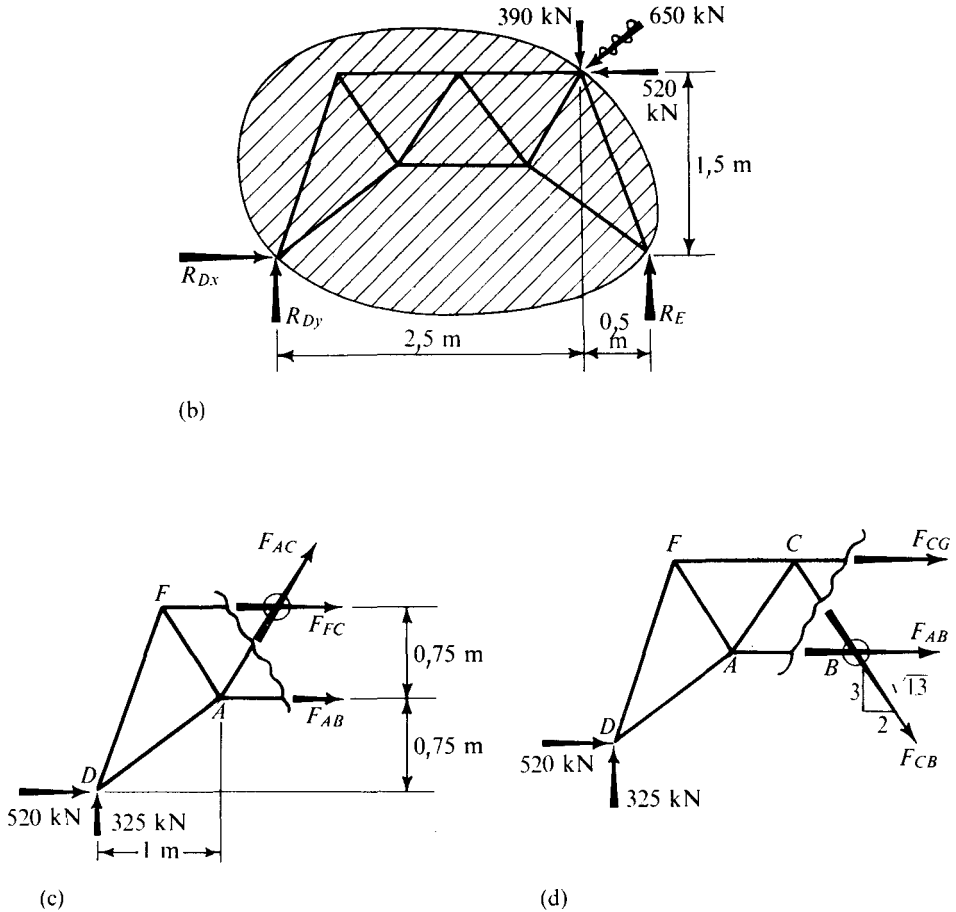
**PENYELESAIAN**

Apabila semua bagian struktur kerangka akan didisain, maka gaya-gaya dalam semua bagian struktur haruslah dihitung. Dalam praktek ini dapat dilakukan dengan mengerjakan program-program komputer yang dikembangkan berdasarkan analisis struktural matrik\* atau menganalisa langsung kerangka tersebut dengan metoda sambungan (method of joints). Tetapi bila hanya beberapa bagian struktur yang didisain atau diperiksa kembali, metoda irisan yang dilukiskan di sini akan lebih cepat penyelesaiannya.



\* Sebagai contoh, lihat J.M. Gere, dan W. Weaver, Jr., *Analysis of Framed Structures*, New York: Van Nostrand Reinhold, 1965. Lihat pula J.L. Meek, *Matrix Structural Analysis*, New York: McGraw-Hill, 1971.





Gambar 1-16

Umumnya kita memahami bahwa kerangka planar yang diperlihatkan dalam gambar adalah stabil menurut arah tegaklurus pada bidang kertas. Secara praktek ini diselesaikan dengan memberikan penguat dengan sudut  $90^\circ$  terhadap bidang kerangka. Pada contoh ini kita kesampingkan disain batang tekan, hal ini akan kita kerjakan dalam Bab 13 mengenai kolom.

Untuk menentukan gaya-gaya dari bagian-bagian struktur yang akan didisain kembali, pertama-tama kita akan menghitung reaksi-reaksi seluruh struktur. Ini dilakukan dengan mengabaikan kerangka interior. Hanya komponen-komponen reaksi dan gaya yang terletak pada titik tangkapnya yang diperlihatkan dalam diagram benda bebas seluruh struktur, Gambar 1-16(b). Setelah reaksi ditentukan, maka diagram-diagram benda bebas batang dipergunakan untuk menentukan gaya-gaya pada batang yang sedang ditinjau, yaitu Gambar-gambar 1-16(c) dan (d).

Dengan menggunakan benda bebas dalam Gambar 1-16(b) :

$$\sum F_x = 0 \quad R_{Dx} - 520 = 0, \quad R_{Dx} = 520 \text{ kN}$$

$$\sum M_E = 0 \quad \circlearrowleft +, \quad + R_{Dy}(3) - 390(0,5) - 520(1,5) = 0$$

$$R_{Dy} = 325 \text{ kN}$$

$$\sum M_D = 0 \quad \circlearrowleft +, \quad + R_E(3) + 520(1,5) - 390(2,5) = 0$$

$$R_E = 65 \text{ kN}$$

$$\text{Periksa: } \sum F_y = 0, \quad + 325 - 390 + 65 = 0$$

Dengan menggunakan benda bebas pada Gambar 1-16(c):

$$\sum M_A = 0 \quad \circlearrowleft +, \quad + F_{FC}(0,75) + 325(1) - 520(0,75) = 0$$

$$F_{FC} = +86,7 \text{ kN}$$

$$A_{FC} = F_{FC}/\sigma_{\text{ijin}} = 86,7/(140\,000) = 0,000\,620 \text{ m}^2 = 620 \text{ mm}^2$$

(pakai batang 12,5 mm x 50 mm)

Dengan menggunakan benda bebas pada Gambar 1-16(d) :

$$\sum F_y = 0, \quad - (F_{CB})_y + 325 = 0, \quad (F_{CB})_y = +325 \text{ kN}$$

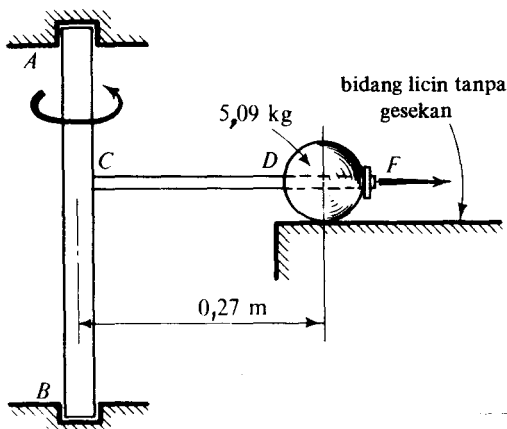
$$F_{CB} = \sqrt{13}(F_{CB})_y/3 = +391 \text{ kN}$$

$$A_{CB} = F_{CB}/\sigma_{\text{ijin}} = 391/(140\,000) = 0,002\,790 \text{ m}^2 = 2790 \text{ mm}^2$$

(pakai dua batang 30 mm x 50 mm)

#### CONTOH 1-6

Tinjaulah sistem dinamis ideal yang terlihat dalam Gambar 1-17. Poros  $AB$  berputar dengan frekuensi konstan 10 Hz.\* Sebuah batang ringan  $CD$  dipasang pada poros ini pada titik  $C$ , dan pada ujung batang ini diikatkan massa dari 5,09 kg. Dalam melukiskan suatu lingkaran yang lengkap, berat pada  $D$  berputar "tanpa gesekan" di atas bidang



Gambar 1-17

\* Hz (singkatan untuk hertz) atau siklus per detik merupakan satuan SI untuk frekuensi.

datar. Pilihlah ukuran batang  $CD$  sedemikian rupa hingga tegangan di dalamnya tidak melebihi  $70.000 \text{ kN/m}^2$ . Dalam perhitungan, berat batang diabaikan.

#### PENYELESAIAN

Percepatan gravitasi  $g$  adalah  $9,81 \text{ m/det}^2$ . Kecepatan sudut  $\omega$  adalah  $20\pi$  radian\* per detik. Untuk gerakan yang diberikan massa  $m$  dipercepat terhadap pusat rotasi dengan percepatan  $\omega^2 R$ , di mana  $R$  adalah jarak  $CD$ . Dengan mengalikan percepatan  $a$  ini dengan massa  $m$  dari benda, maka diperoleh gaya  $F$ . Gaya ini bekerja dengan arah yang berlawanan dengan percepatan tersebut (azas d'Alembert) lihat Gambar 1-17.

$$F = ma = m\omega^2 R = (5,09)(20\pi)^2(0,27) = 5430 \text{ N} = 5,43 \text{ kN}$$

$$A_{\text{netto}} = \frac{F}{\sigma_{\text{ijin}}} = \frac{5,43}{70\,000} = 0,000\,077 \text{ m}^2 = 77 \text{ mm}^2$$

Suatu batang bulat 10 mm memberikan luas penampang yang dibutuhkan tersebut. Tambahan tarikan pada  $C$  yang disebabkan oleh massa batang yang tidak ditinjau di atas, adalah

$$F_1 = \int_0^R (m_1 dr) \omega^2 r$$

di mana  $m_1$  adalah massa batang per satuan panjang dan  $(m_1 dr)$  adalah masa yang kecil takberhingga pada jarak variabel  $r$  dari batang vertikal  $AB$ . Tarikan total pada  $C$  yang disebabkan oleh batang dan massa  $m$  pada ujung tersebut adalah  $F + F_1$ .

### 1-9 PENDEKATAN DASAR (BASIC APPROACH)

Metoda penyelesaian soal-soal mekanika bahan mengikuti jalur yang benar-benar sama. Sekarang dengan memandang keseluruhan subyek ini, akan kita uraikan prosedur yang khas. Prosedur ini telah kita pergunakan, dan pembaca akan mengenal metoda pendekatan yang sama dalam soal-soal lain yang berikut. Pada suatu saat prosedur ini menjadi kabur oleh langkah-langkah antara yang kita lakukan, tetapi pada analisis akhir ia selalu dapat dipergunakan.

1. Dari susunan bagian-bagian tertentu, suatu batang tunggal kita isolasikan. Batang itu diperlihatkan dalam diagram dengan semua gaya dan reaksi yang bekerja padanya. *Ini merupakan sebuah diagram benda bebas dari seluruh batang.*
2. Reaksi-reaksi ditentukan dengan pemakaian persamaan-persamaan statika. Pada soal-soal lanjutan, statika dilengkapi dengan tinjauan-tinjauan tambahan.

\*  $2\pi$  radian sama dengan satu siklus atau satu putaran penuh dari poros.



3. Pada titik di mana besar tegangan dikehendaki, kita buat sebuah irisan yang *tegak-lurus* pada sumbu benda sedang sebuah bagian benda pada salah satu sisi dari irisan *dipisahkan* sama sekali.
4. Pada irisan yang diselidiki, kita tentukan sistem gaya-gaya dalam yang perlu untuk menjaga bagian yang diisolasi dari bagian struktur tersebut berada dalam *ke-seimbangannya*. Pada umumnya, sistem gaya ini terdiri dari gaya aksial, geser, momen lentur, dan puntiran.\* Kuantitas-kuantitas ini diperoleh dengan memper-lakukan *bagian* dari struktur tersebut sebagai benda bebas.
5. Dengan sistem gaya-gaya pada irisan tersebut yang *diuraikan secara baik*, rumus-rumus mekanika bahan membuat kita dapat menentukan tegangan pada irisan yang ditinjau.
6. Bila besar (magnitudo) tegangan maksimum sebuah irisan diketahui, kita dapat menyediakan bahan yang sesuai untuk irisan demikian, atau sebaliknya, bila sifat-sifat fisis dari suatu bahan diketahui, kita dapat memilih sebuah batang dengan ukuran yang memadai.
7. Pada soal-soal tertentu yang lain, pembahasan selanjutnya mengenai batang pada sebuah irisan memungkinkan kita untuk meramalkan deformasi bangunan secara keseluruhan dan karenanya, bila perlu mendisain bagian-bagian struktur yang tidak beralih atau melentur secara berlebihan.

Sangat sedikit rumus-rumus dasar yang digunakan dalam mekanika bahan. Ini dapat dipelajari dengan mempergunakannya berulang-ulang. *Namun, visualisasi dari ujud kuantitas yang sedang dihitung adalah perlu.* Diagram-diagram benda bebas sangat menolong visualisasi tersebut.

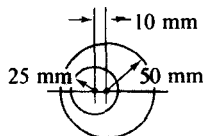
#### SOAL-SOAL UNTUK DISELESAIKAN

1-1. Bila gaya tarik aksial dari 500 kN dikerjakan pada sebuah batang yang terbuat dari irisan W 200 × 46, berapakah tegangan tariknya? Berapa tegangannya bila anggota tersebut adalah irisan C 310 × 30,8? Untuk desain dan luas penampang batang ini lihatlah tabel-tabel 4 dan 5 dari Lampiran.

1-2. Tinjaulah kembali data-data pada Contoh 1-1 untuk pembacaan yang berikut: jarak *BC* adalah 2 m, jarak *CE* 4 m, tebal dinding sandaran pada *C* adalah 0,20 m, berat yang diangkat 8 kN, ukuran kayu sesungguhnya adalah 0,25 m × 0,35 m, baut-baut berdiameter 18 mm dan luas penampang pada kaki ulir baut adalah 154 mm<sup>2</sup>. Hitunglah besaran-besaran

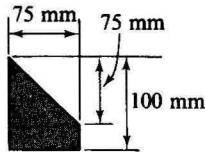
yang sama seperti yang dikerjakan dalam contoh di atas. *Jawab:*  $\sigma_{\max} = 51,9 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_b = 480 \text{ kPa}$ .

1-3 dan 1-4. Bagian-bagian bangunan besi cor yang pendek mempunyai ukuran penampang seperti yang terlihat dalam gambar. Bila mereka diberikan gaya-gaya aksial tekan masing-masing sebesar 45 kN, tentukanlah titik tangkap gaya-gaya ini hingga tidak mengakibatkan lenturan, dan tentukan pula tegangan normal. Semua ukuran dalam mm.



GAMBAR  
SOAL 1 – 3

\* Pengertian yang lengkap mengenai istilah-istilah ini akan memperlihatkan hasilnya hanya setelah mempelajari Bab-bab 3 dan 4.



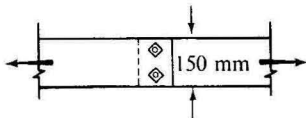
GAMBAR SOAL 1 – 4

1-5. Sebuah roda gigi yang meneruskan suatu momen puntir sebesar 450 N-m kepada sebuah poros dari 50 mm dikunci kepadanya seperti yang terlihat dalam gambar. Kunci berpenampang 12 mm persegi dan panjangnya 50 mm. Tentukan tegangan geser kunci. *Jawab.* 30 MN/m<sup>2</sup>.



GAMBAR SOAL 1 – 5

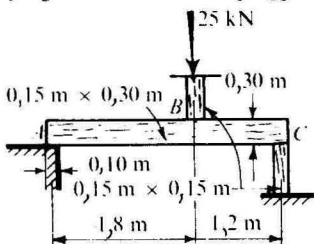
1-6. Dua pelat baja dengan tebal 10 mm disambung satu sama lain, seperti yang terlihat dalam gambar, dengan dua baut 20 mm yang terpasang erat ke dalam dua buah lubang. Bila sambungan tersebut meneruskan gaya tarik 45 kN, tentukanlah (a) tegangan normal rata-rata dari pelat pada irisan di mana tidak terdapat lobang; (b) tegangan normal rata-rata pada irisan kritis; (c) tegangan geser rata-rata pada baut-baut; dan (d) tegangan dukung rata-rata antara baut dan pelat.



GAMBAR SOAL 1 – 6

1-7. Pada Contoh 1-2, hitung tegangan pada tingkat 0,5 m di atas alas. Perhatikanlah hasil tersebut pada sebuah elemen kecil tidak berhingga.

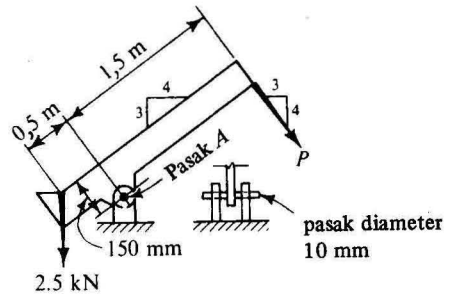
1-8. Tentukanlah tegangan-tegangan dukung yang disebabkan oleh penggunaan gaya pada



GAMBAR  
SOAL 1 – 8

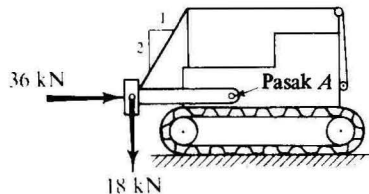
*A, B dan C dari bangunan yang terlihat pada gambar. Jawab.*  $\sigma_A = -667$  kPa,  $\sigma_B = -1100$  kPa.

1-9. Suatu mekanisme luas yang dipergunakan untuk mengangkat panel sebuah jembatan militer portabel, diperlihatkan pada gambar. Hitunglah tegangan geser pada pasak *A* yang disebabkan oleh beban dari 2,5 kN. *Jawab.* 20,3 MPa.



GAMBAR SOAL 1 – 9

1-10. Hitunglah tegangan geser pada pasak *A* dari bulldozer bila gaya total yang bekerja pada bilah penebas (blade) seperti yang terlihat dalam gambar. Perhatikanlah bahwa pada tiap sisi bulldozer terdapat pasak berdiameter 40 mm. Tiap pasak mempunyai geseran tunggal. *Jawab.*  $\tau = 17,9$  MPa.



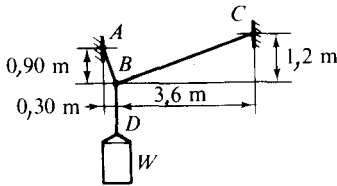
GAMBAR SOAL 1 – 10

1-11. Sebuah batang baja berdiameter 20 mm dibebani dalam geseran ganda hingga mencapai kegagalan; beban ultimat yang diperoleh adalah sebesar 450 kN. Bila tegangan ijin didasarkan pada faktor keamanan 4, berapakah diameter pasak yang didisain untuk beban ijin sebesar 25 kN di bawah geseran tunggal?

1-12. Sebuah tonggak kayu 150 mm x 150 mm memberikan gaya 50 kN kepada telapak beton, seperti yang terlihat dalam Gambar 1-6(a).

kepada beton. (b) Bila tekanan ijin pada tanah adalah  $100 \text{ kN/m}^2$ , tentukanlah dalam pandangan denah ukuran-ukuran yang diperlukan dari sebuah telapak bujursangkar. Abaikanlah berat landasan tersebut.

1-13. Suatu susunan tiga buah batang dipergunakan untuk menggantung massa dari  $5000 \text{ kg}$  seperti yang terlihat dalam gambar. Batang-batang  $AB$  dan  $BD$  berdiameter  $20 \text{ mm}$  sedang batang  $BC$  berdiameter  $13 \text{ mm}$ . Hitunglah tegangan dalam batang-batang tersebut. *Jawab.*  $\sigma_{AB} = 148 \text{ MPa}$ .



GAMBAR SOAL 1 – 13

1-14. Sebuah batang dengan penampang yang bervariasi yang dipasang tetap pada salah satu ujung mendapat tiga gaya aksial seperti yang terlihat pada gambar. Tentukanlah tegangan normal maksimum. *Jawab.*  $160 \text{ MPa}$ .

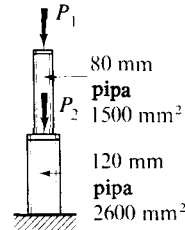


GAMBAR SOAL 1 – 14

1-15. Kerjakanlah kembali soal yang terdahulu dengan mengandaikan bahwa gaya ujung (aksial), yang sebagai pengganti  $180 \text{ kN}$  dibuat sedemikian rupa hingga mengakibatkan tegangan normal maksimum yang sama dalam kedua ukuran penampang batang. Gaya-gaya aksial  $90 \text{ kN}$  dan  $310 \text{ kN}$  tetap dipergunakan sedang tegangan normal maksimum untuk bagian yang lebih kecil dari batang didapat dari salah satu kedua gaya ini, atau lebih dekat kepada ujung yang bebas. Selidikilah kedua keadaan tersebut. *Jawab.*  $203 \text{ kN}$ .

1-16. Sebuah kolom pendek terbuat dari dua pipa baja, satu berada di atas yang lainnya terlihat pada gambar. Bila tegangan desak ijin adalah  $100 \text{ MN/m}^2$ , (a) berapakah besar beban

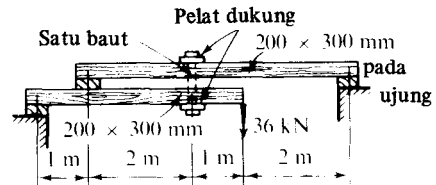
aksial ijin  $P_1$  bila beban aksial  $P_2 = 200 \text{ kN}$ ; (b) berapakah besar beban aksial ijin  $P_1$  bila beban  $P_2 = 80 \text{ kN}$ ? Abaikanlah berat pipa-pipa tersebut.



GAMBAR SOAL 1 – 16

1-17. Kerjakanlah kembali soal di atas, dengan pengandaian bahwa arah gaya  $P_1$  dibalikkan, yaitu  $P_1$  menjadi gaya tarik. Anggaplah bahwa tegangan tarik ijin adalah juga  $100 \text{ MN/m}^2$ .

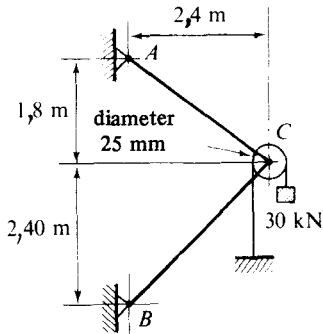
1-18. Untuk struktur yang diperlihatkan dalam gambar, hitunglah ukuran dari baut dan luas pelat-pelat dukung yang dibutuhkan bila tegangan-tegangan ijin adalah  $125 \text{ MPa}$  dalam tarikan dan  $3,5 \text{ MPa}$  dalam dukungan. Abaikanlah berat balok-balok tersebut.



GAMBAR SOAL 1 – 18

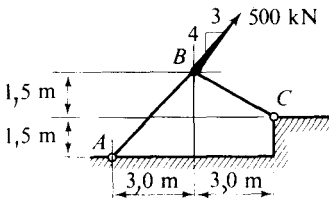
1-19. Kerjakanlah kembali Contoh 1-5 setelah merubah kembali data-data sebagai berikut: tinggi total kerangka adalah  $2,5 \text{ m}$ , lebar total adalah  $5 \text{ m}$ , gaya terpakai  $P$  adalah  $600 \text{ kN}$ . Ambillah tegangan tarik ijin sebesar  $140 \text{ MPa}$ .

1-20. Suatu berat  $30 \text{ kN}$  yang digantung melalui sebuah katrol terlihat pada gambar. Katrol ini tergantung pula pada kerangka  $ABC$ . Hitunglah luas penampang yang diperlukan untuk batang  $AC$  dan  $BC$  bila tegangan tarik ijin adalah  $140.000 \text{ kN/m}^2$  dan tegangan tekan ijin ditentukan dengan metoda pada Bab. 13 yaitu  $96000 \text{ kN/m}^2$ . *Jawab.*  $306 \text{ mm}^2$ .



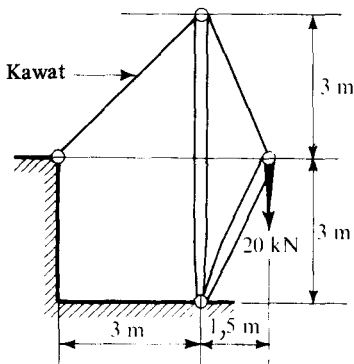
GAMBAR SOAL 1 – 20

1-21. Suatu gaya 500 kN diberikan pada sambungan  $B$  dari suatu sistem dua batang yang disambung memakai pasak seperti yang terlihat dalam gambar. Tentukanlah luas penampang yang dibutuhkan dari batang  $BC$  bila tegangan ijin adalah 100 MPa dalam tarik dan 70 MPa dalam tekan.



GAMBAR SOAL 1 – 21

1-22. Hitunglah tegangan dalam tiang derek yang terlihat pada gambar. Semua batang terletak dalam bidang vertikal yang sama dan disambung oleh pasak-pasak. Tiang tersebut ter-

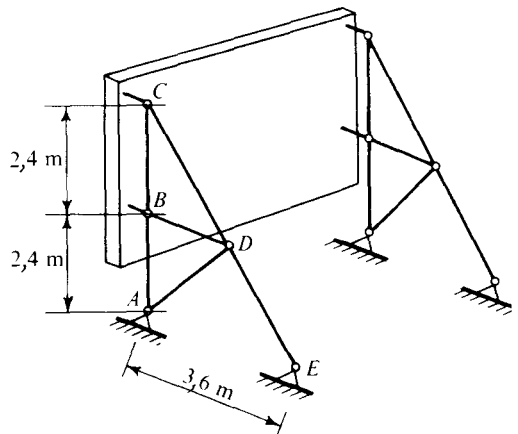


GAMBAR SOAL 1 – 22

buat dari sebuah pipa baja 200 mm yang luasnya 6000 mm<sup>2</sup>. Abaikanlah berat dari bagian-bagian bangunan tersebut.

1-23. Hitunglah luas penampang yang dibutuhkan untuk semua batang tarik dalam Contoh 1-5. Tegangan ijin adalah 140000 kN/m<sup>2</sup> = 140 MPa.

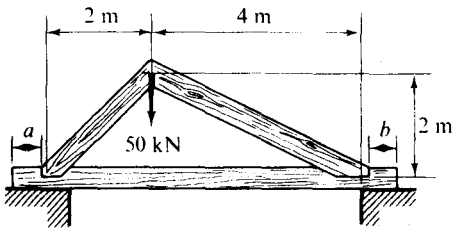
124. Sebuah papan tanda dengan luas 4,5 m × 6,0 m ditumpu oleh dua kerangka seperti yang terlihat dalam gambar. Semua bagian struktur berpenampang 50 mm × 100 mm. Hitunglah tegangan pada tiap batang yang disebabkan oleh beban angin mendatar sebesar 960 N/m<sup>2</sup> terhadap papan tanda. Anggaplah semua sambungan dihubungkan dengan pasak sedang seperempat gaya angin total bekerja pada  $B$  dan  $C$ . Abaikanlah kemungkinan penekukan batang tekan. Abaikanlah pula berat dari struktur tersebut. Jawab.  $\sigma_{AD} = 1,08$  MPa.



GAMBAR SOAL 1 – 24

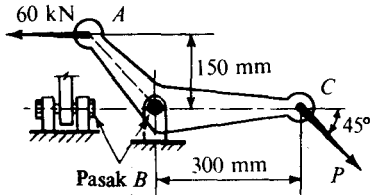
1-25. Berapakah jarak  $a$  dan  $b$  yang dibutuhkan di bawah takik dalam bagian kerangka horizontal yang terlihat dalam gambar? Semua bagian struktur mempunyai penampang 0,20 m × 0,20 m. Anggaplah kekuatan ultimat kayu yang dipotong sejajar dengan uratnya adalah 3500 kN/m<sup>2</sup>. Penggunaan faktor keamanan 5. (Perincian ini tidak dianjurkan menggunakannya).





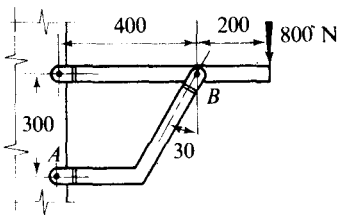
GAMBAR SOAL 1 – 25

1-26. Berapakah diameter pasak  $B$  yang dibutuhkan untuk mekanisme engkol lonceng yang terlihat dalam gambar bila suatu gaya terpakai sebesar 60 kN pada  $A$  ditahan oleh suatu gaya  $P$  pada  $C$ ? Tegangan geser ijin adalah 100 MPa. Jawab. 23,2 mm.



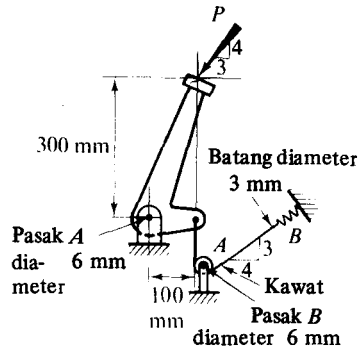
GAMBAR SOAL 1 – 26

1-27. Berapakah tegangan geser dalam baut  $A$  yang disebabkan oleh pemberian beban seperti yang terlihat dalam gambar? Diameter baut tersebut 6 mm dan baut tersebut bekerja dalam geseran ganda. Semua ukuran dalam mm.



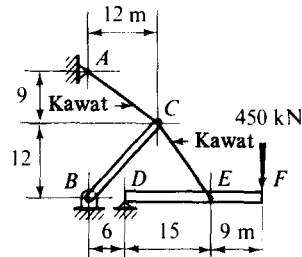
GAMBAR SOAL 1 – 27

1-28. Sebuah pedal kendali untuk menggerakkan suatu mekanisme pegas diperlihatkan dalam gambar. Hitunglah tegangan geser dalam pasak-pasak  $A$  dan  $B$  yang disebabkan oleh gaya  $P$  bila ia mengakibatkan tegangan sebesar 70 MPa pada batang  $AB$ . Kedua pasak dalam geseran ganda.



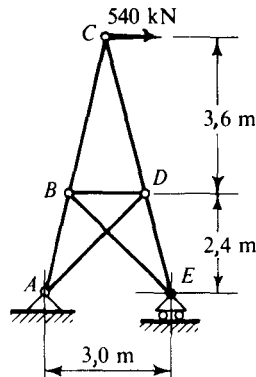
GAMBAR SOAL 1 – 28

1-29. Sebuah balok dengan gaya 450 kN pada satu ujungnya diikat oleh kabel penyokong seperti yang terlihat dalam gambar. Hitunglah komponen-komponen horizontal dan vertikal dari reaksi-reaksi pada  $A$ ,  $B$  dan  $D$ . Bila tegangan tarik ijin adalah 140 MPa dan tegangan desak ijin adalah 70 MPa, berapakah luas penampang yang diperlukan untuk batang  $AC$ ,  $BC$  dan  $CE$ ? (Petunjuk: Pertama-tama pisahkan dahulu balok  $DF$ ).



GAMBAR SOAL 1 – 29

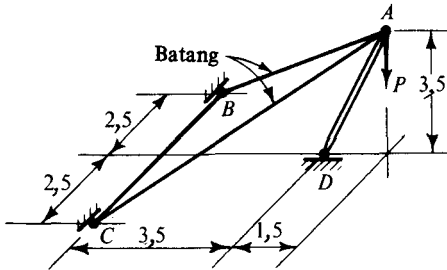
1-30. Sebuah menara untuk jaringan tegangan tinggi diperlihatkan pada gambar. Bila menara



GAMBAR  
SOAL 1 – 30

itu dihadapkan kepada suatu gaya mendatar sebesar 540 kN sedang tegangan tekan ijin adalah 100 MPa dan tegangan tarik ijin adalah 140 MPa, berapakah luas penampang yang dibutuhkan untuk tiap struktur? Semua bagian struktur tersebut dihubungkan oleh pasak. Semua ukuran dalam meter. *Jawab.*  $A_{AD} = 3640 \text{ mm}^2$ .

1-31. Untuk menumpu sebuah beban,  $P = 180 \text{ kN}$ , tentukanlah diameter yang diperlukan untuk batang-batang  $AB$  dan  $AC$  dari tripod yang terlihat dalam gambar. Abaikan berat struktur tersebut dan anggaplah bahwa sambungan-sambungan dihubungi oleh pasak. Tidak ada kelonggaran yang dibuat untuk ulir. Tegangan tarik ijin adalah 125 MPa. Semua ukuran dalam meter.

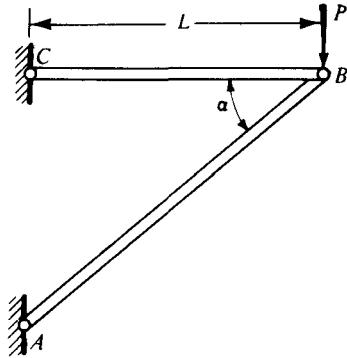


GAMBAR SOAL 1 – 31

1-32. Sebuah massa 5 kg bergerak menurut lingkaran yang mendatar pada ujung sebuah kawat 1,5 m dengan kecepatan sudut sedemikian rupa hingga kawat membuat sudut  $30^\circ$  dengan garis vertikal. Berapa diameter yang sesuai untuk kawat tersebut bila tegangan tarik ijin untuk baja berkekuatan tinggi adalah 300 MPa?

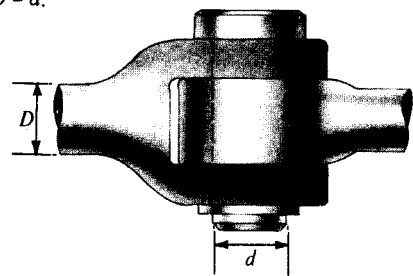
1-33. Sebuah kerangka sambungan pasak untuk menyokong suatu gaya  $P$  terlihat pada gambar. Tegangan  $\sigma$  pada kedua bagian  $AB$  dan  $BC$  ha-

ruslah sama. Tentukanlah sudut  $\alpha$  yang diperlukan untuk mencapai berat konstruksi yang minimum. Bagian-bagian  $AB$  dan  $BC$  mempunyai penampang yang tetap. *Jawab.*  $\cos^2 \alpha = \frac{1}{3}$  atau  $\alpha \approx 55^\circ$ .



GAMBAR SOAL 1 – 33

1-34. Suatu sambungan untuk meneruskan suatu gaya tarik haruslah dibuat dengan sebuah pasak seperti yang terlihat dalam gambar. Bila diameter batang yang dihubungkan tersebut adalah  $D$ , berapakah seharusnya diameter  $d$  dari pasak tersebut? Anggaplah bahwa tegangan geser ijin pada pasak adalah setengah tegangan tarik maksimum pada batang. (Pada Pasal 9-18 akan diperlihatkan bahwa perbandingan ini untuk tegangan-tegangan ijin adalah pengendalian yang ulung untuk banyak bahan). *Jawab.*  $D = d$ .



GAMBAR SOAL 1 – 34



# 2 Regangan — Hukum Hooke — Masalah-masalah Beban Aksial

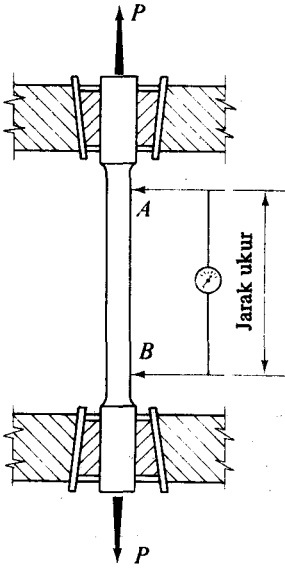
## 2-1 PENDAHULUAN

Bab ini akan kita sediakan untuk pemeriksaan lebih lanjut beberapa sifat fisis dari bahan-bahan bangunan. Suatu penyelidikan mengenai hakekat deformasi yang timbul dalam benda yang mengalami tegangan akan merupakan tujuan utama kita. Deformasi ini akan berhubungan sekali dengan besaran tegangan yang menyebabkannya. Juga beberapa batasan-batasan tambahan yang harus dimasukkan ke dalam Persamaan-persamaan 1-1 dan 1-2 dari bab yang di depan harus pula kita jelaskan.

## 2-2 REGANGAN (STRAIN)

Pada Pasal 1-7, dinyatakan bahwa keterangan yang menyangkut sifat-sifat sisi dari bahan-bahan diambil dari laboratorium. Pada pengujian tarik biasa tertentu, tidak hanya kekuatan ultimat (ultimate strength), tetapi juga sifat-sifat lain biasanya diamati pula, khususnya mengenai pembahasan deformasi sebagai fungsi dari gaya terpakai. Jadi, di samping suatu spesimen dihadapkan kepada gaya menaik  $P$ , seperti terlihat dalam Gambar 2-1, kita amati pula suatu perubahan panjang antara dua buah titik  $A$  dan  $B$  pada spesimen tersebut. Pada permulaannya, dua buah titik dipilih pada jarak yang ditentukan antara keduanya. Jadi tergantung kepada pengujian, apakah suatu jarak 50 mm ataupun 200 mm yang disukai. Jarak awal antara kedua titik ini kita sebut *jarak ukur* (gage distance).<sup>\*</sup> Dalam eksperimen yang kita perhatikan adalah perubahan panjang dari jarak ini. Dengan beban yang sama dan suatu jarak ukur yang lebih panjang, suatu deformasi yang lebih besar dapat kita amati, atau sebaliknya. Karena itu adalah

<sup>\*</sup> Sekarang alat-alat ukur regangan tahanan listrik yang dipasang langsung pada spesimen dipakai secara luas. Pengukur panjang alat tersebut bervariasi luasnya dari 4 mm sampai 150 mm tergantung pada pemakaian. Lihatlah Pasal 8-13 untuk perincian lanjutan.

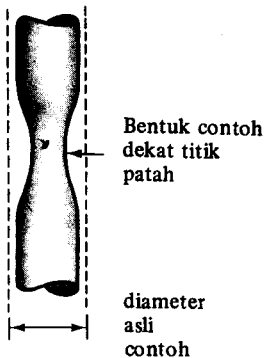


Gambar 2-1 Diagram percobaan tarik pada mesin uji.

lebih mendasar untuk memperhatikan *perpanjangan per satuan alat ukur tersebut*. Bila  $\Delta$  adalah perpanjangan total pada panjang ukur awal  $L$  yang ditinjau, maka perpanjangan per satuan panjang  $\epsilon$  (epsilon) adalah

$$\epsilon = \frac{\Delta}{L} \quad (2-1)$$

Perpanjangan per satuan panjang ini disebut sebagai *regangan* (strain).<sup>\*</sup> Ia adalah besaran yang tidak berdimensi, tetapi adalah lebih baik kita memberinya memiliki dimensi meter per meter atau m/m. Kadang-kadang regangan diberikan dalam bentuk prosen. Besaran regangan  $\epsilon$  *sangat kecil*, kecuali untuk beberapa bahan seperti karet. Bila regangan tersebut diketahui, maka deformasi total dari pembebanan aksial adalah  $\epsilon L$ .



Gambar 2-2 Jenis penyusutan contoh baja lunak dekat titik patah

<sup>\*</sup> Kadang-kadang dipergunakan pula istilah *satuan regangan*.

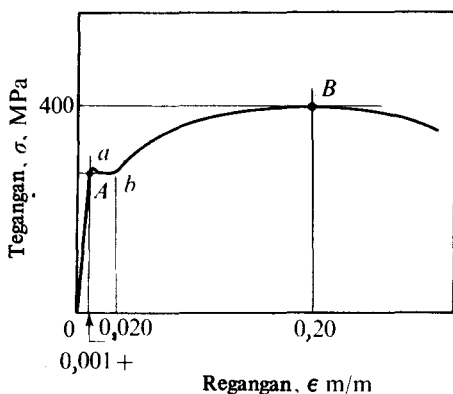


Hubungan ini berlaku untuk setiap panjang ukur sampai beberapa deformasi lokal mengambil bagian pada skala yang cukup besar. Efek yang belakangan, menunjukkan sifat batang baja lunak dekat titik patah, seperti yang terlihat dalam Gambar 2-2. Gejala ini ditunjukkan sebagai "kegentingan" pada batang baja tersebut. Bahan-bahan yang rapuh tidak mengalami hal ini pada suhu yang biasa, meskipun mereka juga menyusut sedikit secara melintang pada uji tarik dan memuai pada uji tekan.

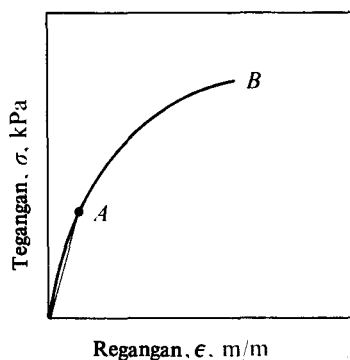
### 2-3 DIAGRAM TEGANGAN-REGANGAN

Dari pembahasan ini jelaslah bahwa untuk manfaat yang lebih umum adalah tepat sekali menyatakan deformasi suatu batang tarik atau desak dalam bentuk-bentuk regangan. Begitu pula, tegangan merupakan parameter yang lebih berarti daripada gaya dalam mempelajari bahan, karena efek gaya terpakai  $P$  pada suatu bahan terutama tergantung kepada luas penampang dari bagian struktur. Sebagai akibatnya, adalah biasa menggambarkan diagram hubungan antara *tegangan* dan *regangan* dalam laporan pengujian tertentu. Diagram-diagram demikian menentukan hubungan antara tegangan dan regangan, dan untuk berbagai macam kegunaan dianggap tidak tergantung dari ukuran spesimen dan panjang ukurannya. Untuk *diagram-diagram tegangan regangan* ini, biasa pula digunakan skala ordinat untuk tegangan dan skala absis untuk regangan. Tegangan biasa dihitung berdasarkan *luas asli* dari contoh, meskipun sebagaimana disebutkan sebelumnya penyusutan dan pemuian dari bahan selalu terjadi setiap saat. Bila tegangan dihitung dengan membagi gaya terpakai dengan luas bersangkutan yang *sesungguhnya* dari contoh pada saat yang sama, maka kita memperoleh apa yang disebut *tegangan sejati* (true stress). Plot tegangan sejati terhadap regangan disebut diagram tegangan-regangan *sejati*. Diagram-diagram seperti itu jarang digunakan dalam praktek.

Secara eksperimen diterangkan bahwa diagram tegangan-regangan sangat berbeda untuk bahan-bahan yang berbeda. Untuk bahan yang sama diagram ini berbeda pula, tergantung pada suhu pengujian yang dilakukan, kecepatan pengujian dan beberapa variabel lainnya.\* Tetapi, umumnya ada dua jenis diagram yang dikenal. Yang satu jenis



Gambar 2-3 Diagram tegangan-regangan untuk baja lunak



Gambar 2-4 Diagram tegangan-regangan untuk bahan rapuh.

\* Untuk yang lebih terperinci, lihatlah Davis, H.E., G.E. Troxell, dan C.T. Wiskocil, *Testing and Inspection of Engineering Materials* (2nd ed). New York: McGraw-Hill, 1955.

dapat dilihat dalam Gambar 2-3, untuk baja tuang, bahan *liat* yang banyak digunakan dalam konstruksi. Jenis yang lainnya diperlihatkan dalam Gambar 2-4. Berbagai macam bahan seperti baja perkakas, beton, tembaga, dan seterusnya mempunyai kurva jenis ini, meskipun harga ekstrim dari regangan di mana-mana bahan-bahan ini dapat bertahan, *berbeda-beda secara tajam*. "Kecuraman" dari kurva-kurva ini sangat berbeda-beda. Berbicara secara numerik, masing-masing bahan mempunyai kurva sendiri-sendiri. Titik batas akhir dari diagram tegangan-regangan menyatakan kegagalan penuh (pecah) dari spesimen. Bahan-bahan yang sanggup menahan regangan yang besar termasuk sebagai *bahan-bahan yang liat*. Kebalikannya, adalah *bahan-bahan rapuh*.

## 2-4 HUKUM HOOKE

Untungnya, satu keistimewaan dari diagram-diagram tegangan-regangan adalah mereka dapat dipergunakan dengan cukup teliti pada hampir semua bahan. Kenyataannya, untuk *jarak tertentu* dari titik asal, harga-harga eksperimental dari tegangan vs regangan pada dasarnya terletak pada satu garis lurus. Hal ini benar, hampir tanpa syarat untuk gelas. Ini juga benar untuk baja lunak sampai titik tertentu, seperti *A* pada Gambar 2-3. Ia hampir benar pula sampai mendekati titik keagalannya untuk banyak baja paduan derajat tinggi. Di pihak lain, bagian yang lurus dari kurva sukar didapat pada beton, tembaga lunak, atau besi cor. Namun, untuk segala macam kegunaan, sampai mencapai titik seperti *A* (juga pada Gambar 2-4), *hubungan antara tegangan dan regangan boleh dikatakan berbentuk linier untuk semua bahan*. Hal ini menuju kepada idealisasi dan penyamarataan (generalisasi) yang berlaku untuk semua bahan, yang dikenal sebagai *hukum Hooke*.<sup>\*</sup> Dalam bentuk lambang, hukum ini dinyatakan oleh persamaan

$$\sigma = E\epsilon \quad \text{atau} \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad (2-2)$$

yang secara mudah berarti bahwa tegangan berbanding lurus dengan regangan, di mana tetapan pembanding adalah *E*. Tetapan *E* ini disebut *modulus elastis* (elastic modulus), modulus elastisitas atau modulus young.<sup>†</sup> Berhubung  $\epsilon$  adalah tidak berdimensi, maka dari Persamaan (2-2) di atas, *E* mempunyai satuan tegangan. Dalam satuan SI, *E* diukur dalam newton per meter kuadrat (atau Pascal).

Secara grafis *E* ditafsirkan sebagai kemiringan (slope) dari garis lurus yang ditarik dari titik asal ke arah sekitar titik *A* pada diagram tegangan-regangan. Tegangan yang didapat pada titik *A* tersebut dinamakan *batas proporsional* (proportional limit) dari bahan tersebut. Secara fisis modulus elastis menyatakan kekakuan terhadap beban yang diberikan kepada bahan. *Nilai modulus elastis merupakan suatu sifat yang pasti dari suatu bahan*. Dalam eksperimen nilai  $\epsilon$  selalu merupakan bilangan yang sangat kecil,

<sup>\*</sup> Sebenarnya, Robert Hooke, seorang ilmuwan Inggris, bekerja dengan pegas dan tidak dengan batang. Pada 1676 ia mengajukan sebuah anagram "ceiiinossttuv", di mana dalam bahasa latin adalah *Ut Tensio sic Vis* (gaya berubah-ubah terhadap rentangan).

<sup>†</sup> Penyebutan modulus Young diberikan sebagai penghormatan kepada Thomas Young, seorang ilmuwan bangsa Inggris. Karyanya *Lectures on Natural Philosophy*, diterbitkan pada 1807, berisi sebuah definisi dari modulus kekenyalan.

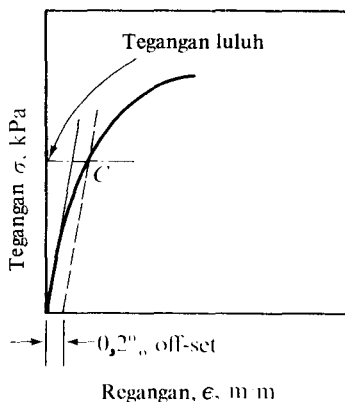
karenanya  $E$  haruslah mempunyai harga yang besar. Harga-harga pendekatan dari  $E$  ini untuk beberapa bahan disajikan pada Tabel 1 dari Lampiran. Untuk kebanyakan baja,  $E$  berharga antara  $200$  dan  $210 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ .

Pembahasan di atas menerangkan bahwa *Hukum Hooke hanya berlaku sampai kepada batas proporsional dari bahan*. Hal ini sangat penting artinya karena pada kebanyakan tugas yang berikut rumus turunan yang dipergunakan berasal dari hukum ini. Akan menjadi jelas kemudian, bahwa rumus-rumus demikian akan terbatas berlaku untuk sifat bahan pada daerah tegangan yang lebih rendah.

Beberapa bahan, khususnya kristal-kristal tunggal, memiliki modulus elastis yang berbeda menurut arah yang berbeda tergantung kepada bidang kristalografik yang dipunyai. Bahan-bahan demikian yang mempunyai sifat fisis yang berbeda untuk arah yang berbeda, disebut bukan isotropik. Peninjauan mengenai bahan-bahan demikian tidak dibicarakan dalam buku ini. Sangat banyak bahan-bahan teknik yang terdiri dari kristal-kristal yang berarah serampangan. Disebabkan oleh simpang siurnya arah kristal ini, maka sifat-sifat bahan menjadi benar-benar serupa untuk semua arah.\* Bahan seperti ini disebut *isotropik*. Dalam seluruh buku ini bahan-bahan kita anggap memiliki keserbasamaan yang sempurna dan isotropis.

## 2-5 CATATAN LANJUT MENGENAI DIAGRAM TEGANGAN-REGANGAN

Sebagai tambahan terhadap batas proporsional yang didefinisikan pada Pasal 2-4, beberapa hal penting lainnya dapat pula diamati pada diagram tegangan-regangan. Umpamanya, titik paling tinggi pada diagram ( $B$  pada Gambar-gambar 2-3 dan 2-4) menunjukkan kekuatan *ultimat* dari bahan. *Tegangan* yang ditunjukkan oleh garis datar (plateau)  $ab$  yang sangat panjang pada Gambar 2-3 dinamakan *titik luluh* (yield point) sebuah bahan. Seperti akan diperlihatkan kemudian, sifat yang luar biasa dari baja lunak ini, sebagaimana biasanya dengan bahan-bahan liat (ductile) lainnya, merupakan arti yang penting untuk analisis tegangan. Untuk yang sekarang ini, perlu diketahui bahwa pada tegangan yang boleh dikatakan konstan, tegangan tersebut dapat meregang 15 sampai 20 kali daripada yang terdapat sebelum mencapai batas proporsional selama



Gambar 2-5

Metoda ofset untuk menentukan titik luluh bahan

\* Pengerjaan rol menghasilkan orientasi butir kristal yang istimewa dari beberapa bahan.

Dalam buku ini Titik Luluh sama dengan Titik Leleh atau disebut juga Yield Point

bahan berproduksi. Pada titik luluh banyak sekali deformasi terjadi pada tegangan yang konstan. Gejala lumer tidak terdapat pada kebanyakan bahan, khususnya pada bahan-bahan yang rapuh.

Suatu penelitian tentang diagram tegangan-regangan memperlihatkan bahwa titik luluh adalah sangat dekat dengan batas proporsional hingga untuk manfaat yang banyak keduanya dapat dianggap sebagai satu titik. Tetapi sangat mudah bagi kita untuk menentukan letak titik yang pertama. Untuk bahan-bahan yang tidak memiliki titik luluh yang tidak dapat ditentukan secara baik, maka salah satu diantaranya diperoleh dengan menggunakan apa yang disebut "metoda ofset". Hal ini dilukiskan dalam Gambar 2-5 di mana suatu garis ditarik *sejajar dan berjarak* kira-kira 0,2% regangan dengan bagian garis lurus dari diagram tegangan-regangan semula.\* Kemudian titik *C* diambil sebagai *titik luluh* dari bahan tersebut pada ofset 0,2%.

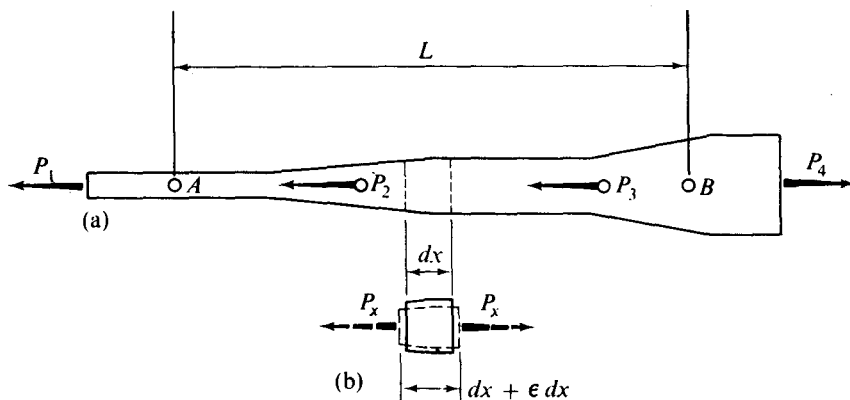
Akhirnya, kita haruslah menciptakan definisi teknis dari elastisitas (elasticity) suatu bahan. Dalam penggunaan yang demikian ini berarti bahwa suatu bahan mampu mendapatkan *secara lengkap* ukuran aslinya setelah gaya terpakai dihilangkan. Pada awal pembebanan, bila gaya yang kecil dikenakan pada sebuah benda, benda tersebut akan berdeformasi sedikit. Bila gaya tersebut dilepaskan, benda tersebut akan kembali mencapai ukuran dan bentuk semula. Dengan meningkatkan besar gaya, keadaan tersebut akan berlaku terus di mana bahan bersifat elastis. Tetapi, akhirnya tercapai suatu tegangan yang menyebabkan terjadinya deformasi yang permanen atau set dalam bahan tersebut. Tingkat tegangan yang sesuai dengan keadaan tersebut dinamakan *batas elastis* (elastic limit) dari bahan. Dalam bahasa praktis, *batas elastis* tersebut berdekatan dengan batas proporsional dari bahan.

Untuk sebagian besar bahan, diagram tegangan regangan yang diperoleh untuk blok desakan yang pendek, tidak jauh berbeda dengan yang didapatkan pada jenisnya yang tarikan, tetapi ada beberapa pengecualian yang penting. Umpamanya, besi cor dan beton, adalah lemah sekali dalam tarikan, tetapi tidak demikian dalam desakan. Untuk bahan-bahan ini, diagram-diagram tarik dan tekan sungguh berbeda, tergantung kepada keadaan gaya terpakai.

## 2-6 DEFLEKSI BATANG BEBAN AKSIAL

Persamaan-persamaan 1-1, 2-1 dan 2-2, serta pengetahuan mengenai modulus elastis dari bahan tertentu, sudah cukup untuk menentukan deformasi dari batang-batang yang dibebani secara aksial. Tetapi, perhitungan-perhitungan yang biasa *hanya berlaku dalam daerah elastis dari sifat bahan*, sejauh hukum Hooke (Persamaan 2-2) dapat dipergunakan. Dalam merumuskan masalah ini dalam bentuk yang umum, tinjaulah batang yang dibebani *secara aksial* yang diperlihatkan dalam Gambar 2-6(a). Pada batang ini, luas penampang berubah-ubah di seluruh panjangnya, sedang gaya dalam berbagai besaran bekerja pada beberapa titik. Nah sekarang anggaplah bahwa pada soal ini kita akan mencari perubahan panjang batang *antara dua titik A dan B* yang disebabkan oleh gaya terpakai. Besaran yang kita kehendaki merupakan jumlah (atau akumulasi) dari deformasi

\* Untuk pembebanan yang menurun diagram tegangan-regangan yang sejajar dengan bagian garis yang lurus dari diagram tegangan-regangan asal. Untuk perincian lebih lanjut lihatlah Gambar 15-2 dan uraian yang menyertainya.



Gambar 2-6

yang terjadi dalam panjang yang kecil takberhingga dari batang tersebut. Jadi bila sejumlah deformasi yang terjadi pada sebuah elemen tertentu dengan panjang  $dx$  dirumuskan terlebih dahulu, maka jumlah atau integral dari efek ini terhadap panjang yang diketahui akan memberikan besaran yang kita cari.

Suatu elemen tertentu yang dipotong dari batang diperlihatkan dalam Gambar 2-6(b). Dari tinjauan benda bebas, elemen ini diberi suatu gaya tarik  $P_x$  yang pada umumnya merupakan besaran variabel. Deformasi yang kecil takberhingga sebesar  $d\Delta$  terjadi pada elemen ini setelah pemakaian gaya yang sama dengan regangan  $\epsilon$  dikalikan dengan panjang  $dx$ . Dari Persamaan 2-2, regangan sama dengan tegangan  $\sigma_x$  dibagi dengan modulus elastis  $E$ . Tetapi umumnya  $\sigma_x$  adalah besaran variabel yang diperoleh dengan membagi gaya variabel  $P_x$  dengan luas yang *bersangkutan*  $A_x$ . Jadi, karena  $\epsilon = \sigma_x/E$  dan  $\sigma_x = P_x/A_x$ , maka

$$d\Delta = \epsilon dx = \frac{\sigma_x}{E} dx = \frac{P_x dx}{A_x E}$$

Karena sumbangan masing-masing elemen telah kita ketahui sekarang, maka deformasi total antara dua buah titik yang diketahui pada sebuah batang dapat menyederhanakan,\* jumlah tersebut sebagai,

$$\Delta = \int_A^B d\Delta = \int_A^B \frac{P_x dx}{A_x E} \quad (2-3)$$

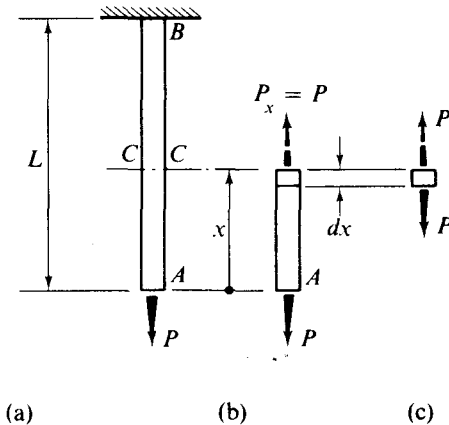
Ada tiga buah contoh yang akan kita pecahkan sekarang untuk memperlihatkan penggunaan persamaan-persamaan di atas.

\* Batas-batas integrasi yang terlihat pada persamaan di atas menunjukkan daerah integrasi. Sebenarnya, batas integrasi tersebut harus dinyatakan dalam bentuk nilai variabel. Penggunaan yang luwes dari batas-batas daerah tersebut kadang-kadang akan dilakukan dalam buku ini.



**CONTOH 2-1**

Tinjaulah batang  $AB$  dengan luas penampang  $A$  yang tetap dan panjang  $L$  seperti yang terlihat dalam Gambar 2-7(a). Tentukanlah pergeseran relatif ujung  $A$  terhadap  $B$  bila suatu gaya  $P$  dikerjakan, yaitu hitunglah *defleksi* dari ujung bebas yang disebabkan oleh pemakaian gaya  $P$ . Modulus elastis dari bahan adalah  $E$ .



Gambar 2-7

**PENYELESAIAN**

Pada soal ini, batang tersebut dapat diperlakukan sebagai tidak memiliki berat, *hingga hanya efek gaya  $P$  terhadap defleksi yang akan diselidiki*. Jadi titik ada masalah untuk membuat irisan  $C-C$  pada batang tersebut, dan  $P_x = P$ , seperti dapat dilihat pada Gambar 2-7(b). Elemen-elemen kecil takberhingga. Gambar 2-7(c), di mana-mana adalah sama, mendapatkan gaya tarik *konstan*  $P$ . Demikian pula,  $A_x$ , di mana-mana mempunyai nilai yang tetap, yaitu  $A$ . Dengan mempergunakan Persamaan 2-3,

$$\Delta = \int_A^B \frac{P_x dx}{A_x E} = \frac{P}{AE} \int_0^L dx = \frac{P}{AE} \left| x \right|_0^L = \frac{PL}{AE} \quad (2-4)$$

Dari Persamaan 2-4 dapat dilihat bahwa defleksi batang tersebut berbanding langsung dengan gaya yang diberikan beserta panjangnya, serta berbanding terbalik dengan  $A$  dan  $E$ .

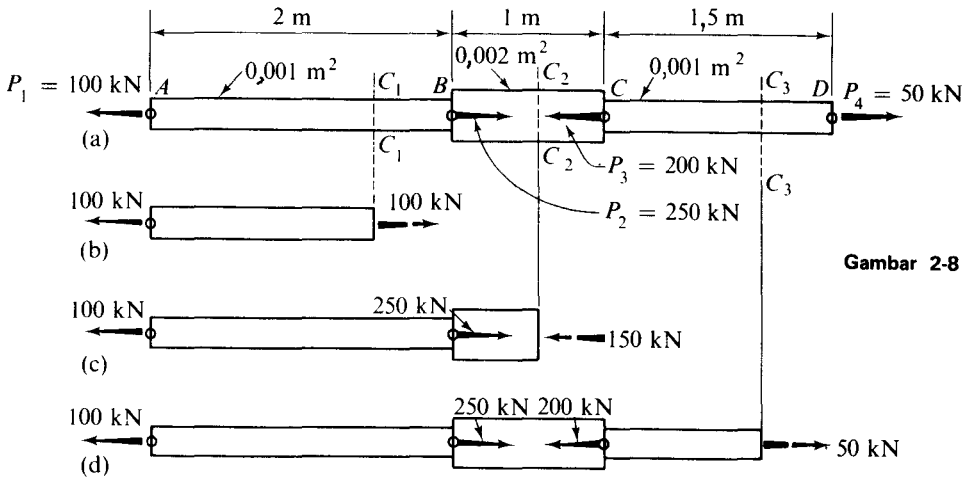
Persamaan ini akan dipergunakan untuk pekerjaan yang berikut.

**CONTOH 2-2**

Tentukanlah pergeseran relatif (relative displacement) dari titik-titik  $A$  dan  $D$  pada batang baja yang luas penampangnya *bervariasi* seperti yang terlihat dalam Gambar 2-8(a) bila ia diberikan empat gaya terpusat  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  dan  $P_4$ . Ambillah  $E = 200 \times 10^6$  kN/m<sup>2</sup>.

**PENYELESAIAN**

Dalam menghadapi suatu persoalan, suatu pemeriksaan harus dilakukan lebih dahulu untuk memastikan bahwa benda tersebut secara keseluruhan berada dalam keseimbangan.



Gambar 2-8

an, yaitu  $\Sigma F_x = 0$ . Dengan pemeriksaan ini dapat dilihat bahwa soal tersebut termasuk ke dalam kasus yang sedang kita bahas. Berikutnya, variasi gaya  $P_x$  disepanjang batang tersebut harus pula diselidiki. Hal ini dapat dilakukan dengan baik dengan bantuan sketsa seperti yang terlihat dalam Gambar-gambar 2-8(b), (c) dan (d) yang memperlihatkan bahwa *tidak menjadi soal di mana* irisan  $C_1-C_1$  diambil antara titik-titik  $A$  dan  $B$ , maka gaya dalam batang adalah  $P_x = +100$  kN. Demikian pula antara  $B$  dan  $C$ ,  $P_x = -150$  kN, dan antara  $C$  dan  $D$ ,  $P_x = +50$  kN. Variasi luas penampang  $A_x$  dapat dilihat dalam Gambar 2-8(a). Secara matematis, kedua besaran  $P_x$  dan  $A_x$  bukanlah fungsi-fungsi yang kontinu di sepanjang batang tersebut. Nilai kedua besaran tersebut seakan melompat atau *berubah* secara tiba-tiba pada titik-titik tertentu. Karenanya dalam melakukan integrasi, batas-batas integrasi tersebut haruslah dipecah-pecah. Jadi, Persamaan 2-3 menjadi

$$\Delta = \int_A^D \frac{P_x dx}{A_x E} = \int_A^B \frac{P_{AB} dx}{A_{AB} E} + \int_B^C \frac{P_{BC} dx}{A_{BC} E} + \int_C^D \frac{P_{CD} dx}{A_{CD} E}$$

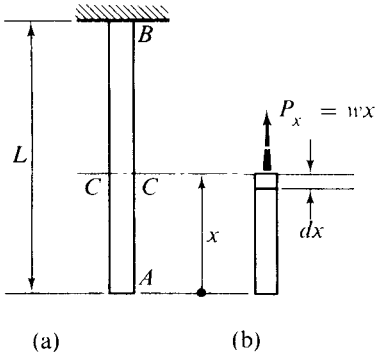
Pada masing-masing tiga integral terakhir dari persamaan di atas harga-harga  $P_x$  dan  $A_x$  yang bersangkutan adalah konstan antara batas-batas yang diperlihatkannya. Tanda-tanda huruf pada  $P$  dan  $A$  menunjukkan daerah keberlakuan fungsi tersebut; jadi  $P_{AB}$  hanya berlaku dalam selang  $AB$ , dan seterusnya. Integral-integral ini dikembalikan kepada penyelesaian contoh yang sebelumnya, yaitu Persamaan 2-4. Dengan menggunakan persamaan ini dan memasukkan harga-harga numerik dari contoh yang sekarang, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum \frac{PL}{AE} = + \frac{(100)(2)}{(0,001)(200 \times 10^6)} - \frac{(150)(1)}{(0,002)(200 \times 10^6)} \\ &\quad + \frac{(50)(1,5)}{(0,001)(200 \times 10^6)} \\ &= +0,001 - 0,000375 + 0,000375 = 0,001 \text{ m} = +1 \text{ mm} \end{aligned}$$

Pekerjaan yang dilakukan ini memberi arti bahwa masing-masing deformasi dari ketiga batang yang "telah dipisahkan" di atas, dapat dijumlahkan atau superposisi. Masing-masing "batang" yang terpisah tersebut memperoleh gaya yang konstan. Tanda positif dari harga  $\Delta$  di atas menunjukkan bahwa batang tersebut *memuai*, sebagai akibat pemilihan tanda positif untuk gaya-gaya tarik. Kesamaan harga-harga mutlak deformasi sepanjang  $BC$  dan  $CD$  pada persamaan di atas adalah secara kebetulan. Perlu pula diperhatikan bahwa ditinjau dari relatif besarnya tegangan yang ada pada batang, maka harga  $\Delta$  tersebut di atas adalah kecil.

### CONTOH 2-3

Hitung defleksi dari ujung bebas batang yang mempunyai luas penampang  $A$  yang konstan, yang disebabkan oleh berat batang itu sendiri serta beban yang terbentuk dari  $w$  N/m, Gambar 2-9.



Gambar 2-9

### PENYELESAIAN

Persamaan 2-3 harus dipergunakan kembali di sini, tetapi dalam keadaan di mana  $P_x$  adalah besaran variabel. Besaran  $P_x$  ini lebih baik dinyatakan sebagai  $w x$  yang bertitik tangkap pada jarak  $x$  dari titik  $A$  yang diambil sebagai titik asalnya. Jadi

$$\Delta = \int_A^B \frac{P_x dx}{A_x E} = \frac{1}{AE} \int_0^L w x dx = \frac{w}{AE} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^L = \frac{(wL)L}{2AE} = \frac{WL}{2AE}$$

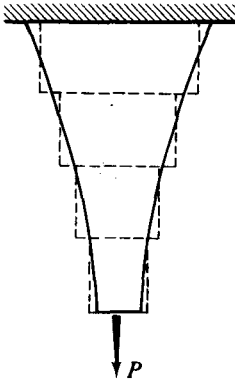
di mana  $wL$  adalah gaya gravitasi *total* yang dikembangkan oleh batang tersebut, yang dilambangkan oleh huruf besar  $W$ . Bandingkanlah jawaban di atas dengan Persamaan 2-4.

Bila suatu gaya terpusat  $P$ , sebagai *tambahan* kepada berat batang itu sendiri, bekerja terhadap batang  $AB$  pada ujungnya  $A$ , maka defleksi total yang disebabkan oleh keduanya akan diperoleh dengan *superposisi* (penjumlahan langsung) sebagai berikut

$$\Delta = \frac{PL}{AE} + \frac{WL}{2AE} = \frac{[P + (W/2)]L}{AE}$$

Pada soal-soal di mana luas suatu batang adalah variabel, maka suatu *fungsi* yang sesuai untuk itu harus disubstitusikan ke dalam Persamaan 2-3 untuk menentukan

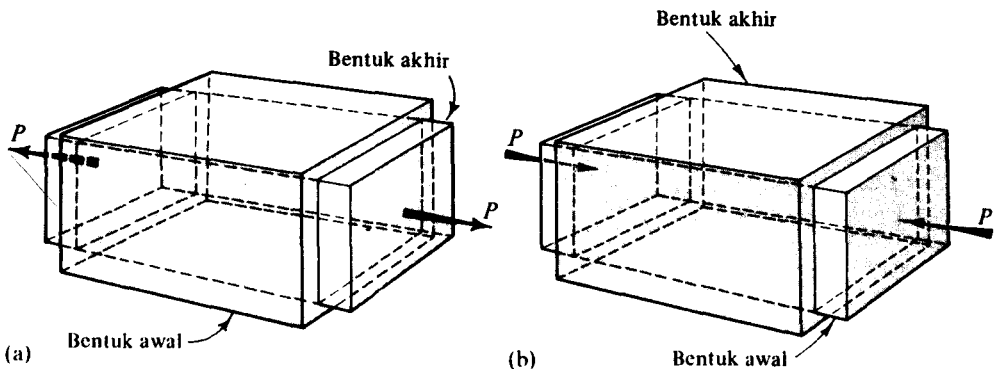
lendutannya. Dalam praktek, adalah cukup teliti bila membahas soal-soal yang seperti ini dengan melakukan pendekatan bentuk dari sebuah batang *menjadi* sejumlah tertentu elemen-elemen seperti yang diperlihatkan oleh Gambar 2-10. Lendutan masing-masing elemen ini dapat dijumlahkan untuk mendapatkan lenturan total dari batang tersebut.



Gambar 2-10

## 2-7 PERBANDINGAN POISSON

Di samping deformasi bahan yang searah dengan gaya terpakai, sifat penting lainnya yang dapat diamati pada semua bahan padat adalah deformasi yang arahnya tegak lurus pada gaya terpakai, yaitu pemuaian dan penyusutan yang lateral atau melintang. Gejala ini dilukiskan dalam Gambar 2-11(a) dan (b) di mana deformasi *diperlihatkan secara berlebihan* dibandingkan dengan yang sesungguhnya. Untuk jelasnya kenyataan fisis ini menyatakan demikian, bila suatu benda padat dihadapkan kepada suatu gaya tarik aksial maka benda itu akan menyusut secara lateral; sedang sebaliknya, benda itu akan memuai ke samping bila mendapat gaya tekan. Dengan ini arah deformasi lateral dengan mudah dapat ditentukan, tergantung dari guna gaya terpakai. Secara matematis, tanda plus biasanya menunjukkan *pertambahan* dimensi lateral dan demikian pula sebaliknya.



Gambar 2-11 Penyusutan dan pemuaian lateral dari benda-benda padat yang mengalami gaya-gaya aksial (efek Poisson).

Untuk suatu teori umum, adalah lebih baik menggunakan deformasi lateral dengan dasar deformasi per *satuan* panjang dari pada dimensi lintang. Jadi deformasi lateral dengan basis *relatif* ini dapat dinyatakan dalam meter per meter. Deformasi lateral dalam satuan relatif ini disebut *regangan lateral* (lateral strain). Selanjutnya, dari eksperimen diketahui bahwa regangan lateral mendukung suatu hubungan yang *konstan* dengan regangan membujur atau aksial yang disebabkan oleh gaya aksial, selama bahan tetap *elastis*, homogen dan isotropik. Konstanta ini merupakan sifat tertentu dari suatu bahan, seperti modulus elastis  $E$ , dan disebut *perbandingan Poisson*.<sup>\*</sup> Ini ditunjukkan sebagai  $\nu$  (nu) dan didefinisikan sebagai berikut :

$$\nu = \left| \frac{\text{regangan lateral}}{\text{regangan aksial}} \right| = - \frac{\text{regangan lateral}}{\text{regangan aksial}} \quad (2-5)$$

di mana regangan tersebut disebabkan hanya oleh tegangan uniaksial saja. Ruas ketiga dari persamaan di atas sebagai alternatif bentuk ruas kedua, adalah betul karena untuk tegangan uniaksial, regangan-regangan lateral dan aksial selalu berlawanan tanda, hingga harga  $\nu$  selalu positif. Harga  $\nu$  tersebut berubah-ubah untuk bahan-bahan yang berbeda tetapi dalam daerah yang relatif sempit. Pada umumnya harga-harga tersebut berkisar antara 0,25 dan 0,35. Pada keadaan yang ekstrimnya harga tersebut ada yang serendah 0,1 (beberapa jenis beton) dan yang tinggi sebesar 0,5 (karet). Yang terakhir ini adalah harga yang terbesar yang mungkin, yang biasanya dicapai oleh bahan selama aliran plastis dan menandakan volume yang tetap.<sup>†</sup> Dalam pelajaran ini, perbandingan Poisson akan dipergunakan hanya bila bahan bersifat kenyal.

Sebagai kesimpulan, efek Poisson yang dialami oleh bahan *tidak akan memberikan tambahan tegangan* lain daripada yang telah ditinjau semula *kecuali bila deformasi melintang dihalangi atau dicegah*. Hal yang sama ditemui pula pada pemuaian dan penyusutan termis dari bahan. Pokok persoalan ini akan dibicarakan pada bab mengenai bangunan-bangunan statis tak tentu.

#### CONTOH 2-4

Tinjaulah suatu pengujian yang dilakukan secara hati-hati di mana sebuah batang aluminium berdiameter 50 mm diberi tegangan di dalam sebuah mesin penguji seperti yang terlihat dalam Gambar 2-12. Pada suatu saat tertentu, dengan gaya terpakai  $P$  sebesar 100 kN, batang tersebut memuai sepanjang 0,219 mm untuk panjang ukur 300 mm dan diameternya menyusut dengan 0,01215 mm. Hitunglah kedua tetapan fisis  $\nu$  dan  $E$  dari bahan tersebut.

#### PENYELESAIAN

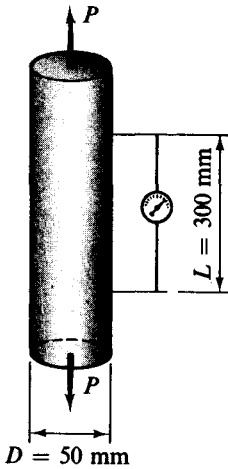
*Regangan lintang atau lateral*

$$\epsilon_t = \frac{\Delta_t}{D} = \frac{0,000\ 012\ 15}{0,050} = - 0,000\ 243 \text{ m/m.}$$

<sup>\*</sup> Dinamakan menurut S. D. Poisson, ilmuwan Perancis yang merumuskan konsep ini pada tahun 1828.

<sup>†</sup> Lihat A. Nadai, *Theory of Flow and Fracture of Solids*, vol. 1., New York: McGraw-Hill, 1950.





Gambar 2-12

Dalam hal ini regangan lateral  $\epsilon_t$  adalah negatif, karena diameter batang tersebut mengecil dengan  $\Delta_t$ .

Regangan aksial adalah:

$$\epsilon_a = \frac{\Delta}{L} = \frac{0,000\ 219}{0,3} = 0,000\ 73\ \text{m/m}.$$

Perbandingan Poisson menjadi:

$$\nu = -\frac{\epsilon_t}{\epsilon_a} = -\frac{(-0,000\ 243)}{0,000\ 73} = 0,333$$

Selanjutnya, berhubung luas penampang batang  $A = \frac{1}{4}\pi(0,050)^2 = 1,96 \times 10^{-3}\ \text{m}^2$ , maka dari Persamaan 2-4 diperoleh,

$$E = \frac{PL}{A\Delta} = \frac{(100)(0,3)}{1,96 \times 10^{-3}(0,000\ 219)} = 70 \times 10^6\ \text{kN/m}^2$$

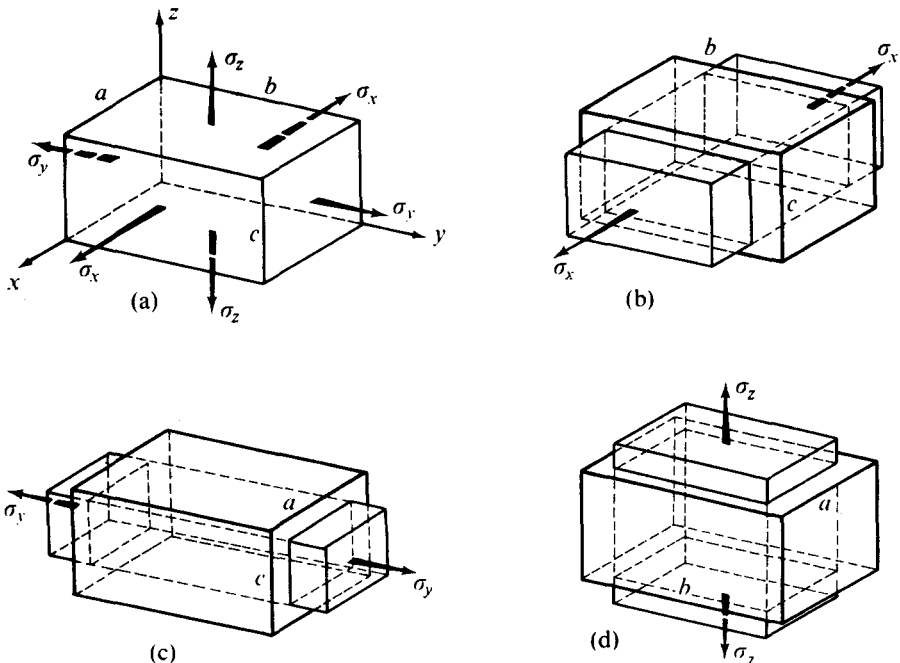
Dalam praktek, ketika sedang menghitung besaran-besaran fisis seperti  $E$  dan  $\nu$ , akan lebih baik lagi menyesuaikan dengan diagram tegangan-regangan dari bahan yang bersangkutan, untuk meyakinkan apakah besaran-besaran yang diperoleh masih berada di dalam daerah elastis bahan tersebut. Dan harus pula diketahui bahwa tidak ada perbedaan apakah dalam perhitungan regangan digunakan panjang awal atau akhir dari bahan, karena deformasi tersebut adalah sangat kecil.

## \*2-8 HUKUM HOOKE UMUM

Pada pasal terdahulu, perbandingan Poisson didefinisikan sebagai perbandingan regangan lateral terhadap regangan aksial pada bagian yang dibebani secara aksial. Ini berlaku hanya untuk keadaan tegangan yang uniaksial pada suatu elemen. Sekarang akan ditinjau suatu keadaan yang lebih umum dari tegangan yang bekerja pada suatu benda *isotropik* sedang persamaan-persamaan yang menghubungkan tegangan dengan deformasi akan kita kembangkan.

Sebuah balok yang sisi-sisinya berturut-turut adalah  $a$ ,  $b$  dan  $c$  diberi tegangan tarik secara *uniform* yang disebarkan pada seluruh permukaannya seperti terlihat pada Gambar 2-13(a).<sup>\*</sup> Diagram ini merupakan keadaan umum dari Gambar 1-3. Tetapi, untuk yang sekarang, tegangan geser dihilangkan sementara, karena seperti kita ketahui dari kenyataan eksperimental, regangan yang disebabkan oleh tegangan normal adalah *tidak tergantung kepada deformasi geser yang kecil*. Tegangan normal dinyatakan oleh  $\sigma$  di mana tanda huruf yang menyertainya menunjukkan arah bekerjanya tegangan tersebut.

Untuk sementara, perhatian kita arahkan kepada perubahan panjang balok menurut arah  $x$ . Untuk mendapatkan perubahan ini, kita menggunakan *azas superposisi*, yang berdasarkan pada pemikiran bahwa resultante tegangan atau regangan pada suatu sistem yang disebabkan oleh beberapa gaya adalah *jumlah aljabar dari efek masing-masing gaya bila dipisahkan*. Pengandaian demikian hanyalah benar kalau masing-masing efek tersebut berbanding lurus dan linier dengan gaya yang menyebabkannya. Dan juga hampir benar bila disebutkan bahwa pelenturan atau deformasi yang disebabkan oleh suatu gaya mengakibatkan suatu perubahan abnormal pada efek gaya yang lain. Untunglah besar lendutan relatif kecil pada kebanyakan bangunan-bangunan teknik. Karena itu, dengan pengolahan yang berdasarkan prinsip tersebut di atas, efek-efek yang terpisah pada gambar-gambar 2-13(b), (c) dan (d) dapat dijumlahkan. Tegangan dalam arah  $x$



**Gambar 2-13** Sebuah elemen yang mengalami tegangan normal bekerja menurut arah sumbu-sumbu koordinat.

<sup>\*</sup> Gambar ini diambil dari G. Dreyer, *Festigkeitslehre und Elastizitätslehre*, Leipzig: Janecke, p. 151

mengakibatkan regangan positif  $\epsilon'_x = \sigma_x/E$ . Masing-masing tegangan positif dalam arah  $y$  dan  $z$  menyebabkan regangan negatif *dalam arah  $x$*  sebagai akibat efek Poisson. Regangan-regangan ini berturut-turut adalah  $\epsilon''_x = -\nu\sigma_y/E$  dan  $\epsilon'''_x = -\nu\sigma_z/E$ . Regangan-regangan dalam arah  $y$  dan  $z$  dapat pula diperoleh dengan jalan yang sama, hingga jumlah regangan-regangan aksial dalam masing-masing ketiga arah adalah

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= +\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} \\ \epsilon_y &= -\nu\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} \\ \epsilon_z &= -\nu\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \end{aligned} \right\} \quad (2-6)$$

Penggunaan Persamaan 2-6 terbatas untuk bahan-bahan isotropik dalam daerah kenyal. *Bila suatu tegangan tertentu adalah tekan (kompresi), maka tanda dari suku-suku persamaan di atas akan berubah.* Para pembaca harus dapat menguji pernyataan ini dengan alasan-alasan *fisis*, visualisasikan efek Poisson berdasarkan Gambar 2-11. Harus pula diperhatikan, khususnya pernyataan yang diberikan oleh persamaan-persamaan di atas, yang dikenal sebagai *hukum Hook dalam keadaan yang umum*, yang memberikan *deformasi per satuan panjang atau regangan* dari suatu benda. Regangan yang diberikan oleh Persamaan 2-6 *haruslah dikalikan dengan dimensi* suatu elemen atau bagian *menurut arah yang bersangkutan* untuk mendapatkan deformasi total pada arah tersebut.\* Deformasi total yang diperluas menurut arah  $x$  adalah

$$\Delta_x = \epsilon_x L_x \quad (2-7)$$

di mana  $L_x$  adalah dimensi menurut arah  $x$ , yaitu seperti dimensi  $a$  pada Gambar 2-13(a). Hubungan yang serupa terdapat pula untuk  $\Delta_y$  dan  $\Delta_z$ .

#### CONTOH 2-5

Sebuah kubus berisi 50 mm diberikan tekanan (pressure) sebesar  $200.000 \text{ kN/m}^2$  yang bekerja pada seluruh permukaannya. Tentukanlah perubahan dimensi antara dua permukaan kubus yang sejajar. Ambil  $E = 200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$  dan  $\nu = 0,25$ .

#### PENYELESAIAN

Dengan menggunakan Persamaan 2-6 dan mengingat bahwa tekanan (pressure) adalah suatu tegangan tekan, maka

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{(-200.000)}{(200)10^6} - \left(\frac{1}{4}\right)\frac{(-200.000)}{(200)10^6} - \left(\frac{1}{4}\right)\frac{(-200.000)}{(200)10^6} \\ &= -5 \times 10^{-4} \text{ m/m.} \\ \Delta_x &= \epsilon_x L_x = -(5)10^{-4} \times 0,050 = -0,000025 \text{ m (penyusutan)} \end{aligned}$$

Dalam hal ini  $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z$ .

\* Tegangan harus dijaga konstan dalam selang yang sedang ditinjau.

## 2-9 TEGANGAN GESER PADA BIDANG-BIDANG SALING TEGAKLURUS

Pasal 2-8 mempersoalkan kasus yang umum dari deformasi yang diakibatkan oleh tegangan normal. Sekarang kita akan meninjau pengaruh tegangan geser pada deformasi. Hal ini memerlukan beberapa ulasan pendahuluan. Pertama, kembali kepada Gambar 1-3 dan disederhanakan pada kasus yang dilukiskan oleh Gambar 2-14(a). Pada gambar ini yang diperlihatkan hanyalah tegangan-tegangan geser  $\tau_{zy}$  dan  $\tau_{yz}$ . Sebagaimana halnya dengan yang terdahulu, tanda huruf pertama pada  $\tau$  berhubungan dengan tegangan geser yang terletak pada bidang yang *tegaklurus* pada sumbu yang diketahui, sedang tanda huruf yang kedua menunjukkan arah tegangan tersebut relatif terhadap sumbu yang lainnya. Dimensi elemen *kecil takberhingga* yang kita tinjau adalah  $(dx)(dy)(dz)$ . Untuk beberapa elemen, sebagaimana halnya pada tegangan normal, tegangan geser pada *bidang-bidang yang saling sejajar* secara numerik adalah sama. Hal ini mengikuti langsung dari keadaan seimbang dari suatu elemen. Jadi, dengan mengalikan tegangan dengan luas yang bersangkutan, dan dengan menggunakan  $\Sigma F_z = 0$ , maka

$$(\tau_{yz})_{\text{permukaan sebelah kiri}} dx dz = (\tau_{zy})_{\text{permukaan sebelah kanan}} dx dz$$

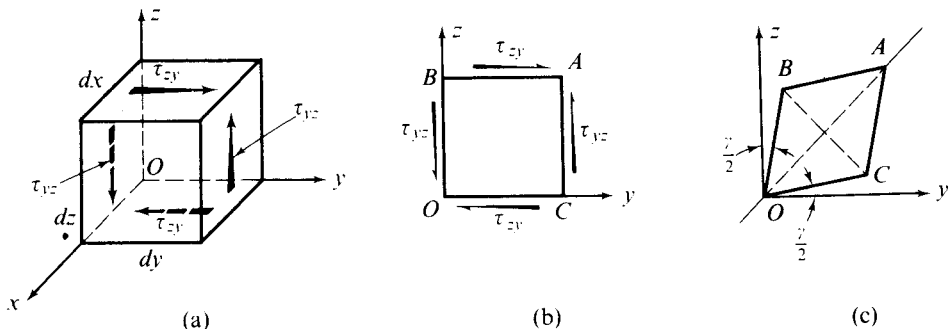
Karena itu, tegangan geser  $\tau_{yz}$  pada permukaan sebelah kiri dan kanan dari suatu elemen kecil takberhingga secara numerik adalah sama, tetapi dengan *arah yang berlawanan*. Hal yang serupa berlaku pula untuk  $\tau_{zy}$ .

Meskipun segitiga dimensional dari persoalan yang kita bicarakan di atas tidak boleh dilupakan, biasanya adalah lebih mudah menyatakan persoalan tersebut dalam bentuk bidang atau dua dimensional seperti yang diperlihatkan dalam Gambar 2-14(b). Dengan menggunakan pernyataan seperti itu serta menjumlahkan momen *gaya-gaya* terhadap sumbu  $O$ , diperoleh

$$\Sigma M_o = 0 \quad \circ +, \quad +(\tau_{zy})(dy dx)(dz) - (\tau_{yz})(dx dz)(dy) = 0$$

di mana ungkapan yang terdapat dalam tanda kurung masing-masing sesuai dengan tegangan, luas dan lengan momen. Dengan menyederhanakan persamaan tersebut di atas, diperoleh,

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} \quad (2-8)$$



Gambar 2-14 Suatu elemen benda yang mengalami geseran murni.

Dengan cara yang sama dapat dibuktikan bahwa  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$  dan  $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ . Karena itu tanda-tanda huruf (subscript) yang terdapat pada tegangan-tegangan geser adalah komutatif, artinya kedua tanda huruf pada masing-masing tegangan boleh bertukar tempat.

Pengertian dari Persamaan 2-8 adalah sangat penting. Kenyataan dari tanda huruf pada tegangan geser yang komutatif tersebut menandakan *bahwa tegangan-tegangan geser pada bidang-bidang yang saling tegaklurus dari suatu elemen kecil takberhingga adalah sama secara numerik*. (Harus diperhatikan bahwa bidang-bidang yang saling tegak lurus ini mengandung tegangan geser yang hanya bekerja mendekati atau menjauhi perpotongan antara bidang-bidang tersebut). Selanjutnya, kita mungkin mendapatkan suatu elemen yang berada dalam keseimbangan hanya bila tegangan-tegangan geser terdapat secara simultan pada keempat sisi elemen tersebut. Yaitu pada setiap benda yang mengalami tegangan di mana tegangan geser terdapat, maka dua pasangan dari tegangan demikian akan bekerja pada bidang-bidang yang saling tegaklurus. Jadi  $\Sigma M_O = 0$  tidak akan dipenuhi oleh hanya satu pasang tegangan geser.

Pada pelajaran yang berikut, akan jarang kita menemui keadaan di mana lebih dari dua pasangan tegangan geser yang bekerja secara simultan pada suatu elemen. Karena itu tanda huruf yang digunakan di atas untuk menunjukkan bidang dan arah dari tegangan geser menjadi tidak berguna. Biasanya, tegangan geser akan kita tulis dengan  $\tau$  saja tanpa tanda huruf. Meskipun demikian kita harus ingat bahwa tegangan geser selalu terjadi dalam keadaan *dua pasang*. Selanjutnya, pada diagram, seperti pada Gambar 2-14(b), *kedua ujung panah dari arah tegangan geser yang berpasangan tersebut haruslah terletak pada sudut-sudut yang berlawanan secara diametris dari suatu elemen* untuk memenuhi syarat-syarat keseimbangan untuk elemen tersebut.

## 2-10 HUKUM HOOKE UNTUK TEGANGAN DAN REGANGAN GESER

Dalam uraian di atas telah diperlihatkan bahwa tegangan geser pada *suatu elemen* dari suatu benda haruslah terjadi dalam bentuk dua pasang yang bekerja pada bidang-bidang yang saling tegaklurus. Bila *hanya* tegangan-tegangan geser ini yang terjadi, maka elemen tersebut kita katakan berada dalam *geseran murni* (pure shear). Suatu sistem tegangan yang demikian dapat mengubah bentuk elemen suatu benda elastis seperti keadaan yang diperlihatkan dalam Gambar 2-14(c). Sudah barang tentu distorsi (perubahan bentuk) seperti itu hanya berlaku untuk benda isotropik homogen sempurna, yang memiliki sifat-sifat yang sama pada segala arah. Diagonal-diagonal  $OA$  dan  $BC$  adalah sumbu-sumbu simetris untuk elemen yang mengalami distorsi.

Bila perhatian kita batasi pada pembahasan deformasi *kecil* dan selanjutnya, bila sifat elemen yang ditinjau hanya terbatas dalam daerah (range) kenyalnya, maka sekali lagi kita dapatkan secara eksperimental bahwa terdapat hubungan yang *linier* antara tegangan geser dan sudut  $\gamma$  (gamma) yang terlihat dalam Gambar 2-14(c). Karena itu bila  $\gamma$  didefinisikan sebagai *regangan geser* (shearing strain), maka perluasan hukum Hooke untuk tegangan dan regangan geser dapat dinyatakan secara matematis sebagai berikut

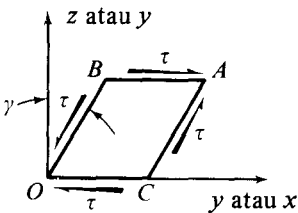
$$\tau = G\gamma \quad (2-9)$$



di mana  $G$  adalah konstanta pembanding yang disebut *elastisitas modulus geser* (the shearing modulus elasticity) atau modulus kekakuan. Seperti  $E$ ,  $G$  adalah suatu konstanta untuk suatu bahan tertentu. Konstanta ini diukur dalam satuan yang sama dengan  $E$ , di mana  $\gamma$  diukur dalam *radian*, suatu besaran yang tidak berdimensi. (Regangan geser  $\gamma$  dapat dinyatakan dalam persen, seperti halnya dengan  $\epsilon$ ). Pernyataan untuk ketiga kumpulan yang berbeda dari regangan geser ini dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xy} &= \tau_{xy}/G \\ \gamma_{yz} &= \tau_{yz}/G \\ \gamma_{zx} &= \tau_{zx}/G \end{aligned} \right\} \quad (2-9a)$$

Untuk mudahnya, Gambar 2-14(c) kita gambarkan kembali dengan kumpulan sumbu yang berbeda, hingga sudut  $\gamma^*$  hanya muncul pada suatu sisi saja dari elemen yang mengalami distorsi tersebut, seperti yang terlihat dalam Gambar 2-15. Harus diingat bahwa regangan geser yang sedang ditinjau, yang secara numerik diberikan  $\gamma$ , *selalu kecil*. Adalah cukup teliti bila kita ambil  $\tan \gamma$ ,  $\sin \gamma$  atau  $\gamma$  dalam *radian* adalah sama secara numerik. Begitu juga, dimensi linier dari elemen yang mengalami distorsi tidak berubah terlalu besar. Umpamanya, pada Gambar 2-15,  $OB \cos \gamma \approx OB$ .



Gambar 2-15 Distorsi yang disebabkan oleh geseran murni

Perlengkapan terbaik yang ada untuk pembuktian eksperimental langsung dari Persamaan 2-9 adalah suatu tabung *tipis* yang mendapatkan gaya puntir atau torsi. Seperti akan kita terangkan kelak pada bab yang berikut, akan terdapat tegangan geser yang *serba sama* pada seluruh dinding tabung yang terdapat dalam susunan perlengkapan di atas. Dari eksperimen seperti itu dapat diketahui bahwa munculnya diagram  $\tau$ - $\gamma$  adalah sama dengan diagram  $\sigma$ - $\epsilon$  pada pengujian gaya tarik untuk bahan yang sama. Titik-titik yang serupa pada batas elastis yang terdapat pada *geser* (shear), titik luluh (yield point), dan tegangan geser ultimat dapat kita peroleh dari diagram tersebut. Tetapi, *untuk bahan yang sama, harga numerik titik-titik ini pada tegangan geser umumnya rendah sekali (kira-kira separuh) dibandingkan terhadap tegangan normal*.

Pada Pasal 8-14 akan diperlihatkan bahwa ketiga konstanta kenyal  $E$ ,  $\nu$  dan  $G$  dari bahan-bahan isotropik tidaklah bebas antara satu sama lainnya. Pada kenyataannya

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2-10)$$

\* Regangan geser tidak tergantung pada masing-masing sudut yang dibuat dengan sumbu-sumbu koordinat.

Jadi, sebagai contoh pada percobaan tarik yang dilukiskan pada Contoh 2-4,

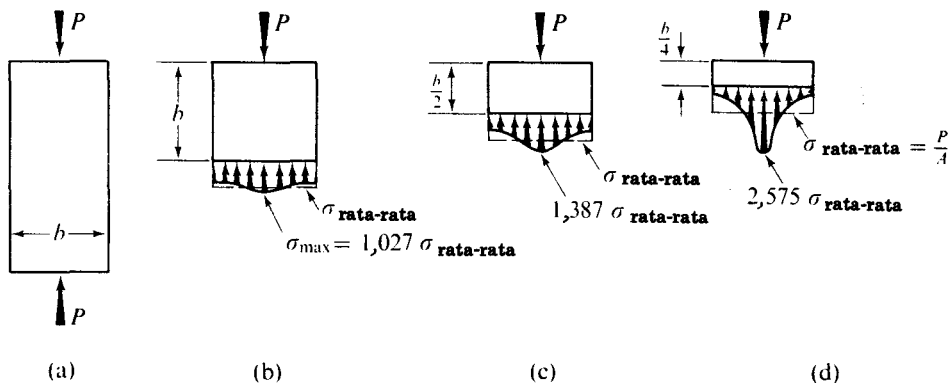
$$G = (70)10^6/2(1 + 0,333) = 26,2 \times 10^6 \text{ kN/m}^2.$$

## \*2-11 KONSENTRASI TEGANGAN

Rumus-rumus pokok utama dari analisis tegangan, yaitu Persamaan-persamaan 1-1 dan 1-2 telah dibahas dalam Bab 1 dan dari pasal-pasal terdahulu dari bab ini telah diperlihatkan bahwa tegangan-tegangan tersebut disertai oleh deformasi. Bila deformasi tersebut terjadi pada elemen-elemen yang *berdampingan* dengan tingkat keseragaman yang sama, maka pada bahan-bahan yang isotropik tidak akan kita dapat lagi tegangan-tegangan tambahan selain yang diberikan oleh persamaan-persamaan di atas. Tetapi bila *keseragaman* dari luas penampang suatu bagian struktur berbeban aksial terganggu atau bila gaya terpakai benar-benar diberikan pada suatu daerah yang luas yang sangat kecil, maka suatu gangguan pada tegangan dapat terjadi. Hal ini disebabkan oleh kenyataan bahwa status deformasi pada elemen-elemen yang berbatasan haruslah *kontinu* secara fisis. Mereka haruslah merentang atau menciut dengan jumlah yang sama dari semua partikel-partikel yang terletak pada sebelah menyebelah perbatasan. Deformasi-deformasi yang dihasilkan oleh deformasi perpanjangan dan geser ini menyangkut sifat-sifat bahan  $E$ ,  $G$  dan  $\nu$  serta gaya-gaya terpakai. Metoda-metoda untuk mendapatkan distribusi tegangan yang terganggu ini berada di luar jangkauan buku ini. Persoalan-persoalan seperti ini dibahas dalam *teori elastisitas matematis*. Bahkan oleh metoda-metoda tingkat lanjut tersebut hanya keadaan-keadaan yang lebih sederhana yang dapat diselesaikan. Kesukaran-kesukaran matematis bakal menjadi lebih besar bila menyelesaikan berbagai soal penting praktis. Untuk kelompok soal-soal yang tidak mudah dikerjakan secara matematis, prosedur-prosedur pendekatan numerik yang dirumuskan berdasarkan elemen-elemen hingga atau persamaan-persamaan berbeda yang berhingga adalah sangat luas dipergunakan sekarang dalam penyelesaian soal-soal yang rumit. Komputer-komputer digital sangat diperlukan oleh pekerjaan seperti itu. Sebagai kemungkinan lain, teknik-teknik eksperimental khusus (terutama fotoelastisitas, yang dibahas dengan ringkas dalam Pasal 9-4) telah dikembangkan untuk menentukan distribusi tegangan yang sesungguhnya.

Dalam uraian ini adalah perlu untuk menguji secara kualitatif hasil-hasil dari penyelidikan yang lebih maju. Misalnya, pada Gambar 2-16(a) sebuah blok pendek terlihat dibebani oleh gaya terpusat  $P$ . Masalah ini dapat diselesaikan dengan menggunakan Persamaan 1-1, yaitu  $\sigma = P/A$ . Tetapi apakah jawaban ini sungguh benar? Berdasarkan alasan secara kualitatif, adalah jelas bahwa regangan haruslah maksimum *di sekitar* gaya terpakai, karena itu tegangan yang bersangkutan harus pula maksimum. Hal ini tentulah jawaban yang diberikan oleh *teori elastisitas*.\* Hasil-hasil akhir untuk distribusi tegangan normal pada berbagai irisan diperlihatkan dalam diagram-diagram distribusi tegangan yang berdampingan, dalam Gambar-gambar 2-16(b), (c) dan (d). Untuk tujuan yang sekarang, intuisi kita secara fisis dapat membenarkan hasil-hasil ini. Secara khusus dapat

\* S. Timoshenko, dan J.N. Goodier, *Theory of Elasticity* (3rd ed.), New York: McGraw-Hill, 1970, hal. 60. Gambar 2-16 dikutip dari sumber ini.



Gambar 2-16 Distribusi tegangan di sekitar gaya terpusat.

kita perhatikan bahwa puncak yang tinggi dari tegangan normal pada suatu irisan yang dekat letaknya dengan gaya terpakai.\* Perhatikan pula bagaimana cepatnya puncak ini merata menjadi suatu distribusi tegangan yang hampir sama pada irisan bawah dengan lebar batang tersebut. Gambaran ini dikenal sebagai *azas Saint Venant* dari penyebaran cepat tegangan yang *terlokalisasi*. Azas ini menyatakan, bahwa efek gaya atau tegangan yang bekerja pada suatu luas yang kecil, boleh diperlakukan sebagai suatu sistem yang setara secara statis pada jarak selebar atau setebal benda, hingga menyebabkan distribusi tegangan dapat mengikuti hukum yang sederhana. Karena itu Persamaan 1-1 hampir dapat berlaku pada jarak selebar bagian bangunan dari titik tangkap suatu gaya terpusat. Perhatikan pula bahwa pada setiap tingkat di mana tegangan tersebut diselidiki secara teliti, tegangan *rata-rata* masih bisa ditentukan dengan penggunaan Persamaan 1-1. Hal ini disertai pula dengan syarat persamaan-persamaan statika yang *harus selalu dipenuhi*. Tidaklah menjadi soal bagaimana ketidakteraturan distribusi tegangan tersebut pada suatu irisan tertentu dari suatu batang, tetapi integral  $\sigma dA$  terhadap seluruh luas *haruslah sama dengan gaya terpakai*.

Karena besarnya kesukaran yang harus diatasi dalam menyelesaikan tegangan puncak ("peak") atau *lokal* tersebut di atas maka dalam praktek dikembangkanlah suatu skema yang tepat. Skema ini secara sederhana terdiri dari perhitungan tegangan dengan persamaan-persamaan elementer (seperti Persamaan 1-1 atau 1-2) dan kemudian mengalikan tegangan yang telah dihitung dengan sebuah angka yang disebut *faktor konsentrasi tegangan* (stress concentration factor). Pada pelajaran ini angka ini dilambangkan dengan  $K$ . Harga faktor konsentrasi tegangan ini *hanya* tergantung kepada *perbandingan geometris* dari bagian bangunan. Faktor-faktor ini dapat diperoleh pada literatur teknik dalam pelbagai tabel dan grafik† sebagai suatu fungsi parameter geometris dari bagian-bagian bangunan. Dengan menggunakan skema ini, Persamaan 1-1 dapat ditulis sekarang

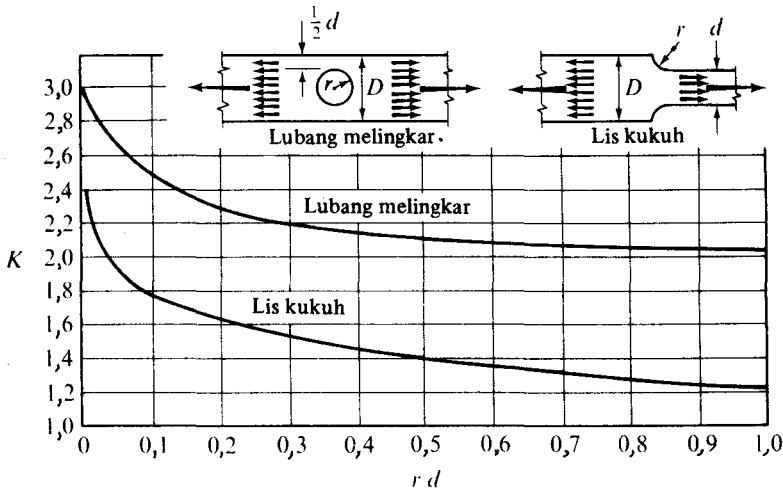
\* Pada suatu bahan kenyal murni, tegangan berada pada jarak yang tidak berhingga dari gaya yang terpusat.

† R.J. Roark and W.C. Young, *Formulas for Stress and Strain* (5th ed.). New York: McGraw-Hill, 1975.

sebagai berikut :

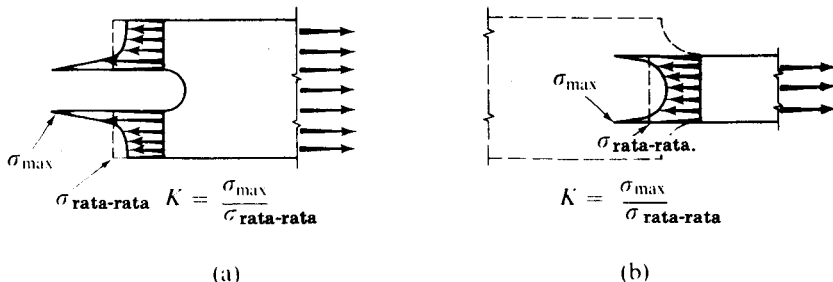
$$\sigma_{\max} = K \frac{P}{A} \quad (2-11)$$

di mana  $K$  adalah faktor konsentrasi tegangan. Dari Gambar 2-16(d), pada kedalaman di bawah puncak sebesar seperempat lebar bagian konstruksi tersebut,  $K = 2,575$ . Karena itu  $\sigma_{\max} = 2,575 \sigma_{\text{rata-rata}}$



Gambar 2-17 Faktor konsentrasi tegangan untuk batang-batang rata di dalam tarik.

Dua faktor konsentrasi tegangan penting lain dari batang yang *rata* berbeban aksial diperlihatkan dalam Gambar 2-17.\* Faktor-faktor yang sesuai yang dapat dibaca dari grafik ini menampilkan suatu *perbandingan* dari tegangan puncak suatu tegangan yang sesungguhnya pada irisan bagian struktur netto atau kecil, seperti yang terlihat dalam Gambar 2-18, dengan tegangan rata-rata dari irisan netto tersebut yang diberikan oleh Persamaan 1-1. Suatu konsentrasi tegangan yang sesungguhnya terjadi pula pada kaki



Gambar 2-18 Pengertian faktor konsentrasi-tegangan  $K$  dalam bentuk tegangan.

\* M.M. Frocht, "Factors of Stress Concentration Photoelastically Determined," *Trans. ASME*, 1935, volume 57, halaman A-67.

ulir sekrup, tergantung pada derajat yang tinggi terhadap ketajaman potongan. Untuk ulir sekrup yang biasa faktor konsentrasi tegangan berada di sekitar  $2\frac{1}{2}$ . Pemakaian dari Persamaan 2-11 tidak menghadapi kesukaran asal grafik atau tabel  $K$  yang tepat telah tersedia.

#### CONTOH 2-6

Hitunglah tegangan maksimum pada batang  $AB$  pada ujung yang bercabang dua  $A$  dari Contoh 1-3.

#### PENYELESAIAN

*Perbandingan geometris*

$$\frac{\text{jari-jari lubang}}{\text{lebar efektif}} = \frac{5}{15} = 0,333$$

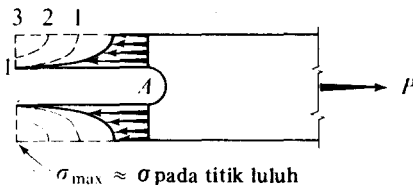
Dari Gambar 2-17\* :  $K \approx 2,18$  untuk  $r/d = 0,333$ .

Tegangan rata-rata dari Contoh 1-3.  $\sigma_{\text{rata-rata}} = P/A_{\text{netto}} = 74,7 \text{ MPa}$ .

Tegangan maksimum, Persamaan 2-11  $\sigma_{\text{max}} = K\sigma_{\text{rata-rata}} = (2,18)(74,7) = 163 \text{ MPa}$ .

Jawaban ini menunjukkan bahwa sebenarnya kenaikan lokal yang besar pada tegangan terjadi pada lubang ini, yang merupakan suatu kenyataan yang berarti.

Dalam meninjau faktor-faktor konsentrasi-tegangan dalam disain, kita haruslah mengingat bahwa penentuan faktor tersebut secara teoretis atau fotoelastis didasarkan pada penggunaan hukum Hooke. Bila bagian struktur *secara berangsur-angsur* diberi tegangan di bawah batas ukuran bahan tersebut, maka faktor-faktor tersebut di atas akan kehilangan artinya. Umpamanya, tinjaulah sebuah batang rata dari *besi lunak*, dengan ukuran yang terlihat pada Gambar 2-19, diberikan gaya  $P$  yang membesar secara berangsur-angsur. Distribusi tegangan secara geometris akan serupa dengan yang terlihat dalam Gambar 2-18 sampai  $\sigma_{\text{max}}$  mencapai titik luluh (yield point) bahan. Tetapi selanjutnya dengan makin besarnya gaya terpakai,  $\sigma_{\text{max}}$  *tetap* sama, di samping banyak deformasi yang dapat terjadi bila bahan tersebut memungkinkannya. Karena itu tegangan pada  $A$  tetap "dibekukan" pada harga yang sama. Meskipun demikian, untuk keseimbangan, tegangan yang bekerja pada luas efektif haruslah cukup kuat untuk melawan gaya  $P$  yang makin besar. Sebagai hasilnya, distribusi tegangan mulai terlihat seperti garis 1-1 yang terlihat dalam Gambar 2-19; kemudian seperti garis 1-2 dan akhir-



Gambar 2-19 Sifat batang rata besi lunak bila mendapat tegangan di bawah titik luluh.

\* Sesungguhnya konsentrasi tegangan tergantung kepada keadaan lubang, apakah kosong, atau berisi baut atau pasak.

nya garis 1-3. Karena itu, untuk bahan-bahan yang *liat* sebelum menjadi pecah, konsentrasi tegangan lokal praktis menjadi hilang dan suatu distribusi tegangan yang hampir merata akan terjadi pada irisan efektif sebelum menjadi genting.

Uraian di atas tidak sepenuhnya benar bila bahan kurang liat dibandingkan dengan baja lunak. Namun demikian, bahan-bahan tersebut akan mempunyai kecenderungan kearah seperti itu, kecuali bila bahan tersebut rapuh, seperti gelas atau beberapa baja paduan. Penjelasan yang dikemukakan tersebut berlaku pada keadaan di mana gaya secara berangsur-angsur diberikan kepada bahan atau yang bersifat statis. *Hal ini tidak berlaku untuk beban-beban yang turun naik (berfluktuasi) yang ditemui pada beberapa bagian mesin.* Di sini tingkat tegangan yang benar-benar telah bekerja *secara lokal*, menentukan sifat kelelahan dari bagian bangunan. Tegangan maksimum yang diperbolehkan yang ditentukan dari suatu diagram *S-N* (Pasal 1-7). *Kegagalan sebagian besar bagian-bagian mesin dapat ditelusuri pada bertambahnya keretakan yang berasal dari titik-titik yang bertegangan tinggi.* Pada disain mesin, konsentrasi tegangan adalah penting sekali, meskipun ahli-ahli disain mesin merasa bahwa konsentrasi teoretis adalah tinggi. Rupanya beberapa kecenderungan terdapat untuk meratakan puncak-puncak tegangan, meskipun bagian-bagian struktur mendapatkan beban-beban yang siklis (berputar).

Dari pembahasan di atas dengan grafik yang menyertainya adalah jelas mengapa ahli disain mesin yang terlatih mencoba untuk "melancarkan" daerah sambungan serta peralihan elemen-elemen yang membentuk suatu bangunan.

#### SOAL-SOAL UNTUK DISELESAIKAN

2-1. Suatu contoh baja standar berdiameter 13 mm, bila diberikan gaya tarik 29,5 kN, dengan panjang ukur 200 mm memuai sepanjang 0,22 mm. Bila diketahui bahwa contoh tersebut dalam daerah elastis, berapakah modulus elastis dari baja tersebut? *Jawab:*  $202 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ .

2-2. Sebuah batang baja sepanjang 10 m yang digunakan dalam suatu mekanisme kendali harus meneruskan gaya tarik 5 kN tanpa rentangan yang melebihi 3 mm, tidak melebihi tegangan ijin  $150 \text{ MN/m}^2$ . Berapakah diameter batang tersebut? Berikan jawaban dalam milimeter  $E = 200.000 \text{ MN/m}^2$ .

2-3. Sebuah silinder padat berdiameter 50 mm dan panjang 900 mm diberi gaya tarik 120 kN. Sebagian dari silinder ini, panjang  $L_1$ , terbuat dari baja; bagian yang lainnya menempel pada baja adalah terbuat dari aluminium, panjangnya  $L_2$ . (a) Hitunglah panjang  $L_1$  dan  $L_2$  hingga kedua bahan memuai dengan panjang yang sama. (b) Berapakah perpanjangan total dari silinder?  $E_{\text{baja}} = 200.000 \text{ MN/m}^2 = 200 \text{ GPa}$ ;  $E_{\text{Al}} = 70.000 \text{ MN/m}^2 = 70 \text{ GPa}$ .

2-4. Kerjakanlah kembali Contoh 2-2 setelah mengubah data-data menjadi sebagai berikut:  $P_1 = 180 \text{ kN}$ ,  $P_2 = 450 \text{ kN}$ ,  $P_3 = 360 \text{ kN}$ ,  $P_4 = 90 \text{ kN}$ , luas penampang batang dari A ke B  $0,0015 \text{ m}^2$ , dari B ke C  $0,003 \text{ m}^2$  dan dari C ke D adalah  $0,0015 \text{ m}^2$ .

2-5. Tinjaulah kembali data-data dalam Contoh 2-2 menjadi sebagai berikut:  $P_1 = 50 \text{ kN}$ ,  $P_3 = 450 \text{ kN}$ ,  $P_4 = 150 \text{ kN}$ . Kemudian hitunglah (a) gaya  $P_2$  yang dibutuhkan untuk keseimbangan dan (b) perpanjangan total dari batang AD. Luas penampang batang dari A ke B adalah  $0,0005 \text{ m}^2$ , dari B ke C adalah  $0,0020 \text{ m}^2$ , dan dari C ke D adalah  $0,0010 \text{ m}^2$ .

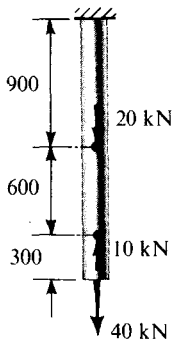
2-6. Pada Contoh 2-2, berapakah besar kedua gaya terpakai tambahan (yang sama dan berlawanan) pada ujung-ujung batang tersebut yang akan membawa deformasi total kembali menjadi nol?

2-7. Sebuah pelat dengan panjang 75 mm dan lebar 5 mm, tergantung secara vertikal, terdiri dari bagian yang terbuat dari aluminium panjangnya 2 m dan dipasang pada bagian yang ter-



buat dari baja panjangnya 2,5 m. Pada ujung bawah digantungkan beban 25 kN. Abaikanlah berat daripada pelat dan hitunglah defleksi ujung bawah.  $E_{\text{baja}} = 200 \text{ GPa}$ ;  $E_{A1} = 70 \text{ GPa}$ .

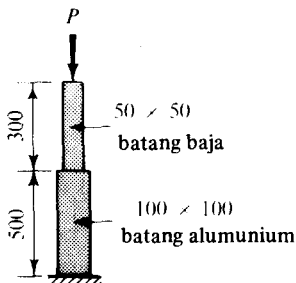
2-8. Sebuah batang baja bulat mempunyai luas penampang  $0,0003 \text{ m}^2$  terpasang tetap pada ujung sebelah atas dan mendapat tiga gaya aksial seperti terlihat dalam gambar. Hitunglah defleksi yang terdapat pada ujung bebas yang disebabkan oleh gaya-gaya tersebut. Gambarkanlah diagram-diagram gaya aksial dan defleksi aksial. Ambil  $E = 200 \text{ GPa}$ .



(Semua ukuran dalam mm)

GAMBAR SOAL 2 - 8

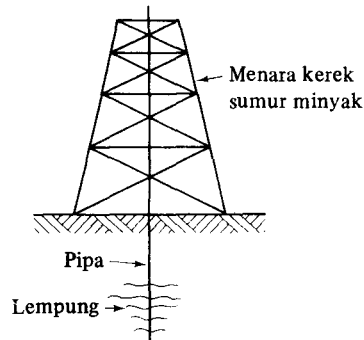
2-9. Sebuah batang baja dan sebuah batang aluminium mempunyai ukuran seperti yang diperlihatkan oleh gambar. Hitunglah besar gaya  $P$  yang akan menyebabkan panjang total kedua batang menyusut sepanjang 0,25 mm. Anggaplah bahwa distribusi tegangan normal pada seluruh penampang kedua batang adalah serba sama dan batang tersebut dijaga tidak menekuk ke samping. Gambarkanlah diagram defleksi aksial. Ambillah  $E_{\text{baja}} = 200 \text{ GPa}$  dan  $E_{A1} = 70 \text{ GPa}$ .



(Semua ukuran dalam mm)

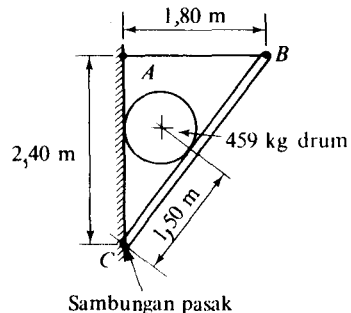
GAMBAR SOAL 2 - 9

2-10. Pada salah satu lapangan minyak Kalifornia, sebuah pipa bor yang sangat panjang terbentur oleh lempung keras (lihat gambar). Adalah perlu untuk menentukan pada kedalaman berapa hal tersebut terjadi. Insinyur yang menangani pekerjaan tersebut memerintahkan untuk memberikan kepada pipa gaya tarik yang besar arah ke atas. Sebagai hasil dari pekerjaan ini pipa tersebut tertarik ke atas secara elastis sepanjang 600 mm. Pada saat yang sama pipa tersebut memuai sepanjang 0,035 mm dari panjang ukur 200 mm. Secara pendekatan dimanakah pipa tersebut terbentur? Anggaplah bahwa luas penampang tersebut adalah tetap dan bahwa dalam pengujian statika gangguan deformasi kenyal pipa terhadap medium yang mengelilinginya adalah sangat kecil.



GAMBAR SOAL 2 - 10

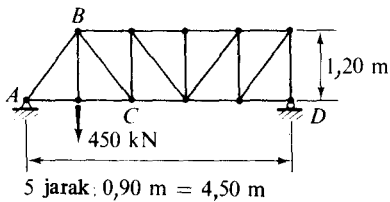
2-11. Sebuah dinding konsol dibangun seperti yang terlihat dalam gambar. Anggaplah bahwa semua sambungan dihubungkan oleh pasak. Batang baja  $AB$  mempunyai luas penampang  $5 \text{ mm}^2$ . Batang  $BC$  merupakan sebuah balok kaku. Bila sebuah drum yang tidak mempunyai



GAMBAR SOAL 2 - 11

gesekan berdiameter 1,00 m dan beratnya 459 kg diletakkan seperti pada kedudukan yang terlihat dalam gambar, berapakah muai panjang dari batang  $AB$ ?  $E = 200 \text{ GN/m}^2$ .

2-12. Terhadap rangka batang yang diperlihatkan oleh gambar, hitunglah muai panjang total dari bagian  $BC$  yang disebabkan pemakaian gaya  $P = 450 \text{ kN}$ . Bagian  $BC$  terbuat dari baja dan mempunyai luas penampang  $60 \text{ mm}^2$ .  $E = 200.000 \text{ MN/m}^2$ .



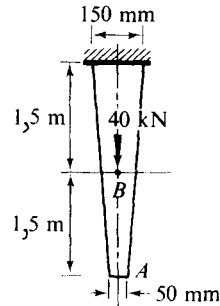
GAMBAR SOAL 2 – 12

2-13. Bila deformasi dari salah satu bagian struktur pada Gambar Soal 2-12 tidak dapat melebihi 0,1% panjangnya, maka bagian manakah yang membutuhkan luas penampang yang terbesar dan berapakah luas tersebut? *Jawab:*  $22,5 \times 10^2 \text{ mm}^2$ .

2-14. Bila pada Contoh 2-3 batang adalah batang aluminium berpenampang bujur sangkar dengan sisi 25 mm dan beratnya 1,73 kg/m, maka berapakah panjang batang itu sendiri hingga ujung bebasnya akan memuai 6 mm oleh tarikan beratnya sendiri?  $E = 70 \text{ GPa}$ .

2-15. Berapakah defleksi ujung bebas dari batang dalam Contoh 2-3 bila hukum Hook digantikan oleh hubungan tegangan-regangan  $\sigma = E\epsilon^n$ , di mana  $n$  adalah bilangan yang tergantung pada sifat bahan.

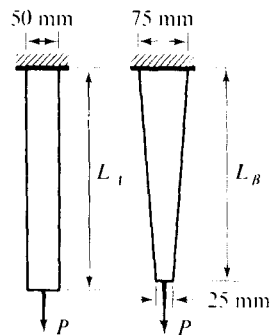
2-16. Batang baja runcing yang terlihat dalam gambar dipotong dari pelat baja tebal 25 mm dan dilas ujung atasnya pada struktur kaku. Hitunglah defleksi ujung  $A$  yang disebabkan oleh gaya 40 kN pada titik  $B$ . Ambillah titik asal sumbu koordinat pada titik potong garis-garis miring dari keruncingan batang.  $E = 200 \text{ GN/m}^2$ .



GAMBAR SOAL 2 – 16

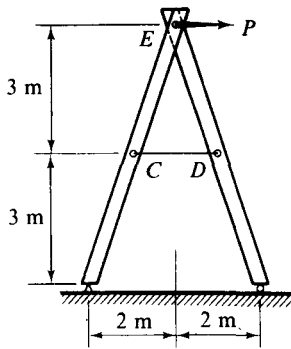
2-17. Kerjakanlah kembali Soal 2-16 bila titik asal sumbu koordinat berada pada titik  $B$ .

2-18. Dua batang dipotong dari sebuah pelat logam tebal 25 mm hingga kedua batang mempunyai tebal yang tetap 25 mm. Batang  $A$  dibuat dengan lebar yang tetap 50 mm sepanjang batangnya. Sedang batang  $B$  mempunyai lebar 75 mm di ujung sebelah atas dan 25 mm di sebelah bawah. Masing-masing batang mendapat beban yang sama  $P$ . Hitunglah perbandingan  $L_A/L_B$  hingga kedua batang merentang dengan panjang yang sama. Berat batang diabaikan.



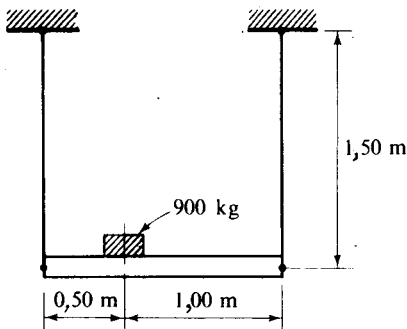
GAMBAR SOAL 2 – 18

2-19. Beban  $P$  diberikan pada kerangka yang tersambung dengan pasak terlihat rentangan kabel  $CD$  yang panjangnya adalah 2,5 mm. Luas penampang kabel adalah  $150 \text{ mm}^2$  dan  $E = 200.000 \text{ MN/m}^2$ . Tentukanlah  $P$ .



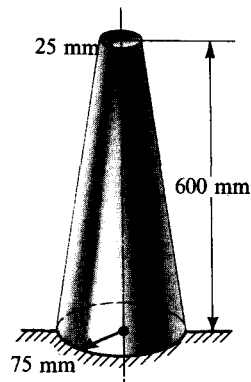
GAMBAR SOAL 2 – 19

2-20. Dua kawat dihubungkan dengan sebuah batang yang kaku seperti yang terlihat dalam gambar, di atasnya dibebani oleh sebuah massa sebesar 900 kg. Luas penampang dari kawat sebelah kiri adalah  $60 \text{ mm}^2$  dan dari harga  $E = 200.000 \text{ MN/m}^2$ . Sedangkan dari kawat sebelah kanan adalah  $120 \text{ mm}^2$  dan  $E = 70.000 \text{ MN/m}^2$ . Hitunglah pergeseran vertikal letak massa tersebut.



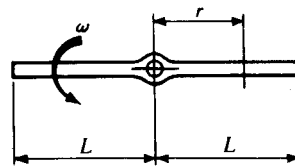
GAMBAR SOAL 2 – 20

2-21. Ukuran-ukuran dari sebuah kerucut terpancung tegak, ujungnya yang lebih besar terletak di atas dasar tetap dapat dilihat pada gambar. Tentukanlah defleksi dari ujung atas yang disebabkan oleh berat benda itu sendiri. Satuan massa dari bahan adalah  $\gamma$ ; modulus elastis adalah  $E$  (*Petunjuk*: Ambillah titik asal sumbu koordinat pada titik puncak perluasan kerucut terpancung tersebut). *Jawab*:  $1,0 \times 10^5 \gamma g/E \text{ mm}$ .



GAMBAR SOAL 2 – 21

2-22. Hitunglah muai panjang total  $\Delta$  dari sebuah batang ramping kenyal yang mempunyai luas penampang tetap, seperti yang terlihat dalam gambar, bila benda tersebut diputar pada sebuah bidang horizontal dengan kecepatan sudut  $\omega$  radian per detik. Satuan massa dari bahan adalah  $\gamma$ . Abaikanlah pengaruh bahan ekstra yang kecil beserta pasak. (*Petunjuk*: Pertama-tama hitunglah tegangan pada sebuah irisan yang berjarak  $r$  dari pasak dengan mengintegrasikan efek dari gaya dalam antara  $r$  dan  $L$ . Lihatlah Contoh 1-6). *Jawab*:  $2\gamma\omega^2 L^3/3E$ .

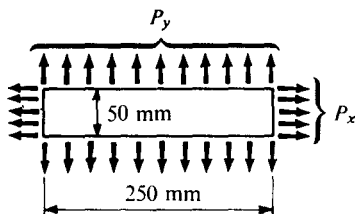


GAMBAR SOAL 2 – 22

2-23. Sebuah batang cor kuning dengan diameter 60 mm dan panjang 150 mm mendapat gaya tekan aksial sebesar 200 kN didistribusikan secara merata. Hitunglah pertambahan diameter batang yang disebabkan oleh gaya terpakai.  $E = 85 \text{ GPa}$ ;  $\nu = 0,30$ .

2-24. Sepotong pelat baja dengan ukuran  $50 \text{ mm} \times 250 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$  diberi tegangan merata di sepanjang pinggirnya (lihat gambar). (a) Bila  $P_x = 100 \text{ kN}$  dan  $P_y = 200 \text{ kN}$ , berapaakah perubahan tebal yang terjadi disebabkan

oleh gaya-gaya ini? (b) Untuk menghasilkan perubahan tebal yang sama dengan (a) oleh gaya  $P_x$  saja, berapakah besar gaya ini? Ambillah  $E = 200.000 \text{ MN/m}^2$  dan  $\nu = 0,25$ .

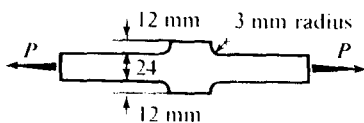


GAMBAR SOAL 2 – 24

2-25. Sebuah balok baja persegiempat, seperti yang diperlihatkan dalam Gambar 2-13(a), mempunyai ukuran-ukuran seperti berikut:  $a = 50 \text{ mm}$ ,  $b = 75 \text{ mm}$ , dan  $c = 100 \text{ mm}$ . Terhadap permukaan balok ini diberikan gaya-gaya terdistribusi secara merata sebesar  $180 \text{ kN}$  (tarik) menurut arah sumbu  $x$ ,  $200 \text{ kN}$  (tarik) menurut arah sumbu  $y$  dan  $240 \text{ kN}$  (tekan) menurut arah sumbu  $z$ . Hitunglah besar sistem tunggal gaya-gaya yang bekerja hanya menurut arah  $y$  yang menghasilkan deformasi yang sama dalam arah  $y$  sebagaimana halnya gaya-gaya awal. Ambillah  $\nu = \frac{1}{4}$ . *Jawab:*  $250 \text{ kN}$ .

2-26. Sebuah pelat  $6 \text{ mm} \times 75 \text{ mm}$  yang panjangnya  $600 \text{ mm}$  mempunyai lubang berdiameter  $25 \text{ mm}$  yang terletak ditengah-tengahnya. Hitunglah gaya tarik aksial yang dapat diberikan kepada pelat ini menurut arah membujur tanpa melewati tegangan ijin  $220 \text{ MPa}$ .

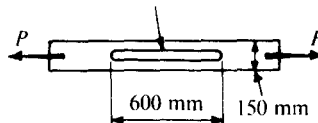
2-27. Sebuah batang rata ditarik dengan mesin untuk suatu penggunaan mekanis diperlemah oleh suatu irisan yang diperbesar seperti yang terlihat dalam gambar. Tentukanlah pertambahan panjang batang yang disebabkan oleh keadaan tersebut di atas. Berhubungan batang tersebut harus dibebani secara siklus, maka tinjaulah konsentrasi tegangan. *Jawab:*  $57\%$ .



GAMBAR SOAL 2 – 27

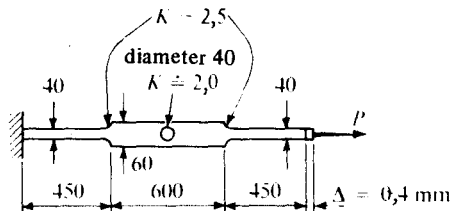
2-28. Sebuah celah panjang dikerat dari batang baja  $25 \text{ mm} \times 150 \text{ mm}$  yang panjangnya  $3 \text{ m}$  seperti yang terlihat dalam gambar. (a) Hitunglah tegangan maksimum bila gaya aksial  $P = 200 \text{ kN}$  diberikan kepada batang tersebut. Anggaph bahwa kurva sebelah atas pada Gambar 2-17 berlaku. (b) Untuk keadaan yang sama, tentukanlah muai panjang total batang tersebut. Abaikanlah efek-efek lokal konsentrasi tegangan dan anggaph bahwa luas penampang yang berkurang diperpanjang menjadi  $600 \text{ mm}$ . (c) Taksirlah muai panjang dari batang yang sama bila  $P = 700 \text{ kN}$ . Anggaph bahwa baja menghasilkan muai panjang  $0,020 \text{ m}$  tiap meter bila mendapat tegangan  $280 \text{ MPa}$  (d) Dengan membuang beban yang terdapat pada (c), berapakah defleksi yang diperoleh? Ambillah  $E = 200 \text{ GPa}$ .

lebar celah  $50 \text{ mm}$  (radius pada ujung  $25 \text{ mm}$ )



GAMBAR SOAL 2 – 28

2-29. Batang yang terlihat dalam gambar dikerat dari sepotong baja tebal  $25 \text{ mm}$ . Pada perubahan bagian batang, maka harga kira-kira dari faktor konsentrasi tegangan ditunjukkan pula. Suatu gaya  $P$  diberikan, menghasilkan perubahan total panjang batang sebesar  $0,4 \text{ m}$ . Tentukanlah tegangan maksimum dalam batang tersebut akibat gaya ini. Abaikanlah pengaruh dari lobang dan kosentrasi tegangan pada deformasi aksial. Ambillah  $E = 200 \text{ GPa}$ .

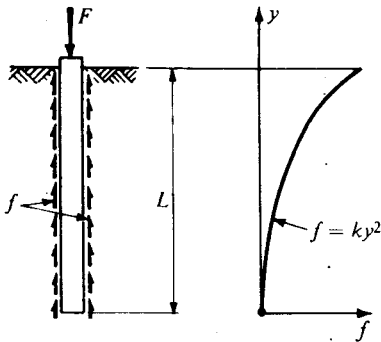


(Semua ukuran dalam mm)

GAMBAR SOAL 2 – 29

\*2-30. Sebuah tiang kayu yang serba-sama, ditanamkan sedalam  $L$  dalam lempung, membawa sebuah beban terpakai  $F$  di atasnya.

Beban ini tertahan sepenuhnya oleh gesekan  $f$  sepanjang tiang tersebut, yang berubah-ubah menurut parabolik seperti yang diperlihatkan dalam gambar. (a). Tentukanlah perpendekan total dari tiang dalam bentuk  $F$ ,  $L$ ,  $A$  dan  $E$ . (b) Bila  $P = 420 \text{ kN}$ ,  $L = 12 \text{ m}$ ,  $A = 64000 \text{ mm}^2$  dan  $E = 10.000 \text{ MN/m}^2 = 10 \text{ GPa}$ , berapakah besarnya perpendekan tiang demikian? (*Petunjuk*: Dari persyaratan keseimbangan, tentukanlah terlebih dahulu tetapan  $k$ ). *Jawab*: (a)  $FL/(4AE)$ .



GAMBAR SOAL 2 – 30

# 3 Puntiran (Torsi)

## 3-1 PENDAHULUAN

Kedua bab yang pertama, di samping mengemukakan konsep-konsep umum mengenai persoalan mekanika bahan, menyelidiki secara terperinci sifat-sifat batang yang dibebani secara aksial. Dengan penggunaan metoda-metoda irisan dan pengandaian regangan yang sama pada serat yang membujur, sebuah rumus untuk tegangan pada batang yang berbeban aksial telah pula kita kembangkan. Kemudian telah dibangun pula suatu pernyataan untuk mendapatkan deformasi aksial dari bagian-bagian struktur. Pada bab ini hubungan-hubungan serupa akan dijelaskan untuk bagian struktur yang mengalami puntiran sekitar sumbu longitudinal. Jadi *pembahasan akan dititikberatkan kepada efek suatu jenis aksi yaitu suatu momen puntir yang disebabkan oleh gaya puntir dalam sebuah struktur*. Bagian-bagian struktur yang secara simultan memperoleh puntiran atau lenturan, sering terjadi dalam praktek, dan akan dibahas pada Bab 10. Untuk kasus-kasus yang berhubungan dengan statis tak tentu akan dibahas dalam Bab 12.

Sebagian besar dari bab ini diisi dengan pembahasan bagian struktur yang berpenampang lingkaran atau berbentuk tabung. Penampang yang bukan lingkaran hanya dibahas secara singkat. Dalam praktek, bagian-bagian struktur yang meneruskan momen puntir (torque), seperti poros motor, tabung momen puntir dari perlengkapan daya, dan seterusnya, sebagian besar mempunyai penampang lingkaran atau bentuk tabung. Jadi, meskipun kasus-kasus khusus yang utama akan kita bahas pula, tetapi bagian terbesar dari penggunaan-penggunaan penting berada di bawah jangkauan rumus-rumus yang dikembangkan.

Kopling sumbu akan kita tinjau secara singkat pada akhir bab ini, karena penelaahannya bersangkutan dengan metoda analisis yang digunakan untuk poros-poros lingkaran.



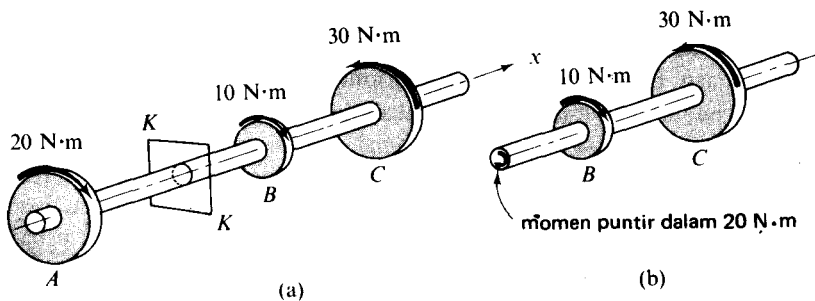
### 3-2 PENGGUNAAN METODA IRISAN

Dalam menganalisis bagian struktur yang mendapat momen puntir, kita akan mengikuti pendekatan dasar yang digariskan dalam Pasal 1-9. Pertama, sistem secara keseluruhan diselesaikan untuk keseimbangan, kemudian digunakan metoda irisan dengan membuat *bidang irisan yang tegak lurus terhadap sumbu dari bagian struktur*. Setiap sesuatu yang berada di luar sebuah potongan lalu dipindahkan, dan akhirnya yang akan diterangkan adalah *momen puntir dalam atau penahan* yang diperlukan untuk menjaga keadaan seimbang dari bagian yang telah terpisah ditentukan. Untuk mendapatkan momen puntir dalam ini untuk batang-batang *statis tertentu*, hanya dibutuhkan satu persamaan statika, yaitu  $\Sigma M_x = 0$  di mana sumbu  $x$  adalah dibuat sepanjang arah batang. Dengan menggunakan persamaan ini terhadap *suatu bagian terpisah* dari sebuah poros, maka suatu momen puntir terpakai luar\* (external applied torque) didapatkan untuk *mengimbangi* momen puntir penahan yang dikembangkan di dalam bahan. Jadi *momen puntir luar dan dalam haruslah sama secara numerik*, tetapi bekerja dalam arah yang berlawanan.

Pada bab ini, poros-poros akan dianggap sebagai "tidak berberat" (weightless) atau disokong pada selang yang cukup sering untuk mengabaikan efek lenturan. Gaya-gaya secara aksial yang bekerja secara simultan pada batang akan kita kesampingkan dulu sekarang.

#### CONTOH 3-1

Hitunglah momen puntir dalam pada irisan  $K-K$  untuk poros yang terlihat pada Gambar 3-1(a) dan yang mengalami tiga momen puntir yang ditunjukkan.



Gambar 3-1

#### PENYELESAIAN

Momen puntir sebesar 30 N·m pada titik  $C$  diimbangi oleh dua momen puntir dari 20 N·m dan 10 N·m, berturut-turut pada  $A$  dan  $B$ . Karena itu secara keseluruhan benda berada dalam keseimbangan. Selanjutnya, dengan membuat bidang irisan  $K-K$  tegak-lurus pada sumbu batang *di mana saja* antara titik  $A$  dan  $B$ , maka diperoleh sebuah

\* Bila dua bidang dipergunakan untuk mengisolasi sebuah bagian dari sebuah benda, maka momen puntir dalam pada salah satu ujung *benda yang terisolasi* tersebut haruslah dipandang sebagai sebuah momen puntir luar bila irisan yang lain yang ditinjau.

benda bebas dari satu bagian sumbu tersebut seperti yang terlihat dalam Gambar 3-1(b) Kemudian, dari  $\Sigma M_x = 0$  atau

$$\text{momen puntir terpakai luar} = \text{momen puntir dalam}$$

kita mendapat kesimpulan bahwa pada sumbu antara titik-titik *A* dan *B* terjadi momen puntir dalam atau momen puntir penahan sebesar 20 N·m. Dengan penaksiran yang serupa kita mendapat kesimpulan bahwa momen puntir dalam yang ditahan oleh sumbu antara *B* dan *C* adalah 30 N·m.

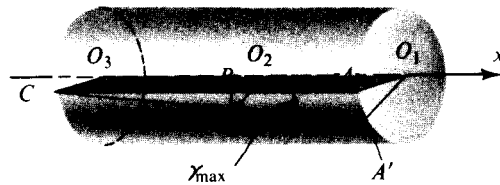
Secara intuitif dapat dilihat bahwa pada suatu bagian struktur yang mempunyai luas penampang yang tetap, momen puntir dalam maksimal mengakibatkan tegangan yang maksimal pula dan menentukan syarat yang paling dikehendaki dari bahan tersebut. Jadi dalam penelitian bagian puntiran, beberapa irisan dapat dilakukan untuk menentukan momen puntir dalam yang paling besar. Sebuah irisan di mana momen puntir paling besar diperoleh disebut *irisn kritis* (critical section). Pada Contoh 3-1 irisan kritis terdapat antara titik-titik *B* dan *C*. Bila bagian puntiran berbeda-beda dalam ukuran, adalah sukar menentukan di mana bahan tersebut mempunyai tegangan secara kritis. Beberapa irisan mungkin harus diselidiki dan *tegangan-tegangan dihitung* untuk menentukan irisan kritis. Keadaan ini serupa dengan kasus sebuah batang beban aksial, di mana harus dikembangkan cara untuk menentukan tegangan sebagai fungsi dari momen puntir dalam dan ukuran dari batang tersebut. Pada beberapa pasal berikut rumus-rumus yang diperlukan akan diturunkan.

### 3-3 PENGANDAIAAN DASAR

Untuk memantapkan suatu hubungan antara momen puntir dalam dengan tegangan yang dipasang pada batang dengan *penampang berbentuk lingkaran dan tabung*, adalah penting untuk membuat beberapa pengandaian, yang keberlakuannya dapat dibenarkan untuk selanjutnya. Hal ini, sebagai tambahan untuk bahan yang homogen, sebagai berikut:

1. Suatu irisan datar dari bahan yang tegaklurus terhadap sumbu suatu batang melingkar tetap merupakan *bidang datar* setelah momen puntir dikenakan. Yaitu tidak terdapat bidang-bidang yang saling sejajar tegaklurus pada sumbu suatu batang yang berbentuk *melengkung* atau menyimpang dari bidang datar.\*
2. Pada batang yang mendapat momen puntir, *regangan geser (shearing strains)*,  $\gamma$  akan bergantung secara linier dari sumbu pusat. Pengandaian ini digambarkan dalam Gambar 3-2 dan menunjukkan bahwa suatu bidang khayal seperti  $AO_1O_3C$  bergerak menjadi  $A'O_1O_3C$  bila dikenakan momen puntir. Kemungkinan lain, bila

\* Pada kenyataannya jarak antara masing-masing bidang sejajar yang tegaklurus terhadap sumbu tidak pula berubah. Hal ini tidak betul bila deformasi adalah besar. Meskipun deformasi tersebut biasanya kecil, tetapi tegangan tidak dapat diabaikan. Untuk lebih terperinci dapat dilihat S. Timoshenko, *Strength of Materials* (3rd ed), Part II, Advanced Theory and Problems. New York: Van Nostrand, 1956 Bab VI.



Gambar 3-2 Variasi regangan dalam batang melingkar yang mengalami momen puntir.

radius khayal  $O_3C$  dipegang tetap arahnya, maka radius-radius yang semula adalah  $O_2B$  dan  $O_1A$ , setelah mengalami rotasi akan berubah menjadi  $O_2B'$  dan  $O_1A'$ . Radius-radius ini *masih* bersifat lurus.

Harus diperhatikan bahwa pengandaian-pengandaian ini *berlaku hanya untuk batang yang berbentuk lingkaran dan tabung*. Untuk batang semacam ini, pengandaian-pengandaian ini *dapat bekerja dengan baik sekali di bawah batas sifat elastis suatu bahan*. Pengandaian-pengandaian ini akan digunakan lagi dalam Pasal 3-8 di mana akan dibahas suatu distribusi tegangan di bawah batas proporsional. Meskipun demikian bila perhatian ditujukan pada kasus *elastisitas*, maka Hukum Hooke dapat dipergunakan.

### 3. Tegangan geser berubah sebanding dengan regangan geser.

Pada bagian interior suatu bagian struktur, kedua pengandaian yang pertama tersebut di atas sukar diterapkan dengan langsung. Tetapi, setelah menurunkan rumus-rumus tegangan dan deformasi yang didasarkan pada pengandaian tersebut, maka akan diperoleh persesuaian antara besaran-besaran yang diukur dengan yang dihitung. Selanjutnya keberlakuan dari pengandaian tersebut mungkin tepat didemonstrasikan dengan metoda teori elastisitas berdasarkan hukum Hooke umum dan oleh persyaratan untuk kesesuaian regangan.

## 3-4 RUMUS PUNTIRAN

Pada kasus elastis, berdasarkan pengandaian-pengandaian di atas, di mana tegangan adalah berbanding lurus dengan regangan dan yang belakangan ini berubah pula secara linier dari pusat sumbu puntiran, *maka tegangan akan berubah pula secara linier dari sumbu pusat batang melingkar*. Tegangan tersebut yang disebabkan oleh penyimpangan-penyimpangan yang disebutkan dalam pengandaian tersebut di atas adalah *tegangan geser* yang terletak pada bidang yang sejajar dengan irisan yang diambil tegak lurus terhadap sumbu batang. Variasi tegangan tersebut digambarkan pada Gambar 3-3. Tidak seperti pada kasus batang yang berbeban aksial, tegangan ini *bukanlah* dari intensitas serba sama (uniform intensity). Tegangan geser maksimum terjadi pada titik-titik yang terjauh dari titik pusat  $O$  dan dinyatakan dengan  $\tau_{\max}$ . Titik-titik ini, seperti  $C$  pada Gambar 3-3, terletak pada irisan yang berjarak  $c$  dari titik pusat. Sementara itu, berdasarkan variasi tegangan yang linier, pada *suatu* titik tertentu pada jarak  $p$  dari  $O$ , maka tegangan geser adalah  $(p/c)\tau_{\max}$ .



Dengan menggunakan lambang  $I_p$  untuk momen inersia kutub dari luas lingkaran, maka Persamaan 3-1 dapat ditulis lebih seksama sebagai

$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{I_p} \quad (3-3)$$

Persamaan ini dikenal sebagai *rumus puntiran†* (torsion formula) untuk poros-poros lingkaran yang menyatakan tegangan geser maksimum dalam bentuk momen puntir perlawanan dan ukuran-ukuran batang. Dalam penggunaan rumus ini, momen puntir dalam  $T$  akan dinyatakan dalam newton-meter ( $\text{N}\cdot\text{m}$ )‡,  $c$  dalam meter, dan  $I_p$  dalam  $\text{m}^4$  atau  $\text{mm}^4$ . Penggunaan tersebut akan menghasilkan satuan dari tegangan geser puntir sebagai

$$\frac{[\text{N}\cdot\text{m}][\text{m}]}{[\text{m}^4]} = \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$$

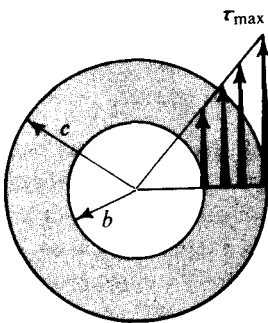
atau *pascal* dalam satuan SI.

Hubungan yang lebih umum dari Persamaan 3-3 untuk tegangan geser  $\tau$  pada *sebuah* titik tertentu pada jarak  $\rho$  dari pusat sebuah irisan adalah

$$\tau = \frac{\rho}{c} \tau_{\max} = \frac{T\rho}{I_p} \quad (3-3a)$$

Persamaan-persamaan 3-3 dan 3-3(a) *terpakai* dengan keampuhan yang sama pada *tabung-tabung berpenampang lingkaran*, karena penurunan kedua persamaan di atas menggunakan pengandaian yang sama. Kita perlu pula memodifikasikan momen inersia kutub  $I_p$ . Untuk suatu tabung, seperti dapat dilihat dalam Gambar 3-4, batas-batas integrasi untuk Persamaan 3-2 adalah dari  $b$  ke  $c$ . Jadi untuk *tabung melingkar*,

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_b^c 2\pi\rho^3 d\rho = \frac{\pi c^4}{2} - \frac{\pi b^4}{2} \quad (3-4)$$



**Gambar 3-4** Variasi tegangan dalam batang melingkar berlubang dalam daerah elastis.

† Rumus puntir telah dikembangkan oleh Coulomb, seorang insinyur Perancis, sekitar tahun 1775 dalam hubungan karyanya dalam alat-alat listrik. Namanya telah diabadikan untuk satuan besar listrik praktis.

‡ Kemungkinan lain adalah satu ( $\text{N}\cdot\text{m}$ ) sama dengan satu joule (J).

atau dinyatakan lain sebagai:  $I_p$  untuk sebuah tabung melingkar adalah sama dengan  $I_p$  untuk poros pejal dengan menggunakan diameter luar, dikurangi dengan  $I_p$  untuk poros pejal yang menggunakan diameter dalam.

Untuk tabung-tabung yang *tipis*, bila  $b$  hampir sama dengan  $c$ , dan  $c - b = t$ , yaitu tebal tabung, maka  $I_p$  menjadi lebih sederhana yaitu

$$I_p \approx 2\pi c^3 t \quad (3-4a)$$

yang dalam banyak pemakaian cukup tepat.

Konsep yang digunakan untuk mendapatkan rumus-rumus puntiran untuk batang-batang melingkar, disimpulkan sebagai berikut:

1. *Syarat-syarat keseimbangan* digunakan untuk menerangkan momen puntir dalam atau perlawanan.
2. *Deformasi* diandaikan sedemikian hingga regangan geser berubah secara linier dari sumbu poros.
3. *Sifat-sifat bahan* dalam bentuk hukum Hooke digunakan untuk menghubungkan pengandaian variasi regangan terhadap tegangan.

Hanya pokok nomor 3 yang harus dimodifikasi untuk bisa menyelesaikan sifat tak elastis dari poros-poros lingkaran terhadap tindakan momen-momen puntir.

### 3-5 CATATAN MENGENAI RUMUS PUNTIRAN

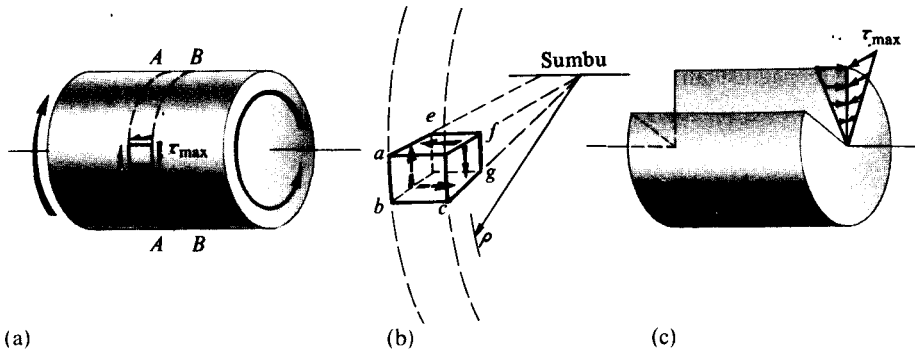
Sebegitu jauh tegangan geser yang diberikan oleh Persamaan 3-3 dan 3-3(a) dipandang hanya berlaku pada bidang potongan yang tegaklurus pada sumbu poros. Memang tegangan tersebut bekerja membentuk beberapa momen puntir terpakai luar perlawanan. Tetapi untuk memahami persoalan tersebut lebih lanjut, suatu elemen silinder kecil takberhingga,\* yang terlihat dalam Gambar 3-5(b), dipisahkan dari batang dalam Gambar 3-5(a).

Tegangan geser yang bekerja pada bidang-bidang yang tegaklurus pada sumbu batang dapat diketahui dari Persamaan 3-3(a). *Arah tegangan geser tersebut berimpit dengan arah momen puntiran perlawanan dalam.* (Ini dengan jelas dapat terlihat oleh pembaca). Dalam menghubungkan bidang-bidang sejajar dari elemen mirip cakram ini, tegangan-tegangan tersebut akan bekerja berlawanan arah. Tetapi tegangan-tegangan geser yang bekerja pada bidang potongan yang diambil tegaklurus terhadap sumbu batang *tidak dapat muncul sendirian*, seperti yang diperlihatkan dalam Pasal 2-9. Secara numerik tegangan geser yang sama harus ada pada bidang-bidang yang melalui sumbu (seperti bidang-bidang *aef* dan *bcd* dalam Gambar 3-5(b)) untuk memenuhi syarat keseimbangan statis dari elemen.†

\* Dua bidang yang tegaklurus pada sumbu batang, dua bidang melalui sumbu dan dua permukaan bidang silinder dengan radius yang berlainan biasanya digunakan untuk memisahkan elemen ini. Sifat-sifat elemen seperti ini secara matematis dinyatakan dalam koordinat-koordinat silindris.

† Perhatikan bahwa tegangan geser maksimum, seperti diperlihatkan secara diagramatis pada Gambar 3-5(a) sebenarnya bekerja pada bidang-bidang yang tegaklurus pada sumbu batang dan pada bidang-bidang yang melalui sumbu batang. Penggambaran ini diperlihatkan secara skematis. *Permukaan bebas dari poros* adalah permukaan yang bebas dari semua tegangan.





**Gambar 3-5** Keberadaan tegangan geser pada bidang-bidang yang saling sejajar dalam suatu poros yang mengalami momen puntir.

Tegangan geser yang bekerja pada bidang melalui sumbu mengikuti variasi intensitas yang sama dengan tegangan geser pada bidang yang tegak lurus pada sumbu batang. Variasi tegangan geser ini pada bidang-bidang yang saling tegak lurus sesamanya diperlihatkan pada Gambar 3-5(c), di mana sebagian dari poros telah dibuang untuk memperoleh gambaran.

Pada bahan-bahan isotropik tidaklah begitu berbeda ke arah mana tegangan geser itu bekerja. Tetapi tidak semua bahan yang digunakan dalam konstruksi adalah isotropik. Sebagai contoh, kayu memiliki perbedaan sifat-sifat kekuatan yang menonjol untuk arah yang berbeda. Kekuatan geser kayu pada bidang-bidang yang sejajar dengan urat adalah kecil sekali dibandingkan dengan yang tegak lurus pada urat. Jadi meskipun tegangan geser memiliki intensitas yang sama untuk bidang-bidang yang saling tegak lurus, tetapi poros yang terbuat dari kayu dari ukuran yang tidak memadai akan tidak sama intensitasnya secara membujur sepanjang bidang-bidang melalui sumbu. Poros-poros dari kayu jarang digunakan dalam proses-proses industri.

### CONTOH 3-2

Hitunglah tegangan geser puntir maksimum pada poros *AC* yang diperlihatkan dalam Gambar 3-1(a). Anggaplah diameter poros dari *A* ke *C* adalah 10 mm.

### PENYELESAIAN

Dari Contoh 3-1 momen puntir dalam maksimum yang ditimbulkan oleh poros ini diketahui sebesar 30 N·m. Jadi  $T = 30 \text{ N}\cdot\text{m}$  dan  $c = d/2 = 5 \text{ mm} = 0,005 \text{ m}$ . Dari Persamaan 3-2

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi(0,01)^4}{32} = 9,82 \times 10^{-10} \text{ m}^4$$

Dari Persamaan 3-3 *c = jari-jari luar*

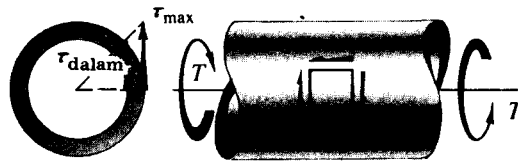
$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{I_p} = \frac{(30)(0,005)}{9,82 \times 10^{-10}} = 153 \times 10^6 \text{ N/m}^2 \text{ (atau Pa).}$$

*d = diameter*

Tegangan geser maksimum ini pada jarak 5 mm dari sumbu batang bekerja pada bidang potongan yang tegak lurus pada sumbu batang *dan* sepanjang bidang-bidang membujur yang melalui sumbu batang (Gambar 3-5(c)).

### CONTOH 3-3

Perhatikan sebuah tabung panjang dengan diameter luar,  $d_o$ , adalah 20 mm dan diameter dalam,  $d_i$  adalah 16 mm, dipuntir sekitar sumbu longitudinalnya dengan momen puntir  $T$  sebesar 40 N·m. Hitunglah tegangan geser pada tabung sebelah luar dan dalam, seperti pada Gambar 3-6.



Gambar 3-6

### PENYELESAIAN

Dari Persamaan 3-4

$$I_p = \frac{\pi(c^4 - b^4)}{2} = \frac{\pi(d_o^4 - d_i^4)}{32} = \frac{\pi(0,02^4 - 0,016^4)}{32} \\ = 9,27 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

Dari Persamaan 3-3

$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{I_p} = \frac{(40)(0,01)}{9,27 \times 10^{-9}} = 43,1 \times 10^6 \text{ N/m}^2$$

Dari Persamaan 3-3(a)

$$\tau_{\text{dalam}} = \frac{T\rho}{I_p} = \frac{(40)(0,008)}{9,27 \times 10^{-9}} = 34,5 \times 10^6 \text{ N/m}^2$$

Perhatikan, bahwa untuk sebuah tabung, dibutuhkan lebih sedikit bahan dibandingkan dengan poros pejal untuk meneruskan momen puntir yang ada dengan tegangan yang sama, karena tidak ada bahan yang bekerja dengan tegangan yang rendah. Dengan membuat tebal dinding tabung gaya kecil dan diameter yang besar, maka diperoleh tegangan geser  $\tau$  yang hampir sama dalam dinding. Kenyataan ini membuat tabung yang tipis adalah sesuai untuk percobaan-percobaan di mana suatu "medan" yang serba sama dari tegangan geser yang murni yang dikehendaki (Pasal 2-10). Untuk menghindari pengerutan atau penekukan, maka tebal dinding tabung tidak boleh terlalu tipis.

### 3-6 DISAIN BATANG PUNTIRAN MELINGKAR

Dalam mendisain bagian-bagian struktur yang menyangkut kekuatan, maka tegangan geser yang diperbolehkan haruslah dipilih. Hal ini tergantung pada keterangan yang tersedia dari percobaan dan penggunaan yang diinginkan. Keterangan yang akurat mengenai kemampuan bahan untuk melawan tegangan geser dapat diambil dari pengujian tabung berdinding tipis. Pembuatan poros yang pejal dikerjakan pada pengujian-pengujian rutin. Selanjutnya, karena batang yang melakukan puntiran sering dipakai pada peralatan daya (power), banyak percobaan mengenai fatigue (kelelahan) yang dilakukan. Berdasarkan karakteristiknya, maka tegangan geser yang dapat ditahan oleh suatu bahan adalah lebih rendah daripada tegangan normal. Peraturan ASME (American Society of Mechanical Engineers) mengenai penerusan gaya puntir poros yang dianjurkan untuk praktek memberikan harga tegangan geser yang diperbolehkan sebesar 55 MPa untuk baja sembarang dengan kekuatan geser luluh 0,3 atau kekuatan geser ultimat 0,18 betapa pun kecilnya.\* Pada disain-disain yang praktis, pembebanan yang dilakukan secara tiba-tiba dan berupa kejutan memerlukan pula perhatian yang khusus.

Bila momen puntir yang diteruskan oleh poros diketahui, dan tegangan geser maksimum telah pula dipilih, maka perbandingan-perbandingannya untuk batang tersebut menjadi pasti. Jadi dari Persamaan 3-3 diperoleh:

$$\frac{I_p}{c} = \frac{T}{\tau_{\max}} \quad (3-5)$$

di mana  $I_p/c$  adalah *parameter* yang menentukan kekuatan kenyal sebuah poros. Untuk batang yang dibebani secara aksial, parameter demikian menunjukkan luas penampang suatu batang. Untuk poros yang *pejal*,  $I_p/c = \pi c^3/2$ , di mana  $c$  adalah jari-jari luar. Dengan menggunakan pernyataan ini dan Persamaan 3-5, maka radius poros yang dikehendaki akan dapat ditentukan. Untuk poros yang *berlobang*, sejumlah tabung-tabung mempunyai harga  $I_p/c$  yang numeriknya sama, hingga soal tersebut akan mempunyai kemungkinan penyelesaian yang tidak berhingga banyaknya.

Batang-batang yang mendapat gaya puntir sangat luas digunakan sebagai poros putaran untuk mengantarkan daya. Sebagai referensi di masa depan, satuan kilowatt, yaitu satuan konversional yang dipakai dalam industri, akan dimasukkan ke dalam rumus momen puntir yang bekerja sepanjang poros. Berdasarkan definisi, 1 kW adalah kerja untuk 1000 N·m/s. Satu N·m/s adalah sama dengan 1 watt (W). Juga, ia dapat pula diambil dari dinamika di mana daya adalah sama dengan momen puntir yang dikalikan dengan sudut, diukur dalam radian, di mana poros berputar dalam satuan waktu. Untuk poros yang berputar dengan frekuensi  $f$  Hertz, maka sudut tersebut adalah  $2\pi f$  rad/detik. Jadi, bila poros meneruskan momen puntir  $T$  yang konstan diukur dalam N·m, maka kerja per satuan waktu adalah  $2\pi f T$  N·m. Dalam satuan kilowatt akan memberikan

\* Hal ini merupakan konversi lunak dari harga-harga yang standar. Rekomendasi untuk bahan-bahan lainnya dapat diperoleh dari buku-buku mengenai desain mesin. Sebagai contoh, lihatlah J.E. Shigley, *Mechanical Engineering Design* (2nd ed.), New York: McGraw-Hill, 1972, atau R.C. Juvinall, *Stress, Strain, and Strength*, New York: McGraw-Hill, 1967.

$$\text{kW (1000) [N}\cdot\text{m/s]} = 2\pi f T [\text{N}\cdot\text{m/s}]$$

$$\text{atau} \quad T = \frac{159 \text{ kW}}{f} \quad [\text{N}\cdot\text{m}] \quad (3-6)$$

di mana  $f$  adalah frekuensi dalam hertz dari poros yang meneruskan daya dalam kilowatt kW. Persamaan ini mengubah daya kilowatt yang diberikan kepada poros menjadi suatu momen puntir yang konstan yang terjadi akibat penggunaan daya tersebut.

Bila poros berputar dengan  $N$  rpm (putaran per menit), maka Persamaan 3-6 menjadi

$$T = \frac{9540 \text{ kW}}{N} \quad [\text{N}\cdot\text{m}] \quad (3-6a)$$

### CONTOH 3-4

Pilihlah sebuah poros padat untuk sebuah motor berdaya 8 kW yang bekerja pada frekuensi 30 Hz. Tegangan geser maksimum terbatas pada  $55.000 \text{ kN/m}^2$ .

### PENYELESAIAN

Dari Persamaan 3-6

$$T = \frac{159 \text{ kW}}{f} = \frac{159(8)}{30} = 42,4 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Dari Persamaan 3-5

$$\frac{I_p}{c} = \frac{T}{\tau_{\max}} = \frac{42,4}{55 \times 10^6} = 0,771 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\frac{I_p}{c} = \frac{\pi c^3}{2} \quad \text{atau} \quad c^3 = \frac{2}{\pi} \frac{I_p}{c} = \frac{2(771 \times 10^{-9})}{\pi} = 491 \times 10^{-9} \text{ m}^3$$

Jadi  $c = 0,00789 \text{ m}$  atau  $d = 2c = 0,0158 = 15,8 \text{ mm}$ .

Untuk praktisnya maka poros 16 mm dapat dipilih untuk maksud contoh di atas.

### CONTOH 3-5

Pilihlah poros-poros padat yang dapat meneruskan daya 200 kW masing-masing tanpa melebihi tegangan geser yang sebesar  $70 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ . Salah satu dari poros ini bekerja dengan putaran 20 rpm dan yang lainnya dengan 20.000 rpm.

### PENYELESAIAN

Tanda huruf 1 digunakan untuk poros berkecepatan rendah; sedang tanda huruf 2 untuk yang berkecepatan tinggi. Dari Persamaan 3-6

$$T_1 = \frac{(\text{kW})(9540)}{N_1} = \frac{(200)(9540)}{20} = 95\,400 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Dengan cara yang sama

$$T_2 = 95,4 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Dari Persamaan 3-5

$$\frac{I_{p1}}{c} = \frac{T_1}{\tau_{\max}} = \frac{95\,400}{70 \times 10^6} = 1,36 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$\frac{I_{p1}}{c} = \frac{\pi d_1^3}{16} \quad \text{atau} \quad d_1^3 = \frac{16}{\pi} (1,36 \times 10^{-3}) = 6,93 \times 10^{-3} \text{ m}^3.$$

dan  $d_1 = 0,191 \text{ m} = 191 \text{ mm}$

Dengan cara yang sama diperoleh  $d_2 = 19,1 \text{ mm}$

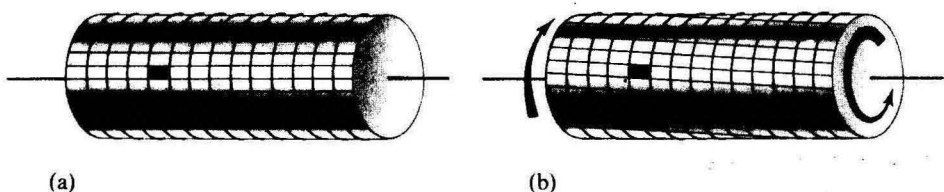
Contoh ini melukiskan kecenderungan moderen untuk menggunakan mesin-mesin yang berkecepatan tinggi dalam peralatan mekanis. Perbedaan ukuran kedua poros tersebut sangat mempengaruhi. Penghematan selanjutnya dari berat bahan dapat dilakukan dengan menggunakan tabung-tabung yang berlobang.

### 3-7 SUDUT PELINTIR BATANG MELINGKAR

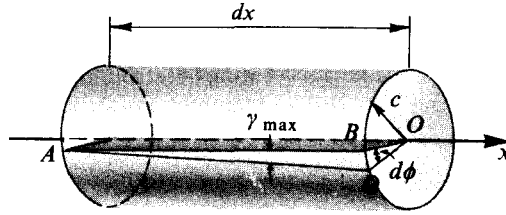
Sebegitu jauh dalam bab ini dibicarakan metoda-metoda untuk menentukan tegangan dalam poros melingkar yang padat dan berlubang yang mengalami momen puntir. Sekarang perhatian akan kita arahkan kepada metoda untuk memperoleh sudut pelintir poros yang mendapat pembebanan puntir. Yang menarik dari masalah ini paling kurang ada tiga hal. Pertama, adalah penting untuk menghitung pemuntiran dari poros itu sendiri karena tidaklah cukup hanya merancang poros dari segi kekuatan saja, tetapi juga harus diperhatikan bahwa poros tidak boleh mengalami deformasi secara berlebihan. Kemudian, besar per putaran sudut dari poros harus pula diperhatikan dalam analisis getaran puntiran dari mesin, meskipun subyek ini belum dibicarakan sekarang. Akhirnya, sudut pelintir dari bagian struktur diperhitungkan dalam kaitannya dengan masalah puntiran statis lanjutan, yang akan dibahas dalam Bab 12.

Menurut pengandaian 1 pada Pasal 3-3, bidang-bidang tegak lurus terhadap sumbu batang melingkar tidak akan melengkung. Unsur-unsur dari poros yang mengalami deformasi adalah yang seperti diperlihatkan pada Gambar 3-7(b). Elemen yang berwarna hitam dapat pula dilihat pada bentuknya sebelum distorsi pada Gambar 3-7(a). Dari poros tersebut, elemen jenis ini dengan panjang  $dx$  terlihat secara terpisah pada Gambar 3-8.

Pada elemen yang terlihat sebagai garis atau "serat" (fiber) seperti  $AB$ , mulamulanya adalah sejajar dengan sumbu poros. Setelah mengalami momen puntir, posisi-



Gambar 3-7 Poros melingkar (a) sebelum (b) sesudah mengalami momen puntir.



**Gambar 3-8** Sebuah elemen dari poros melingkar yang mengalami momen puntir.

nya yang baru menjadi  $AD$ . Pada saat yang sama, berdasarkan pengandaian 2, dari Pasal 3-3, maka radius  $OB$  yang tetap merupakan garis lurus akan berputar dengan sudut kecil  $d\phi$  menjadi posisi yang baru  $OD$ .

Dengan menyatakan sudut kecil  $DAB$  menjadi  $\gamma_{\max}$ , maka dari geometri diperoleh

$$\text{busur } BD = \gamma_{\max} dx \quad \text{atau} \quad \text{busur } BD = d\phi c$$

di mana kedua sudut adalah kecil dan di ukur dalam radian. Jadi

$$\gamma_{\max} dx = d\phi c \quad (3-7)$$

$\gamma_{\max}$  terletak hanya pada daerah "tabung" kecil takberhingga dengan tegangan geser maksimum yang serba sama  $\tau_{\max}$ . Perhatian terbatas pada tanggapan elastis secara linier, membuat hukum Hooke berlaku. Karena itu, menurut Persamaan 2-9, sudut  $\gamma_{\max}$  adalah sebanding dengan  $\tau_{\max}$  yaitu  $\gamma_{\max} = \tau_{\max}/G$ . Selanjutnya, dengan Persamaan 3-3,  $\tau_{\max} = Tc/I_p$ . Jadi  $\gamma_{\max} = Tc/(I_p G)$ .\* Dengan memasukkan pernyataan terakhir ke dalam Persamaan 3-7 dan menghilangkan  $c$  dari kedua ruas persamaan, maka

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{T}{I_p G} \quad \text{atau} \quad d\phi = \frac{T dx}{I_p G}$$

Ini adalah sudut pelintir relatif dari dua irisan yang berdampingan berjarak kecil takberhingga  $dx$ . Untuk mendapatkan sudut pelintir total  $\phi$  antara dua potongan  $A$  dan  $B$  pada sebuah poros, maka rotasi semua elemen harus dijumlahkan. Jadi pernyataan umum untuk sudut pelintir pada suatu irisan dari sebuah poros dari bahan elastis linier adalah

$$\phi = \int_A^B d\phi = \int_A^B \frac{T_x dx}{I_{px} G} \quad (3-8)$$

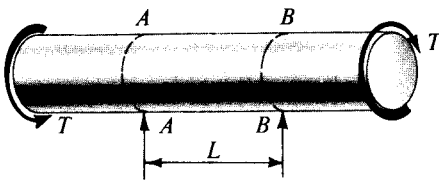
Momen puntir  $T_x$  dan momen inersia kutub  $I_{px}$  dapat berubah-ubah sepanjang sebuah poros. Arah dari sudut pelintir  $\phi$  berimpit dengan arah dari momen puntir terpakai  $T$ .

\* Pembahasan terdahulu dapat dilakukan dalam bentuk setiap  $\gamma$ , yang secara cepat menjadi kecil bila mendekati sumbu. Perbedaan hanya ditemukan dalam penurunan pengambilan busur  $BD$  pada jarak tertentu  $\rho$  dari pusat dan penggunaan  $T\rho/I_p$  sebagai pengganti  $Tc/I_p$  untuk  $\tau$ .

Persamaan 3-8 berlaku untuk kedua macam poros yang padat dan berlubang, mengikuti pengandaian yang digunakan dalam penurunan tersebut. Sudut  $\phi$  diukur dalam radian. Perhatikanlah bahwa ada kesamaan yang besar antara Persamaan 3-8 dengan Persamaan 2-3 mengenai deformasi batang berbeban aksial. Kedua contoh soal berikut menunjukkan penggunaan dari Persamaan 3-8.

### CONTOH 3-6

Hitunglah rotasi relatif dari irisan  $B-B$  terhadap irisan  $A-A$  dari poros padat yang terlihat dalam Gambar 3-9 bila suatu momen puntir konstan  $T$  diberikan sepanjang bahan tersebut. Momen inersia kutub dari luas penampang  $I_p$  adalah konstan.



Gambar 3-9

### PENYELESAIAN

Dalam hal ini  $T_x = T$  dan  $I_{px} = I_p$ ; jadi dari Persamaan 3-8'

$$\phi = \int_A^B \frac{T_x dx}{I_{px} G} = \int_0^L \frac{T dx}{I_p G} = \frac{T}{I_p G} \int_0^L dx = \frac{TL}{I_p G} \quad (3-9)$$

Persamaan 3-9 ini adalah suatu hubungan yang penting. Ia dapat digunakan untuk mendisain poros-poros mengenai kekakuan (stiffness) yaitu pembatasan besar pelintiran yang dapat terjadi di sepanjang poros. Pada penggunaan seperti itu,  $T$ ,  $L$  dan  $G$  adalah besaran-besaran yang diketahui, sedang hasil Persamaan 3-9 akan memberikan harga  $I_p$ . Ini akan menentukan ukuran poros yang dikehendaki (lihat Persamaan-persamaan 3-2 dan 3-4). Perhatikanlah bahwa persyaratan kekakuan  $I_p$  merupakan parameter yang lebih penting dibandingkan dengan persyaratan kekuatan,  $I_p/c$ . Persamaan ini digunakan pada analisis gerak puntiran. Bentuk  $I_p G$  adalah merupakan *kekakuan puntir* (torsional stiffness) dari poros tersebut.

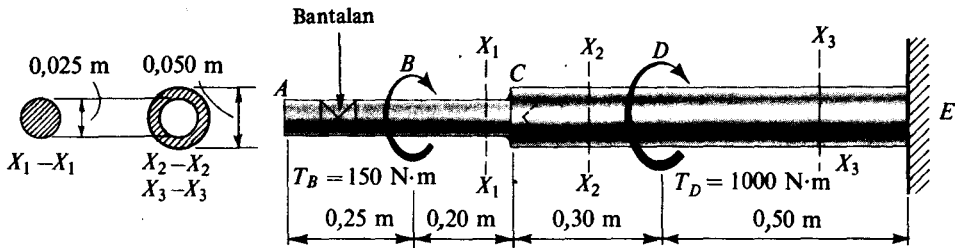
Penggunaan lain dari Persamaan 3-9 dapat ditemukan dalam laboratorium. Sebuah poros diberikan suatu momen puntir yang diketahui  $T$ , maka momen inersia kutub  $I_p$  dapat dihitung berdasarkan ukuran contoh, sedang sudut relatif rotasi  $\phi$  dari dua bidang yang berjarak  $L$  dapat pula diukur. Kemudian dengan menggunakan Persamaan 3-9, maka modulus elastisitas geser dalam daerah elastisnya dapat pula dihitung yaitu  $G = TL/I_p \phi$ .

Dengan menggunakan Persamaan 3-9, perhatikanlah bahwa sudut  $\phi$  harus dinyatakan dalam radian. Juga dengan mengamati kesamaan antara Persamaan 3-9 dan 2-4, maka  $\Delta = PL/AE$ , yang dahulunya diturunkan untuk batang-batang berbeban aksial.



**CONTOH 3-7**

Perhatikanlah poros berjenjang yang terlihat pada Gambar 3-10, yang ditempelkan pada suatu dinding pada  $E$  dan tentukanlah besar rotasi pada ujung  $A$  bila kedua momen puntir pada  $B$  dan  $D$  diberikan. Anggaplah bahwa modulus geser  $G$  adalah  $80 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ , yaitu suatu harga yang khas untuk baja.

**Gambar 3-10****PENYELESAIAN**

Dari Persamaan 3-2,

$$I_{pAB} = I_{pBC} = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi(2,5 \times 10^{-2})^4}{32} = 3,83 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

Dari Persamaan 3-4

$$I_{pCD} = I_{pDE} = \frac{\pi}{32}(d_o^4 - d_i^4) = \frac{\pi}{32}(5^4 - 2,5^4)10^{-8} = 57,5 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

di mana tanda-tanda huruf menunjukkan daerah penggunaan dari nilai yang diberikan. Kemudian dengan melewati irisan-irisan yang ditentukan sebagai  $X_1-X_1$ ,  $X_2-X_2$  dan  $X_3-X_3$  dan setiap kali meninjau bagian poros yang terletak sebelah kiri masing-masing irisan, maka momen puntir dalam untuk berbagai selang akan diperoleh menjadi

$$T_{AB} = 0, \quad T_{BD} = T_{BC} = T_{CD} = 150 \text{ N}\cdot\text{m}, \quad T_{DE} = 1150 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Untuk mendapatkan rotasi pada ujung  $A$ , maka Persamaan 3-8 dapat digunakan dengan batas integrasi terputus pada titik-titik, di mana  $T_s$  atau  $I_{ps}$  berubah harga secara tiba-tiba.

$$\phi = \int_E^A \frac{T_x dx}{I_{px} G} = \int_E^D \frac{T_{DE} dx}{I_{pDE} G} + \int_D^C \frac{T_{CD} dx}{I_{pCD} G} + \int_C^B \frac{T_{BC} dx}{I_{pBC} G} + \int_B^A \frac{T_{AB} dx}{I_{pAB} G}$$

Pada kelompok integral yang terakhir, harga-harga  $T$  dan  $I_p$  adalah konstan antara batas-batas integrasi yang bersangkutan, jadi jawab hasil masing-masing integral dapat diketahui, yaitu dari Persamaan 3-9. Jadi

$$\phi = \frac{T_{DE} L_{DE}}{I_{pDE} G} + \frac{T_{CD} L_{CD}}{I_{pCD} G} + \frac{T_{BC} L_{BC}}{I_{pBC} G} + \frac{T_{AB} L_{AB}}{I_{pAB} G}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(1150)(0,5)}{(57,5 \times 10^{-8})80 \times 10^9} + \frac{(150)(0,3)}{(57,5 \times 10^{-8})80 \times 10^9} \\
&\quad + \frac{(150)(0,2)}{(3,83 \times 10^{-8})80 \times 10^9} + 0 \\
&= 0,0125 + 0,0010 + 0,0098 \\
&= 0,0233 \text{ radian} \quad \text{atau} \quad (360/2\pi)(0,0233) = 1,33^\circ
\end{aligned}$$

Bagian  $AB$  dari poros tidak memberikan sumbangan kepada harga sudut  $\phi$  karena tidak ada momen puntir dalam yang bekerja pada bagian tersebut. Ia berputar berdasarkan rotasi irisan pada titik  $B$ . Pengaruh yang kecil terhadap sudut  $\phi$  berasal dari bagian poros antara titik-titik  $C$  dan  $D$  karena bagian segmen ini memiliki momen puntir yang kecil dan harga  $I_p$  yang besar. Tidak perlu disangsikan bahwa ada pengaruh gangguan regangan pada jenjang poros, tetapi pengaruh setempat ini memainkan peranan kecil terhadap keseluruhan rotasi.

Sudut yang dihitung haruslah sama benarnya untuk rotasi relatif dari masing-masing irisan untuk soal yang semacam dari poros yang berotasi.

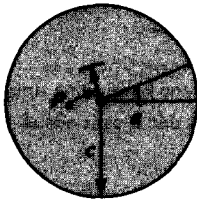
### \*3-8 TEGANGAN GESER DAN DEFORMASI DALAM POROS MELINGKAR DALAM DAERAH TAK ELASTIS

Rumus-rumus puntiran pada irisan-irisan yang berbentuk lingkaran telah kita turunkan berdasarkan hukum Hooke. Rumus itu hanya berlaku untuk titik di mana batas proporsional dari bahan dalam geser dicapai untuk poros tersebut. Sekarang penyelesaian masalah ini akan kita perluas hingga mencakup sifat tak elastis dari bahan. Seperti sebelumnya maka syarat keseimbangan dari irisan harus dipenuhi. Sedangkan pengendalian dalam deformasi mengenai perubahan linier dari regangan terhadap sumbu masih tetap diberlakukan. Perbedaannya hanyalah sifat bahan mempengaruhi pula pada penyelesaian masalah ini.

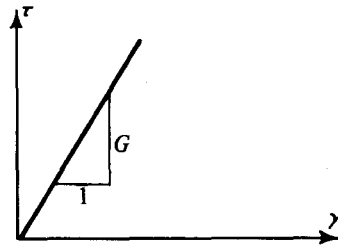
Suatu irisan dari sebuah poros terlihat dalam Gambar 3-11(a). Variasi regangan linier tampak secara skematis pada gambar tersebut. Beberapa sifat mekanis yang mungkin dari geser dapat diperoleh, umpamanya dengan percobaan puntiran tabung tipis, seperti yang terlihat dalam Gambar-gambar 3-11(b), (c) dan (d). Distribusi tegangan geser yang sesuai dapat dilihat di sebelah kanan dari garfik hubungan tegangan-regangan untuk masing-masing kasus. Tegangan tersebut ditentukan dari regangan. Misalnya, bila regangan adalah  $a$  pada bagian dalam cincin, Gambar 3-11(a), maka tegangan yang sesuai dapat ditemui dari diagram tegangan-regangan. Prosedur ini berlaku baik untuk poros-poros padat maupun poros-poros yang terbuat dari tabung yang konsentris dari bahan-bahan yang berbeda, yang memiliki diagram tegangan-regangan untuk dapat dipergunakan. Penurunan untuk bahan yang elastis secara linier merupakan hal yang khusus dari pendekatan ini.

Sesudah distribusi tegangan diketahui, maka momen puntir  $T$  yang diakibatkan oleh tegangan-tegangan ini dapat diperoleh dengan cara yang lalu yaitu

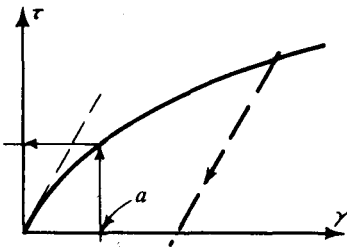
$$T = \int_A [\tau(dA)]\rho \quad (3-10)$$



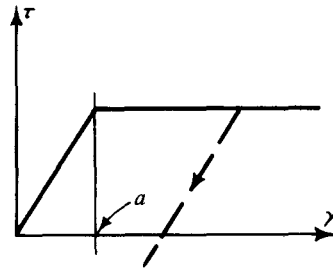
(a) Variasi regangan yang diandaikan



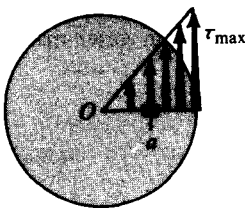
(b)



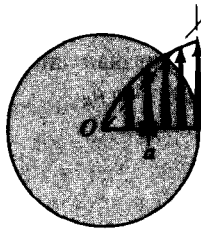
(c)



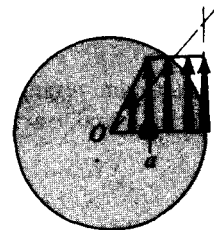
(d) Hubungan tegangan-regangan



(e)



(f)

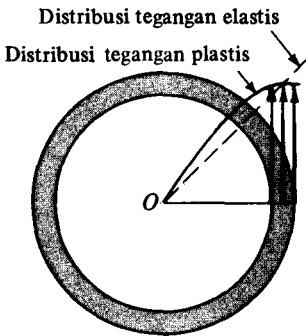


(g) Distribusi tegangan yang bersangkutan

**Gambar 3-11** Tegangan pada poros-poros melingkar.

Prosedur-prosedur yang analitis ataupun grafis dapat digunakan untuk menyelesaikan integral ini.

Meskipun distribusi tegangan-regangan sesudah batas kenyal dilampaui adalah bukan linier dan rumus puntiran Persamaan 3-3 tidak berlaku lagi, kadang-kadang dipergunakan penghitungan tegangan khayal untuk momen puntir ultimat. Tegangan yang diperoleh disebut *modulus pecah* (modulus of rupture); lihatlah ordinat terbesar dari garis putus-putus pada Gambar-gambar 3-11(f) dan (g). Modulus ini berlaku sebagai indeks kasar dari kekuatan puntiran ultimat dari bahan. Ditinjau dari sifat mekanis bahan, maka distribusi tegangan untuk tabung berdinding tipis, seperti dalam Gambar 3-12, adalah mendekati sama. Dengan alasan ini maka percobaan-percobaan tabung berdinding tipis sangat luas dipergunakan dalam mendapatkan diagram tegangan-regangan geser.



Gambar 3-12 Pada tabung-tabung yang berdinding tipis perbedaan tegangan antara elastis dan plastis adalah kecil.

Bila sebuah poros diregangkan sampai daerah plastis dan kemudian momen puntir dihilangkan kembali, maka gelang "imaginer" akan kembali ke bentuk semula secara kenyal. Karena perbedaan dalam lintasan regangan yang mengakibatkan kekencangan permanen dari bahan, maka timbullah tegangan residu. Proses ini akan dilukiskan pada salah satu contoh yang berikut.

Untuk menerangkan derajat pelintir dari poros atau tabung melingkar, maka Persamaan 3-7 dapat digunakan dalam bentuk yang berikut :

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\gamma_{\max}}{c} = \frac{\gamma_a}{\rho_a} \quad (3-11)$$

Jadi diagram tegangan-regangan digunakan untuk menentukan regangan geser maksimum pada jarak  $c$  ataupun regangan pada  $\rho_a$ .

### CONTOH 3-8

Suatu poros baja padat dengan diameter 24 mm dipelintir kuat sekali sehingga hanya bagian dalam dari baja yang berdiameter 8 mm yang tidak berubah bentuknya, seperti yang terlihat dalam Gambar 3-13(a). Bila sifat-sifat bahan dapat diidealisasikan seperti terlihat dalam Gambar 3-13(b), berapakah tegangan sisa dan rotasi sisa yang tertinggal untuk melepaskan momen puntir tersebut.

### PENYELESAIAN

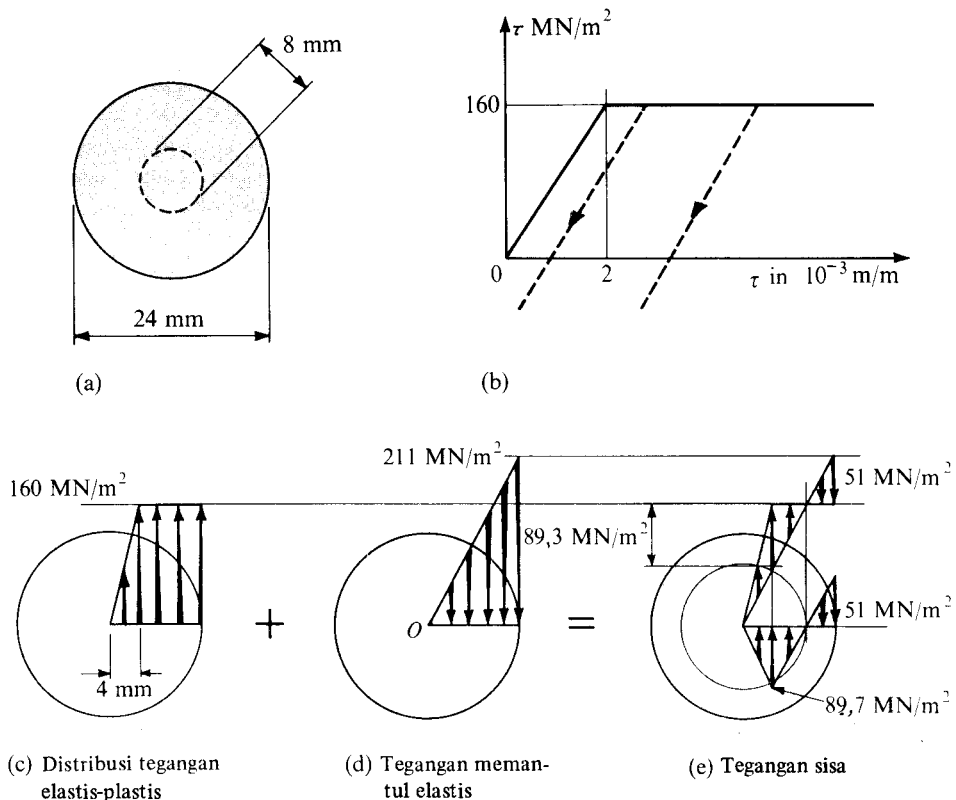
Sebagai permulaan, maka harga momen puntir terpakai awal dan sudut pelintir yang bersangkutan harus ditentukan terlebih dahulu. Distribusi tegangan yang sesuai dengan syarat yang diberikan dapat dilihat dalam Gambar 3-13(c). Tegangan tersebut berubah secara linier dari 0 ke  $160 \text{ MN/m}^2$  bila  $0 \leq \rho \leq 4 \text{ mm}$ ; tegangan tersebut adalah tetap sebesar  $160 \text{ MN/m}^2$  untuk  $\rho > 4 \text{ mm}$ . Persamaan 3-10 dapat digunakan untuk menentukan momen puntir terpakai  $T$ . Pelepasan momen puntir  $T$  akan mengakibatkan tegangan elastis dan Persamaan 3-3 dapat digunakan. Seperti terlihat dalam Gambar 3-13(d). Perbedaan antara kedua distribusi tegangan, di mana tidak ada momen puntir luar, memberikan tegangan sisa.

$$\begin{aligned}
 T &= \int_A \tau \rho \, dA = \int_0^c 2\pi \tau \rho^2 \, d\rho = \int_0^{0,004} \left[ \frac{\rho}{0,004} 160 \right] 2\pi \rho^2 \, d\rho \\
 &\quad + \int_{0,004}^{0,012} (160) 2\pi \rho^2 \, d\rho = (16 + 557) 10^{-6} \text{ MN}\cdot\text{m} \\
 &= 573 \times 10^{-6} \text{ MN}\cdot\text{m} = 573 \text{ N}\cdot\text{m}
 \end{aligned}$$

(Perhatikanlah betapa kecilnya pengaruh integral yang pertama)

$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{I_p} = \frac{573 \times 0,012}{(\pi/32)(0,024)^4} = 211 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 211 \text{ MN/m}^2$$

Pada  $\rho = 12 \text{ mm}$ ,  $\tau_{\text{sisia}} = 211 - 160 = 51 \text{ MN/m}^2$ .



Gambar 3-13

Dua diagram tegangan sisa tersebut dapat dilihat dalam Gambar 3-13(e). Untuk lebih jelasnya hasil-hasil harga awal dari tegangan tersebut digambarkan kembali dengan menarik garis horizontal. Pada daerah poros yang bergaris-garis dari diagram tersebut,

tegangan sisa tersebut mempunyai arah menurut jarum jam; sedang pada bagian sebelah dalam dari poros terdapat tegangan sisa yang tepat sama dengan arah yang berlawanan.

Rotasi awal dapat ditentukan dengan menghitung puntiran dari daerah kenyal poros. Pada  $\rho = 4 \text{ mm}$ ,  $\gamma = 2 \times 10^{-3}$ . Pemantulan kembali secara elastis dari poros tersebut ditentukan dari Persamaan 3-9. Perbedaan puntiran antara tak-elastis dengan elastis memberikan rotasi sisa per satuan panjang poros. Bila momen puntir awal diberlakukan kembali menurut arah yang sama maka poros akan memberikan tanggapan secara elastis

$$\text{Tak-elastis : } \frac{d\phi}{dx} = \frac{\gamma_a}{\rho_a} = \frac{2 \times 10^{-3}}{0,004} = 0,5 \text{ rad/m}$$

$$\text{Elastis : } \frac{d\phi}{dx} = \frac{T}{I_p G} = \frac{573}{(\pi/32)(0,024)^4(80) \times 10^9} = 0,22 \text{ rad/m}$$

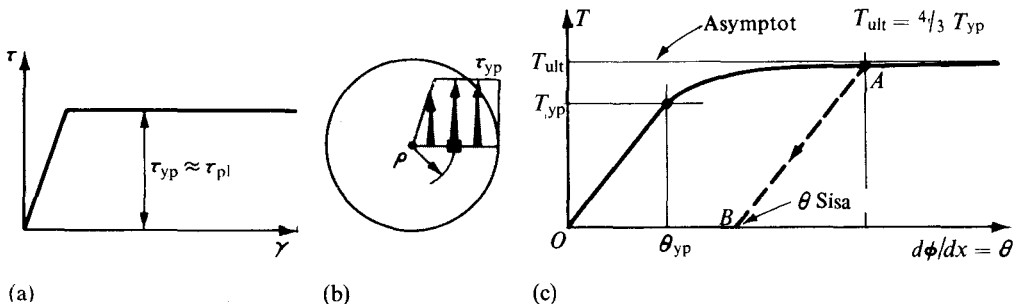
$$\text{Sisa: } \frac{d\phi}{dx} = 0,5 - 0,22 = 0,28 \text{ rad/m}$$

### CONTOH 3-9

Tentukanlah momen puntir yang dibawa oleh poros melingkar padat dari baja lunak bila tegangan geser di atas batas proporsional pada dasarnya tercapai di mana-mana dari poros tersebut. Diagram tegangan-regangan geser untuk baja lunak dapat diidealisasikan seperti Gambar 3-14(a). Tegangan titik luluh geser  $\tau_{yp}$  diambil sama dengan tegangan geser batas proporsional  $\tau_{pl}$ .

### PENYELESAIAN

Bila suatu momen puntir yang besar dipaksakan pada sebuah batang, maka regangan-regangan besar terjadi di mana-mana dari bagian tersebut kecuali di sekitar pusatnya, terhadap regangan-regangan yang besar dari bahan seideal yang ditinjau tersebut, tegangan geser titik luluh akan tercapai di mana-mana kecuali pada sekitar pusat batang. Demikian pula, perlawanan terhadap momen puntir terpakai yang dilakukan oleh bahan yang terdapat di sekitar pusat poros diabaikan karena  $\rho$  yang bersangkutan adalah kecil dalam Gambar 3-14(b). (Perhatikanlah pengaruh terhadap momen puntir  $T$  dari tindakan kenyal pada Contoh 3-8). Jadi sampai tingkat ketelitian yang cukup dapat diandaikan



Gambar 3 14

bahwa suatu tegangan geser yang tetap  $\tau_{yp}$  dapat diperoleh di mana-mana pada irisan yang ditinjau. Momen puntir yang memenuhi syarat ini dapat ditinjau sebagai momen puntir ultimat atau batas. (Gambar 3-14(c) memberikan dasar yang lebih membenarkan pernyataan ini). Jadi

$$\begin{aligned} T_{ult} &= \int_A (\tau_{yp} dA) \rho = \int_0^c 2\pi \rho^2 \tau_{yp} d\rho = \frac{2\pi c^3}{3} \tau_{yp} \\ &= \frac{4}{3} \frac{\tau_{yp}}{c} \frac{\pi c^4}{2} = \frac{4}{3} \frac{\tau_{yp} I_p}{c} \end{aligned} \quad (3-12)$$

Perhatikanlah bahwa menurut Persamaan 3-3 kapasitas momen puntir elastis maksimum dari sebuah poros padat adalah  $T_{yp} = \tau_{yp} I_p / c$ . Karena  $T_{ult}$  adalah  $\frac{4}{3}$  kali harga ini, maka harga  $33\frac{1}{3}$  persen dari kapasitas momen puntir yang tertinggal setelah  $\tau_{yp}$  tercapai pada saat poros sangat bersifat karet. Suatu gambar yang melukiskan momen puntir  $T$  terhadap  $\theta$ , yaitu sudut pelintir per satuan jarak. Sebagai plastisitas penuh dapat dilihat dalam Gambar 3-14(c). Titik  $A$  sesuai dengan hasil-hasil yang diperoleh pada contoh sebelumnya; garis  $AB$  adalah pemantulan kenyal, dan titik  $B$  adalah  $\theta$  sisa untuk soal yang sama.

Harus diperhatikan pula bahwa oleh karena sifat-sifat kelelahan dari bahan, maka pada bagian-bagian mesin, kapasitas statis ultimat dari poros-poros yang dievaluasi di sini acap kali kecil artinya.

### \*3-9 KONSENTRASI TEGANGAN

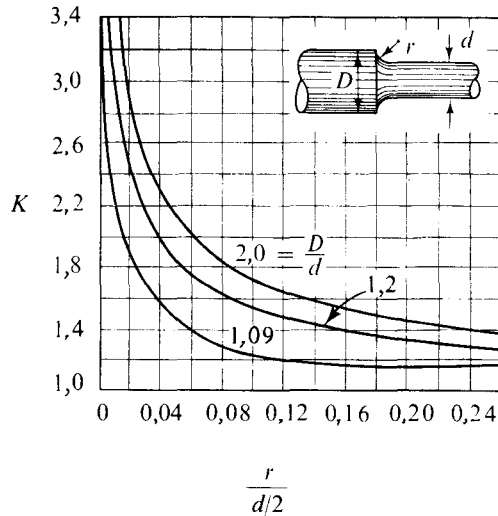
Persamaan-persamaan 3-3, 3-3a dan 3-5 berlaku hanya terhadap poros-poros padat dan tabung di mana bahannya bersifat elastis. Selain itu, luas penampang lintang di sepanjang poros haruslah diambil konstan. Bila yang terjadi adalah diameter berubah secara *berangsur-angsur*, maka persamaan-persamaan di atas memberikan penyelesaian yang memuaskan. Pada pihak lain, untuk poros-poros yang berjenjang di mana diameter pada pertemuan jenjang tersebut berubah secara tiba-tiba, maka gangguan-gangguan besar terjadi pada tegangan geser. Tegangan-tegangan geser *lokal* yang tinggi terjadi pada titik-titik yang jauh dari pusat poros. Metode untuk menentukan konsentrasi tegangan lokal ini berada di luar ruang lingkup pelajaran ini. Tetapi dengan membentuk suatu perbandingan antara tegangan geser maksimum yang sesungguhnya dengan tegangan maksimum yang diberikan oleh Persamaan 3-3, maka dapat diperoleh suatu faktor konsentrasi tegangan puntiran. Suatu metoda yang serupa dapat pula digunakan untuk mendapatkan faktor-faktor konsentrasi tegangan untuk bagian-bagian struktur yang berbeban secara aksial. (Pasal 2-11). Faktor konsentrasi tegangan ini hanya bergantung pada keadaan geometris batang. Faktor-faktor konsentrasi tegangan untuk berbagai ukuran untuk poros-poros bulat yang berjenjang diperlihatkan dalam Gambar 3-15.\*

Untuk mendapatkan tegangan yang sesungguhnya pada suatu poros berjenjang yang diskontinu secara geometris, maka kita pilihlah kurva untuk  $D/d$  yang khusus seperti

\* Gambar ini diambil dari suatu tulisan L.S. Jacobsen, "Torsional-Stress Concentrations in Shafts of Circular Cross-section and Variable Diameter," *Trans. ASME*, 1962, vol. 47, hal. 632.

$yp = \text{yield point} = \text{titik luluh} = \text{titik leleh}$





**Gambar 3-15** Faktor konsentrasi tegangan puntir pada poros-poros melingkar dua dimensi.

yang terlihat dalam Gambar 3-15. Kemudian, terhadap perbandingan  $r/(d/2)$  yang diberikan, faktor konsentrasi tegangan  $K$  dapat dibaca dari kurva. Akhirnya, dari definisi  $K$ , maka tegangan geser maksimum yang sesungguhnya dapat kita peroleh dari Persamaan 3-3 yang dimodifikasi, yaitu :

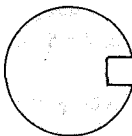
$$\tau_{\max} = K \frac{Tc}{I_p} \quad (3-3b)$$

di mana tegangan geser  $Tc/I_p$  ditentukan untuk poros yang lebih kecil.

Suatu pembahasan faktor konsentrasi tegangan diperlihatkan dalam Gambar 3-15 yang menitikberatkan pada kebutuhan radius  $r$  yang sangat kecil pada perpindahan diameter poros yang dibuat untuk semua irisan.

Penghasil tegangan yang berarti terjadi pula pada poros-poros pada lubang-lubang minyak dan pada alur pasak untuk pemasangan katrol dan roda gigi pada poros. Sebuah poros yang dipersiapkan untuk sebuah kunci, seperti dalam Gambar 3-16, tidak selalu berupa sebuah batang melingkar. Tetapi berdasarkan prosedur yang disarankan oleh ASME, untuk desain yang biasa, maka penghitungan poros-poros dengan alur pasak dibuat dengan menggunakan Persamaan 3-3 atau 3-5, sedangkan tegangan geser ijin *berkurang* dengan 25%. Ini dianggap mengimbangi konsentrasi tegangan dan pengurangan luas penampang.

Oleh karena pengaruh beberapa sifat tak elastis atau bukan linier dari bahan-bahan yang sesungguhnya, untuk pertimbangan yang serupa dengan yang dikemu-

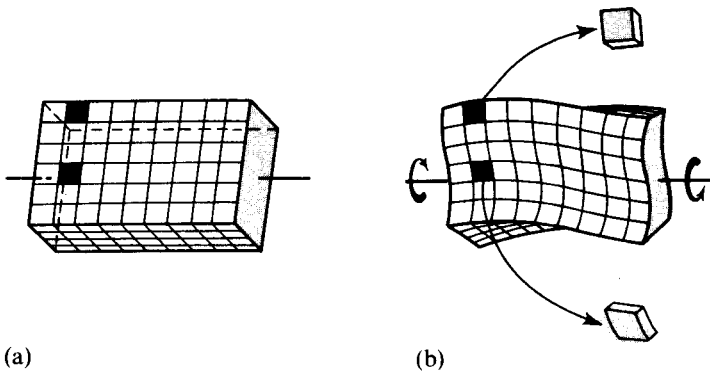


**Gambar 3-16** Sebuah poros melingkar dengan alur pasak

kakan dalam Pasal 2-11, maka konsentrasi tegangan teoretis yang didasarkan pada sifat elastis linier dari bahan, cenderung menjadi tinggi.

### \*3-10 BATANG PADAT BUKAN MELINGKAR

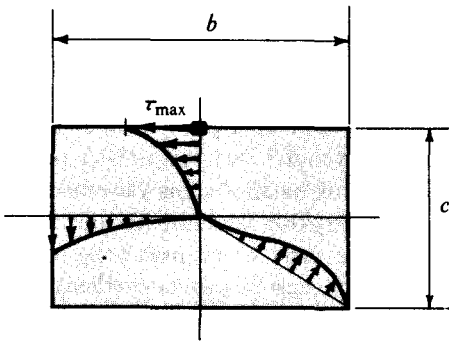
Pemecahan analitis dari batang puntiran yang padat bukan melingkar adalah di luar jangkauan buku ini. Secara matematis masalah ini adalah rumit.\* Dua pengandaian pertama yang dikemukakan dalam Pasal 3-3 tidak berlaku untuk batang-batang yang bukan melingkar. Irisan yang tegak lurus terhadap sumbu bagian struktur akan melengkung bila dikenakan momen puntir. Hakekat distorsi yang terdapat pada suatu irisan yang berbentuk sikuempat dapat dilihat pada Gambar 3-17.† Untuk bagian bangunan berbentuk sikuempat, amat mengherankan, bila elemen-elemen pada sudut tidak mengalami distorsi sama sekali. Tegangan geser pada sudut-sudut adalah nol sedang pada tengah-tengah sisi yang panjang tegangan tersebut menjadi maksimum. Gambar 3-18 memperlihatkan distribusi tegangan geser di sepanjang tiga garis radial yang berasal dari titik pusat. Khususnya perhatikanlah perbedaan distribusi tegangan ini dengan yang ada pada irisan yang berbentuk lingkaran. Untuk yang terakhir, tegangan tersebut adalah maksimum pada titik-titik yang terjauh dari pusat, sedang pada yang pertama, tegangan tersebut adalah nol pada titik yang terjauh. Keadaan ini dapat dijelaskan dengan memperhatikan elemen sudut seperti yang terlihat dalam Gambar 3-19. Bila tegangan geser  $\tau$  ada pada sudut, ia harus terurai ke dalam dua komponen yang sejajar dengan ujung-ujung batang. Tetapi, karena geser selalu muncul berpasangan pada bidang-bidang yang saling tegak lurus, maka komponen-komponen ini haruslah dipenuhi oleh geser yang terletak pada bidang-bidang dari permukaan luar. Keadaan yang terakhir tidaklah mungkin



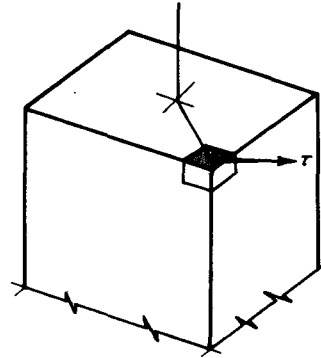
Gambar 3-17 Poros sikuempat (a) sebelum (b) sesudah dikenakan momen puntir.

\* Persoalan ini tetap belum terpecahkan sampai seorang ahli dalam bidang kekenyalan yang terkenal dari Perancis B. de St. Venant, mengembangkan suatu penyelesaian persoalan-persoalan yang serupa pada tahun 1853. Persoalan puntiran yang umum sering disebut sebagai persoalan St. Venant.

† Suatu percobaan dengan karet penghapus yang digoresi oleh garis-garis yang sejajar dengan sisi-sisi karet penghapus tersebut hingga membentuk susunan segiempat pada permukaannya dapat mendemonstrasikan jenis distorsi ini.



**Gambar 3-18** Distribusi tegangan geser pada poros sikuempat yang mengalami momen puntir



**Gambar 3-19** Tegangan geser tidak terlihat pada elemen sudut

karena tegangan pada permukaan luar tidaklah ada. Jadi  $\tau$  adalah nol. Peninjauan yang serupa berlaku pula untuk titik-titik yang lain pada perbatasan. Semua tegangan geser pada bidang suatu potongan dekat perbatasan akan bekerja sejajar dengan perbatasan tersebut.

Pemecahan analitis untuk batang yang kenyal dengan puntiran segiempat telah kita dapatkan.\* Metoda-metoda yang digunakan berada di luar jangkauan buku ini. Meskipun demikian, hasil-hasil akhir dan analisis seperti itu, yang akan menarik perhatian kita. Untuk tegangan geser maksimum (lihat Gambar 3-18) dan sudut pelintir, hasil-hasil ini dapat dimasukkan ke dalam bentuk yang berikut

$$\tau_{\max} = \frac{T}{\alpha b c^2} \quad \text{dan} \quad \phi = \frac{TL}{\beta b c^3 G} \quad (3-13)$$

$T$  seperti sebelumnya adalah momen puntir terpakai;  $b$  adalah sisi yang panjang dan  $c$  sisi yang pendek dari irisan yang berbentuk sikuempat. Harga dari parameter-parameter  $\alpha$  dan  $\beta$  tergantung pada perbandingan  $b/c$ . Beberapa harga ini tertulis dalam tabel di bawah. Untuk irisan-irisan yang tipis, bila  $b$  jauh lebih besar dari  $c$ , harga-harga  $\alpha$  dan  $\beta$  mendekati  $\frac{1}{3}$ .

**TABEL KOEFISIEN UNTUK POROS SIKUEMPAT**

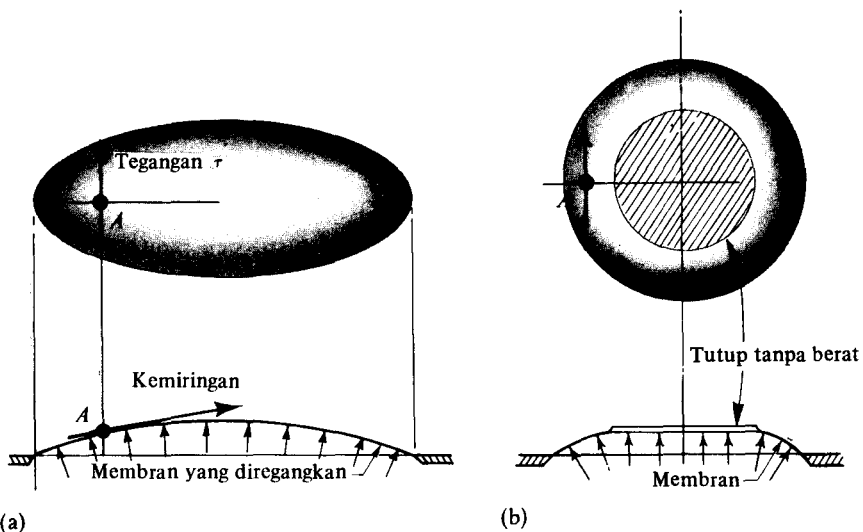
| $b/c$    | 1,00  | 1,50  | 2,00  | 3,00  | 6,00  | 10,0  | $\infty$ |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| $\alpha$ | 0,208 | 0,231 | 0,246 | 0,267 | 0,299 | 0,312 | 0,333    |
| $\beta$  | 0,141 | 0,196 | 0,229 | 0,263 | 0,299 | 0,312 | 0,333    |

\* S. Timoshenko dan J.N. Goodier, *Theory of Elasticity* (3rd ed.), New York: McGraw-Hill, 1970, hal. 312.

Rumus-rumus seperti di atas diperoleh pula untuk jenis-jenis luas penampang lain pada buku-buku yang lebih lanjut. Untuk kasus yang tidak dapat dengan cara memuaskan diselesaikan secara matematis, suatu metoda yang luar biasa telah dipikirkan.\* Terjadi bahwa penyelesaian persamaan differensial parsial untuk persoalan puntiran kenyal secara matematis adalah sama dengan persamaan untuk membran (selaput) tipis, seperti lapisan tipis sabun yang dikencangkan sedikit di atas sebuah lubang. Lubang ini haruslah sama secara geometris dengan penampang poros yang sedang kita pelajari. Tekanan udara ringan haruslah dijaga tetap pada salah satu sisi dari membran. Selanjutnya kenyataan-kenyataan yang berikut dapat kita lihat :

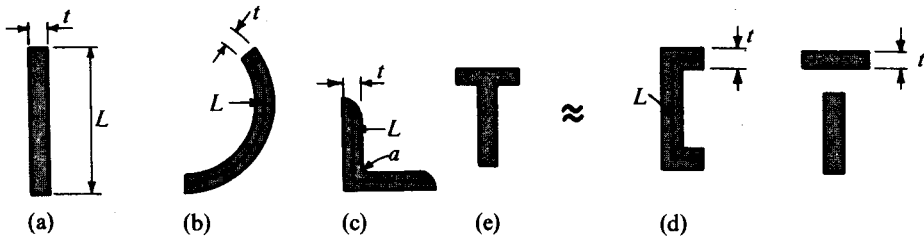
1. Tegangan geser pada setiap titik adalah sebanding dengan kemiringan membran yang diregangkan pada titik tersebut, lihat Gambar 3-20.
2. Arah dari tegangan geser tertentu pada suatu titik adalah tegak lurus pada kemiringan membran tersebut pada titik yang sama, lihat Gambar 3-20.
3. Dua kali volume yang dilingkupi oleh membran adalah sebanding dengan momen puntir yang dibawa oleh irisan tersebut.

Analogi yang terlebih dahulu, disebut *analogi membran* (membrane analogy). Sebagai tambahan terhadap kegunaan dalam pemakaian percobaan, merupakan suatu alat mental yang sangat bermanfaat untuk membayangkan kapasitas tegangan dan momen puntir dari bagian-bagian struktur. Umpamanya, semua irisan yang diperlihatkan oleh Gambar 3-21 dapat membawa momen puntir yang hampir sama pada tegangan geser maksimum yang sama (kemiringan membran maksimum yang sama) karena volume yang dilingkupi oleh membran hampir sama dalam semua keadaan. (Untuk



**Gambar 3-20** Analogi membran (a) daerah yang dihubungkan sederhana (b) daerah (berbentuk tabung) yang dihubungkan berkali-kali

\* Analogi ini diperkenalkan oleh ahli ilmu teknik Jerman, L. Prandtl, pada tahun 1903.



**Gambar 3-21** Batang-batang yang mempunyai luas penampang yang sama dengan ketebalan yang sama membawa momen puntir yang sama

semua bentuk ini,  $b = L$  dan  $c = t$  pada Pers. 3-13). Tetapi menggunakan sedikit imajinasi akan meyakinkan pembaca bahwa garis-garis kontur dari lapisan sabun akan "bertumpuk-tumpuk" pada jarak  $a$  untuk irisan yang berbentuk sudut. Jadi tegangan lokal yang tinggi akan terjadi pada titik itu.

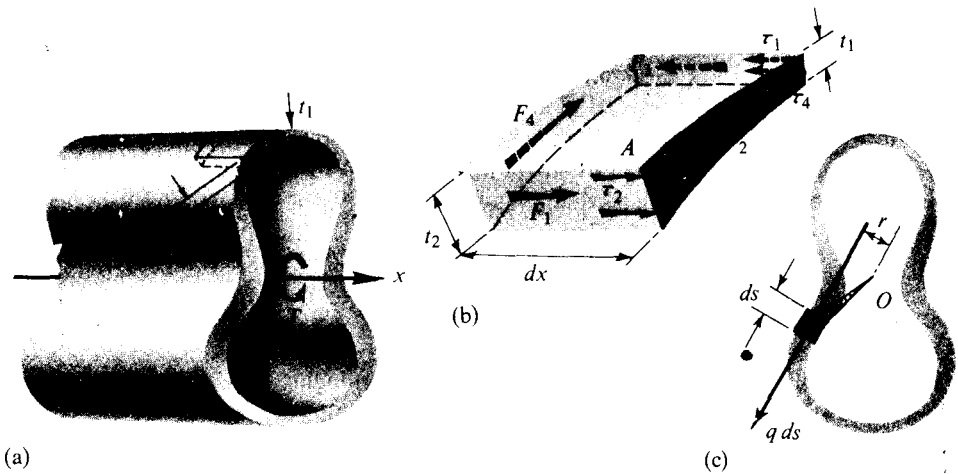
Analogi yang lain, yaitu *analogi timbunan pasir* (sand-heap analogy), telah dilakukan pada puntiran plastis.\* Pasir kering dituangkan ke atas permukaan datar yang ditinggikan yang mempunyai bentuk penampang batang tersebut. Permukaan timbunan pasir tersebut terbentuk menurut kemiringan yang tetap. Umpamanya, suatu kerucut yang terbentuk di atas keping lingkaran, atau piramida pada alas bujursangkar. Kemiringan maksimum yang tetap dari pasir tersebut sesuai dengan pembatasan permukaan membran pada analogi terdahulu. Volume dari timbunan pasir, jadi beratnya, adalah sebanding dengan momen puntir plastis penuh yang dibawa oleh sebuah batang. Hal lain yang berhubungan dengan permukaan pasir mempunyai penafsiran yang serupa dengan yang terdapat pada analogi membran.

### \*3-11 BATANG RONGGA DINDING TIPIS

Tidak seperti batang bukan melingkar yang padat, maka tabung ber dinding tipis dari bentuk apa pun dapat dianalisis secara lebih sederhana untuk mendapatkan besaran tegangan geser dan sudut pelintir yang disebabkan oleh momen puntir pada tabung tersebut. Jadi, tinjaulah suatu tabung dari bentuk tertentu dengan pelbagai ketebalan dinding, seperti yang terlihat dalam Gambar 3-22(a) yang memperoleh suatu momen puntir  $T$ . Pisahkanlah sebuah elemen dari tabung ini, seperti yang terlihat dalam Gambar 3-22(b) dengan skala yang diperbesar. Elemen ini haruslah berada dalam keseimbangan di bawah pengaruh gaya-gaya  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  dan  $F_4$ . Gaya-gaya ini sama dengan tegangan geser yang bekerja pada bidang-bidang potongan dikalikan dengan luas-luas yang bersangkutan.

Dari  $\Sigma F_x = 0$ ,  $F_1 = F_3$ ; tetapi  $F_1 = \tau_2 t_2 dx$ , dan  $F_3 = \tau_1 t_1 dx$  di mana  $\tau_2$  dan  $\tau_1$  adalah tegangan geser yang bekerja pada luas-luas yang bersangkutan  $t_2 dx$  dan  $t_1 dx$ . Jadi,  $\tau_2 t_2 dx = \tau_1 t_1 dx$ , atau  $\tau_1 t_1 = \tau_2 t_2$ . Tetapi karena bidang-bidang potongan longitudinal diambil pada suatu jarak yang tertentu jauhnya, maka mengikuti hubungan-

\* A. Nadai, *Theory of Flow and Fracture of Solids*, vol. 1 (2nd ed.), New York: McGraw-Hill, 1950.



Gambar 3-22 Bangunan berdinding tipis dari beraneka tebal.

hubungan di atas, hasil kali tegangan geser dan tebal dinding adalah sama, yaitu konstan, untuk setiap bidang yang demikian. Konstanta ini diberi lambang  $q$  dan bila tegangan geser diukur dalam newton per meter kuadrat dan tebal tabung dalam meter, maka  $q$  diukur dalam newton per meter (N/m).

Dalam Pasal 2-9, Persamaan 2-8, telah ditetapkan bahwa tegangan geser pada bidang-bidang yang saling tegak lurus sesamanya adalah sama pada sudut suatu elemen. Jadi pada sudut seperti titik  $A$  dalam Gambar 3-22(b),  $\tau_2 = \tau_3$ , begitu pula dengan cara yang sama,  $\tau_1 = \tau_4$ . Karena itu  $\tau_4 t_1 = \tau_3 t_2$ , atau secara umum  $q$  adalah konstan dalam bidang potongan yang tegak lurus pada sumbu sebuah batang. Dengan dasar ini suatu analogi dapat dirumuskan. Batas sebelah dalam dan luar dari dinding dapat dipikirkan sebagai batas-batas sebuah saluran. Selanjutnya orang akan dapat membayangkan suatu jumlah air yang konstan secara tetap bersirkulasi dalam saluran ini. Dalam pengaturan ini, jumlah air yang mengalir melalui bidang sepanjang saluran adalah konstan. Karena analogi ini maka besaran  $q$  disebut dengan *aliran geser* (shear flow).

Berikutnya tinjaulah penampang tabung sebagai yang terlihat dalam Gambar 3-22(c). Gaya per meter dari keliling tabung ini, berdasarkan atas penjelasan terdahulu, adalah konstan dan adalah aliran geser  $q$ . Aliran geser ini dikalikan dengan panjang  $ds$  dari keliling menghasilkan gaya  $q ds$  per diferensiasi panjang. Hasil kali dari gaya kecil tak berhingga  $q ds$  ini dengan  $r$  terhadap beberapa titik yang tepat seperti  $O$  dalam Gambar 3-22(c), memberikan sumbangan sebuah elemen kepada perlawanan momen puntir terpakai  $T$ . Dengan menambahkan dan mengintegrasikan ini, maka

$$T = \oint r q ds$$

di mana proses integrasi dilakukan di sekitar tabung sepanjang garis pusat dari keliling. Karena untuk suatu tabung  $q$  adalah suatu konstanta, maka persamaan ini dapat ditulis sebagai

$$T = q \oint r \, ds$$

Di samping maksud untuk melakukan integrasi yang sesungguhnya, suatu penafsiran yang sederhana terhadap integral di atas dapat diperoleh. Ini dapat dilihat dari Gambar 3-22(c) di mana  $r \, ds$  adalah dua kali harga luas daerah bergaris dari segitiga kecil takberhingga dengan tinggi  $r$  dan alas  $ds$ . Jadi integral lengkap adalah duakali dari seluruh luas yang dibatasi oleh garis pusat keliling tabung tersebut. Dengan mendefinisikan luas ini dengan lambang khusus  $\textcircled{A}$ , kita memperoleh

$$T = 2\textcircled{A}q \quad \text{atau} \quad q = T/(2\textcircled{A}) \quad (3-14)$$

Persamaan ini\* berlaku hanya untuk tabung yang berdinding tipis. Luas  $\textcircled{A}$  secara kira-kira adalah luas rata-rata dari dua daerah yang menutupi permukaan tabung sebelah dalam dan luar, atau seperti ditegaskan di atas, ia adalah luas yang ditutupi oleh garis pusat kontur dinding. Persamaan 3-14 tidak berlaku sama sekali bila tabung terbelah.

Karena untuk tabung tertentu aliran geser  $q$  yang diberikan oleh Persamaan 3-14 adalah konstan, maka dari pendefinisian aliran geser, tegangan geser pada suatu titik dari suatu tabung di mana tebal dinding adalah  $t$ , adalah

$$\tau = q/t \quad (3-15)$$

Di dalam daerah elastis, Persamaan-persamaan 3-14 dan 3-15 dapat berlaku pada beberapa bentuk tabung. Untuk daerah tak elastis, Persamaan 3-15 berlaku hanya bila ketebalan  $t$  adalah tetap. Penelaahan tabung-tabung yang terdiri lebih dari satu sel adalah di luar jangkauan buku ini.

Untuk bahan yang elastis linier, sudut pelintir dari suatu tabung berongga dapat diperoleh dengan menggunakan dasar kekekalan energi. Sudut pelintir per satuan, jarak,  $\theta$ , selanjutnya diberikan oleh†

$$\theta = \frac{d\phi}{dx} = \frac{T}{4\textcircled{A}^2 G} \oint \frac{ds}{t} \quad (3-16)$$

### CONTOH 3-10

Kerjakanlah kembali Contoh 3-3 dengan menggunakan Persamaan-persamaan 3-14 dan 3-15. Radius luar dan dalam dari dinding tabung adalah 10 mm dan 8 mm dan momen puntir terpakai adalah 40 N·m.

### PENYELESAIAN

Harga rata-rata radius tabung adalah 9 mm dan tebal dinding adalah 2 mm. Jadi

\* Persamaan 3-14 kadang-kadang disebut sebagai rumus Bredt sebagai penghargaan terhadap insinyur bangsa Jerman yang telah mengembangkan rumus tersebut.

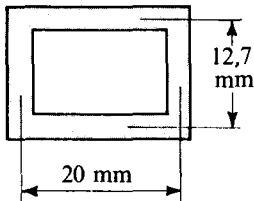
† Lihat, misalnya, E.P. Popov, *Introduction to Mechanics of Solids*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1968.



$$\tau = \frac{q}{t} = \frac{T}{2(A)r} = \frac{40}{2\pi(0,009)^2(0,002)} = 39,3 \times 10^6 \text{ N/m}^2.$$

Perhatikanlah bahwa dengan menggunakan Persamaan-persamaan 3-14 dan 3-15, hanya satu tegangan geser yang akan kita peroleh yaitu di sekitar harga rata-rata dari kedua tegangan yang kita hitung dalam Contoh 3-3. Makin tipis dinding tersebut, makin tepat jawab yang diperoleh, demikian pula sebaliknya.

Adalah menarik untuk diperhatikan bahwa sebuah tabung sikuempat, seperti yang terlihat dalam Gambar 3-23, dengan tebal dinding 2 mm, untuk momen puntir yang sama, akan memiliki tegangan geser yang sama dengan tabung melingkar tersebut di atas. Ini dikarenakan oleh luas yang melingkupinya adalah kira-kira sama dengan luas  $(A)$  dari tabung melingkar. Tetapi beberapa konsentrasi tegangan lokal akan terdapat pada sudut-sudut tabung bujursangkar.

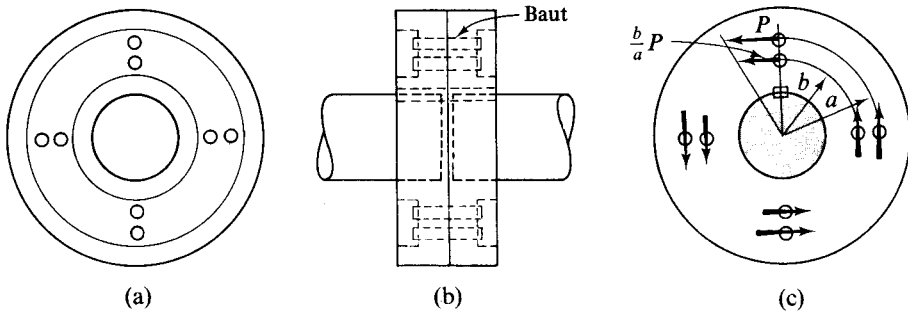


Gambar 3-23

### \*3-12 KOPLING POROS

Acapkali timbul keadaan di mana panjang poros yang dipakai tidak cukup panjang. Begitu juga, untuk alasan-alasan perawatan dan perakitan, sering diperlukan untuk membangun sebuah poros yang panjang dari beberapa potongan. Dalam menyambung potongan-potongan poros ini bersama-sama, apa yang dinamakan kopling poros flens dipergunakan, dengan jenis yang diperlihatkan dalam Gambar 3-24. Bila dibaut bersama-sama, maka kopling-kopling seperti ini dinamakan *kaku* (rigid), untuk membedakannya dari jenis yang lain yang disebut *fleksibel* (flexible) yang mampu menggeser penyambungan poros. Jenis yang terakhir hampir secara universal digunakan untuk menyambung poros sebuah motor dengan perlengkapan yang akan digerakkan. Di sini hanya kopling jenis kaku yang akan kita tinjau. Untuk kopling dari jenis lain, pembaca dapat melihat buku-buku teks mengenai disain mesin dan katalog-katalog dari pabrik.

Untuk kopling-kopling kaku adalah biasa menganggap bahwa regangan geser dari baut berubah secara langsung (linier) dengan jaraknya dari sumbu poros. Gesekan antar flens diabaikan. Karena itu, serupa dengan persoalan poros-poros melingkar, bila baut-baut terdiri dari bahan yang sama, maka *tegangan* geser elastis dalam baut juga berubah secara linier dengan jarak masing-masing dari pusat kopling. Tegangan geser pada salah satu baut diandaikan *merata* dan diatur oleh jarak antara pusat baut dengan pusat kopling. Kemudian, bila tegangan geser pada sebuah baut dikalikan dengan luas penampangnya, maka diperoleh gaya pada baut. Berdasarkan ini, misalnya, untuk baut yang *sama ukuran* dalam dua "lingkaran baut", maka gaya pada baut-baut tersebut yang dilokasikan oleh radius masing-masing  $a$  dan  $b$  dapat terlihat dalam Gambar 3-24(c).



Gambar 3-24 Kopling poros flens

Momen gaya yang ditimbulkan oleh baut sekitar sumbu sebuah poros memberikan kapasitas momen puntir dari sebuah kopling.

Pemberian alasan tersebut di atas adalah sama dengan yang digunakan untuk mendapatkan rumus puntiran dari poros-poros melingkar, kecuali yang penampangnya bukan kontinu, di mana jumlah diskrit titik-titik harus diperhatikan. Penelaahan ini bersahaja, karena konsentrasi tegangan tidak dapat diragukan lagi terdapat pada titik-titik pertemuan baut dan flens kopling. Suatu perubahan dari rumus puntiran untuk penggunaan ini dan untuk menelaah kasus-kasus yang lebih sukar dari kopling-kopling tersebut, akan dibahas dalam Bab 14.

Metoda analisis di atas hanya berlaku untuk keadaan suatu kopling di mana baut bertindak terutama pada geser, tetapi pada beberapa kopling baut-baut terpasang erat sekali hingga kopling tersebut berlaku dengan suatu cara yang berlainan. Tarikan awal dari baut tersebut besar sekali hingga menyebabkan keseluruhan kopling bekerja dengan gesekan. Di bawah keadaan-keadaan ini penelaahan tersebut di atas tidak berlaku lagi atau hanya berlaku sebagai pengukur kekuatan ultimat dari kopling hingga tegangan pada baut menjadi berkurang. Tetapi bila digunakan kekuatan tarik baut yang tinggi, maka kecil bahaya yang akan terjadi, dan kekuatan kopling mungkin akan lebih besar lagi bila baut-baut tersebut harus bekerja dengan geser.\*

### CONTOH 3-11

Taksirlah kapasitas yang dibawakan oleh momen puntir dari kopling baja yang ditempatkan secara terpadu pada poros, yang terlihat dalam Gambar 3-25, yang dikendalikan oleh tegangan geser ijin  $40.000 \text{ kN/m}^2$  pada delapan baut. Lingkaran baut tersebut berdiameter  $0,24 \text{ m}$ .

### PENYELESAIAN

Luas sebuah baut

$$A = (1/4)\pi(30)^2 = 706 \text{ mm}^2 = 7,06 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

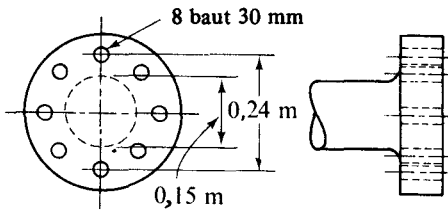
\* Lihatlah "Symposium on High-Strength Bolts," Part I, oleh L.T. Wyly, dan Part II oleh E.J. Ruble, *Proceedings AISC*, 1950. Lihat pula Pasal 14-2.

Gaya ijin untuk sebuah baut

$$P_{ijin} = A\tau_{ijin} = 7,06 \times 10^{-4}(40 \times 10^3) = 28,2 \text{ kN}$$

Karena kedelapan baut terdapat pada suatu jarak 0,12 m dari sumbu pusat,

$$T_{ijin} = (28,2)(0,12)(8) = 27,1 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



Gambar 3-25

#### SOAL-SOAL UNTUK DISELESAIKAN

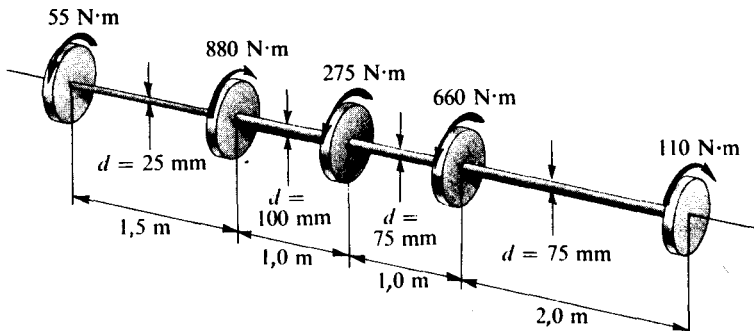
3-1. Hitunglah tegangan geser yang terjadi pada karet keras dengan poros baja berdiameter 75 mm yang mendapat momen puntir terpakai 5.500 N·m. Andaikanlah bahwa momen puntir diberikan menurut arah yang ditunjukkan dalam Gambar 3-5(a), maka buatlah pada sketsa yang sesuai arah dari tegangan yang dihitung tersebut.

3-2. Sebuah poros berongga mempunyai diameter luar 100 mm dan diameter dalam 80 mm. Bila tegangan geser ijin adalah 55 MPa, berapakah besar momen puntir yang bisa diteruskan? Berapakah tegangan pada permukaan poros sebelah dalam bila diberikan momen puntir ijin?

3-3. Sebuah poros Douglas Fir harus digunakan pada industri pengolahan tertentu. Bila tegangan geser ijin tersebut yang sejajar dengan urat kayu adalah 840 kN/m<sup>2</sup>, hitunglah harga momen puntir maksimum yang diteruskan oleh poros bundar berdiameter 200 mm dengan urat kayu sejajar dengan sumbu.

3-4. Sebuah poros inti berongga berdiameter 200 mm diperoleh dengan melubangi poros melingkar padat berdiameter 300 mm hingga membentuk lubang aksial berdiameter 100 mm. Berapakah persentase kekuatan puntiran yang hilang oleh operasi ini?

3-5. Poros padat berbentuk silinder dengan ukuran yang bervariasi yang terlihat dalam gam-



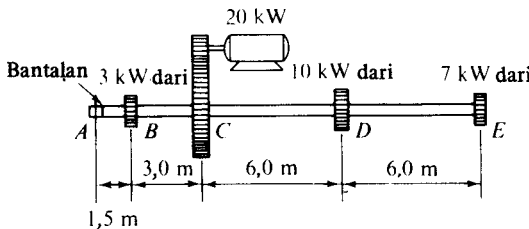
GAMBAR SOAL 3 - 5

bar digerakkan oleh momen-momen puntir seperti ditunjukkan dalam gambar tersebut. Berapakah tegangan puntir maksimum dalam poros tersebut, dan di antara kedua katrol yang ada? *Jawab: 17,9 MPa.*

3-6. Sebuah poros baja padat berdiameter 150 mm meneruskan daya sebesar 450 kW dengan frekuensi 1,5 Hz. Hitunglah tegangan geser maksimum. Hitunglah pula perubahan tegangan geser yang akan terjadi bila frekuensi naik menjadi 6,0 Hz.

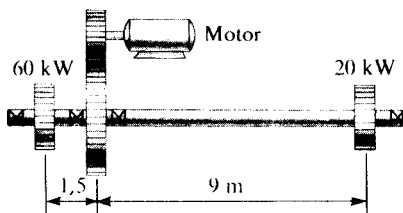
3-7. Dua buah poros, terdiri dari sebuah poros baja berongga yang mempunyai diameter luar 90 mm dan diameter dalam 30 mm, dan sebuah poros padat berdiameter 90 mm, masing-masing meneruskan daya 50 kW. Bandingkan tegangan geser dalam kedua poros tersebut bila keduanya bekerja pada frekuensi 3 Hz.

3-8. Poros garis baja padat yang berdiameter 50 mm, seperti diperlihatkan dalam gambar, digerakkan oleh motor 20 kW pada frekuensi 3 Hz. Hitunglah tegangan puntir maksimum pada irisan *AB*, *BC*, *CD*, dan *DE* dari poros tersebut.



GAMBAR SOAL 3 – 8

3-9. Sebuah motor, melalui sekumpulan roda gigi, menggerakkan sebuah poros garis, seperti yang terlihat dalam gambar, pada putaran 630 rpm. Daya sebesar 20 kW diberikan pada



GAMBAR SOAL 3 – 9

mesin yang ada di sebelah kanan dan sebesar 60 kW pada sebelah kiri. Pilihlah sebuah poros yang bulat padat dengan ukuran yang sama di mana-mana dan tentukanlah diameternya. Tegangan geser ijin adalah 37 MPa. *Jawab: Diameternya 50 mm.*

3-10. Rancanglah sebuah poros baja berongga yang meneruskan daya 200 kW pada putaran 75 rpm tanpa melebihi tegangan geser dari 43 MN/m<sup>2</sup>. Gunakanlah 1,2 : 1 sebagai perbandingan antara diameter luar dengan diameter dalam. *Jawab: Diameter 150 mm.*

3-11. Hitunglah sudut pelintir total antara titik-titik *A* dan *E* untuk poros dalam Soal 3-8.  $G = 84000 \text{ MN/m}^2$ . *Jawab: 9,0°.*

3-12. Berapakah seharusnya panjang sebuah kawat aluminium yang berdiameter 5 mm hingga benda ini dapat dipelintir sebesar satu putaran penuh tanpa melebihi tegangan geser 42.000 kN/m<sup>2</sup>?  $G = 27000 \text{ MN/m}^2$ . *Jawab: 10,1 m.*

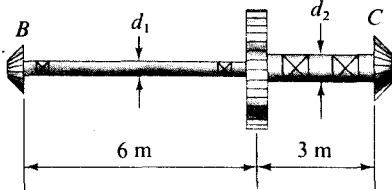
3-13. Sebuah batang baja berongga, panjangnya 150 mm digunakan sebagai pegas puntiran. Perbandingan antara diameter-diameter dalam dengan luar adalah  $\frac{1}{2}$ . Kekakuan yang dibutuhkan untuk pegas ini adalah  $\frac{1}{16}$  derajat per satu N·m momen puntir. Hitunglah diameter luar dari batang ini.  $G = 84000 \text{ MPa}$ .

3-14. Sebuah poros padat dari aluminium panjangnya 1,0 m dan diameter luarnya 50 mm harus digantikan dengan poros baja berbentuk tabung dengan panjang yang sama dan diameter luar yang sama pula sedemikian hingga poros tersebut dapat membawa momen puntir yang sama dengan sudut pelintir yang sama pula daripada panjang total. Berapakah seharusnya diameter dalam dari poros baja berbentuk tabung tersebut?  $G_{\text{baja}} = 84000 \text{ MN/m}^2$  dan  $G_{\text{Al}} = 28000 \text{ MN/m}^2$ . *Jawab: 22,6 mm.*

3-15. Sebuah poros berdiameter 50 mm yang panjangnya 900 mm dijepit pada salah satu ujungnya sedang ujung yang lainnya bebas. Sebuah lubang yang konsentris dengan poros, berdiameter 35 mm, dibuat dalam poros tersebut, dimulai dari ujung yang bebas mengarah ke ujung yang lain. Tentukanlah panjang lubang yang diperlukan hingga poros dapat memelintir

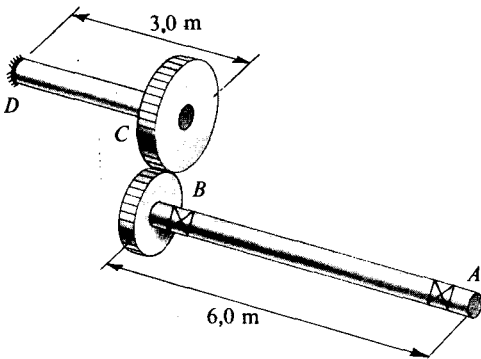
mencapai sudut  $0,120^\circ$  akibat pemakaian momen puntir ujung sebesar  $100 \text{ N}\cdot\text{m}$ . Ambillah  $G = 84000 \text{ MN/m}^2$ .

3-16. Sebuah motor berdaya  $75 \text{ kW}$  menggerakkan sebuah poros garis melalui roda gigi  $A$  dengan putaran  $26,5 \text{ rpm}$ . Roda-roda gigi kerucut pada  $B$  dan  $C$  menggerakkan alat pencampur karet-semen. Bila daya yang dibutuhkan oleh alat pencampur yang digerakkan oleh roda gigi  $B$  adalah  $25 \text{ kW}$  dan roda gigi  $C$   $50 \text{ kW}$ , berapakah diameter poros yang dibutuhkan? Tegangan geser ijin pada poros adalah  $40 \text{ MPa}$ . Jumlah dukungan yang cukup disediakan untuk menghindari pelenturan. Bila  $G$  adalah  $84 \text{ GPa}$ , berapakah besar sudut pelintir akibat beban pada bagian poros sebelah kiri? Nyatakanlah jawaban tersebut dalam derajat. *Jawab:*  $d_1 = 102 \text{ mm}$ ,  $d_2 = 132 \text{ mm}$ , dan  $\phi = 3,15^\circ$ .



GAMBAR SOAL 3 - 16

3-17. Dua roda gigi dipasang pada dua poros baja berdiameter  $50 \text{ mm}$  seperti yang terlihat dalam gambar. Roda gigi pada  $B$  mempunyai diameter lingkaran jarak bagi  $200 \text{ mm}$ , sedang roda gigi pada  $C$  mempunyai diameter jarak-bagi  $400 \text{ mm}$ . Berapakah besar sudut putaran yang akan dialami ujung  $A$  bila pada  $A$  diberi-

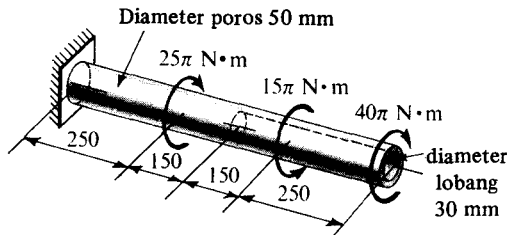


GAMBAR SOAL 3 - 17

kan suatu momen puntir sebesar  $560 \text{ N}\cdot\text{m}$  sedangkan ujung  $D$  dari poros yang kedua dipertahankan untuk tidak berputar?  $G = 84000 \text{ MN/m}^2$ .

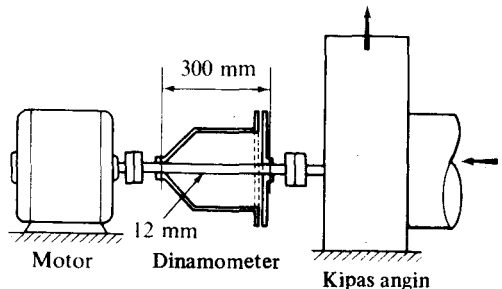
3-18. Pada Contoh 3-7, hitunglah besar momen puntir yang diberikan pada  $A$  saja yang akan mengakibatkan perputaran sudut yang sama pada  $A$  dengan dua momen puntir yang diberikan di  $B$  dan  $D$ . *Jawab:*  $282 \text{ N}\cdot\text{m}$ .

3-19. (a) Tentukanlah tegangan geser maksimum dalam poros yang dihadapkan pada momen-momen puntir, yang diperlihatkan dalam gambar. (b) Hitunglah dalam derajat sudut pelintir antara kedua ujungnya. Ambillah  $G = 84.000 \text{ MN/m}^2$ .



GAMBAR SOAL 3 - 19

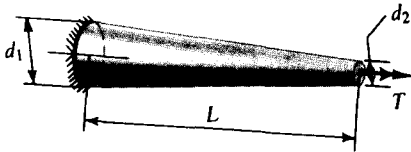
3-20. Sebuah dinamometer dipergunakan untuk mengkalibrasi masukan daya yang diperlukan untuk menjalankan kipas angin untuk pembuangan gas pada frekuensi  $20 \text{ Hz}$ . Dinamometer tersebut terdiri dari sebuah poros padat berdiameter  $12 \text{ mm}$  dan dua buah piring yang menempel pada poros tersebut jarak antara keduanya adalah  $300 \text{ mm}$ , seperti yang terlihat dalam gambar. Sebuah piring dipasang melalui sebuah tabung pada ujung daya masukan; se-



GAMBAR SOAL 3 - 20

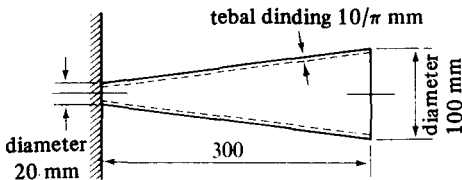
dang yang lainnya berada di dekat ujung daya keluaran. Perpindahan relatif dari kedua piring ini seperti dilihat dalam cahaya stroboskopik adalah  $6^\circ 0'$ . Hitunglah masukan daya dalam kW yang diperlukan untuk menjalankan kipas angin tersebut di atas pada frekuensi yang telah diberikan. Ambillah  $G = 84.000 \text{ MN/m}^2$ .  
Jawab: 7,5 kW.

3-21. Sebuah poros baja padat berbentuk kerucut terpancung. Sebuah ujungnya terpasang teguh pada sebuah tumpuan tetap, sedang pada ujung yang lain diberikan suatu momen puntir  $T$  (lihat gambar). Hitunglah rotasi sudut dari ujung bebas bila  $d_1 = 150 \text{ mm}$ ;  $d_2 = 50 \text{ mm}$ ;  $L = 500 \text{ mm}$ ; dan  $T = 3000 \text{ N}\cdot\text{m}$ . Anggaph bahwa pengandaian-pengandaian yang biasa mengenai regangan yang mengalami momen puntir berlaku pula pada poros-poros kerucut. Ambillah  $G = 84.000 \text{ MN/m}^2$ .



GAMBAR SOAL 3 - 21

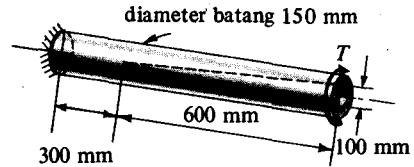
\*3-22. Sebuah kerucut terpancung yang elastis yang ber dinding tipis mempunyai ukuran-ukuran seperti yang terlihat dalam gambar. Tentukanlah kekakuan puntiran dari bagian konstruksi seperti ini, yaitu besar momen puntir per satuan sudut pelintir. Modulus geser untuk bahan adalah  $G$ .



GAMBAR SOAL 3 - 22

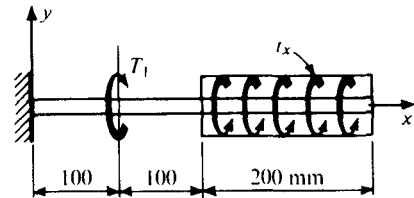
\*3-23. Sebuah poros berdiameter 150 mm dari bahan elastis secara linier, bagian dalamnya dilubangi dengan bentuk kerucut yang panjangnya 600 mm seperti yang terlihat dalam gam-

bar. Poros tersebut terpasang secara kuat pada suatu tumpuan yang tetap pada salah satu ujungnya sedang ujung yang lainnya adalah bebas dan dihadapkan pada suatu momen puntir  $T$ . Tentukanlah rotasi sudut maksimum dari poros tersebut.



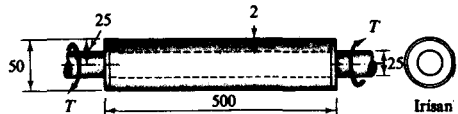
GAMBAR SOAL 3 - 23

\*3-24. Andaikanlah bahwa selama pengerjaan perubahan sebuah poros dengan kekakuan puntiran  $I_p G$  yang konstan dibebani oleh suatu momen puntir yang terpusat  $T_1 = -100 \text{ N}\cdot\text{m}$  dan suatu momen puntir yang terdistribusi  $t_x = 500 \text{ N}\cdot\text{m}$  per meter seperti yang terlihat dalam gambar. Hitunglah perputaran sudut dari ujung poros yang bebas. Gambarkanlah diagram antara momen puntir  $T(x)$  dengan sudut pelintir  $\phi(x)$ .



GAMBAR SOAL 3 - 24

3-25. Sebuah tabung dengan diameter luar 50 mm dan tebal 2 mm, pada ujung-ujungnya dipasang dengan flens yang kaku pada suatu poros padat berdiameter 25 mm seperti yang terlihat dalam gambar. (Semua ukuran dalam mm). Bila kedua tabung dan poros tersebut terbuat dari bahan yang elastis secara linier yang



(Semua ukuran dalam mm)

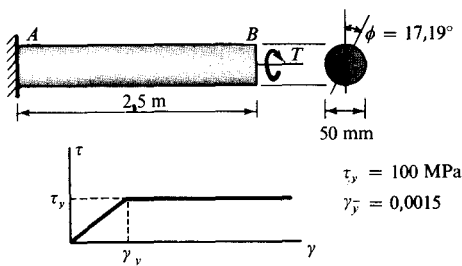
GAMBAR SOAL 3 - 25

sama, berapa bagiankah dari momen puntir  $T$  yang dibawa oleh tabung tersebut? *Jawab:* 83,7%.

3-26. Bila tabung sebelah luar dalam soal yang lalu terbuat dari aluminium dan poros terbuat dari baja, berapakah momen puntir yang dapat diberikan kepada susunan tersebut sedemikian sehingga tegangan geser dalam aluminium tidak akan melebihi 100 MPa? Ambillah  $G_{\text{baja}} = 84 \text{ GPa}$ , dan  $G_{\text{Al}} = 28 \text{ GPa}$ . Berapakah seharusnya sudut pelintir pada panjang 500 mm dari tabung aluminium tersebut untuk momen puntir tersebut di atas?

3-27. Sebuah contoh batang baja SAE 1060 berdiameter 20 mm dan panjang 450 mm, menjadi pecah bila mendapat momen puntir sebesar 900 N·m. Berapakah modulus pecah puntiran dari baja ini? *Jawab:* 573 MPa.

\*3-28. Sebuah batang baja berdiameter 50 mm mempunyai panjang 2,5 m. Salah satu ujung batang dipegang tetap; sedang ujung yang lain diputar sebesar sudut  $\phi = 17,19^\circ$ . Berapakah besar momen puntir  $T$  yang dikenakan pada ujung yang bebas untuk menghasilkan perputaran ini? Sifat-sifat mekanis ideal dari bahan poros tersebut diperlihatkan dalam gambar.



GAMBAR SOAL 3 – 28

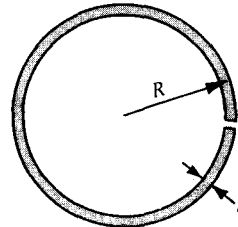
3-29. Sebuah poros melingkar padat berdiameter 150 mm dibubut sebagian menjadi poros berdiameter 75 mm. Bila pada daerah perubahan kedua diameter tersebut terdapat lengkungan sudut dengan radius 12 mm, berapakah besar tegangan geser maksimum yang terjadi bila suatu momen puntir sebesar 2700 N·m diberikan kepada poros tersebut? Berapakah besar

tegangan geser maksimum tersebut bila radius lengkungan sudut (fillet) tersebut di atas berkurang menjadi 3 mm?

3-30. Hitunglah radius lengkungan sudut (fillet) yang diperlukan untuk pertemuan antara poros berdiameter 150 mm dengan bagian yang berdiameter 100 mm, bila poros tersebut meneruskan daya sebesar 80 kW dengan perputaran 100 rpm dan tegangan geser maksimum terbatas pada 55 MPa.

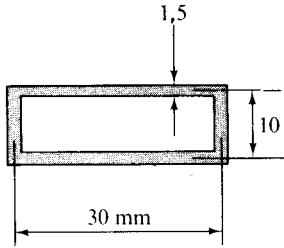
3-31. Bandingkanlah harga-harga tegangan geser maksimum dan sudut pelintir batang-batang yang sama panjangnya masing-masing mempunyai penampang berbentuk bujur sangkar, empat persegi panjang dan lingkaran yang sama luasnya. Semua anggota-anggota tersebut dikenakan momen puntir yang sama pula. Penampang yang berbentuk lingkaran mempunyai diameter 100 mm dan lebar dari penampang empat persegi panjang adalah 25 mm. Untuk penampang bujur sangkar,  $\alpha = 0,208$  dan  $\beta = 0,141$ ; untuk penampang empat persegi panjang  $\alpha \approx \beta \approx \frac{1}{3}$ .

3-32. Bandingkanlah kekuatan puntiran dan kekakuan dari tabung-tabung berdinding tipis yang penampangnya berbentuk lingkaran, dari bahan yang kenyal secara linier, antara yang bercelah dan yang tanpa celah (lihat gambar). *Jawab:*  $3R/t$ ,  $t^2/(3R^2)$ .

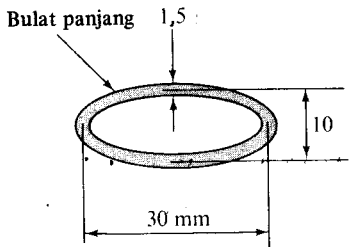


GAMBAR SOAL 3 – 32

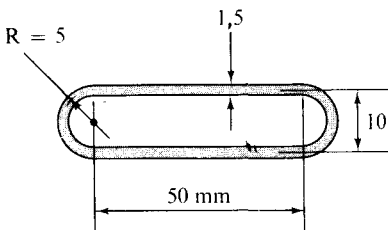
3-33 sampai 3-35. Hitunglah tegangan geser maksimum yang terjadi pada bagian konstruksi yang mempunyai penampang lintang seperti yang terlihat dalam gambar di bawah, bila masing-masing diberikan momen puntir sebesar 50 N·m. Abaikanlah konsentrasi tegangan.



GAMBAR SOAL 3 – 33

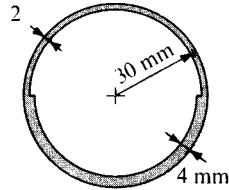


GAMBAR SOAL 3 – 34



GAMBAR SOAL 3 – 35

3-36. Untuk bagian konstruksi yang penampangnya terlihat dalam gambar yang berikut, hitunglah besar tegangan geser maksimum dan sudut pelintir per satuan panjang, yang disebabkan oleh penggunaan momen puntir sebesar 100 N.m. Abaikanlah konsentrasi tegangan. Berikanlah ulasan mengenai keuntungan yang diperoleh dengan bertambahnya tebal dinding pada sebahagian penampang tersebut.



GAMBAR SOAL 3 – 36

3-37. Sebuah kopling yang kaku dengan enam baut berdiameter 25 mm pada suatu lingkaran baut berdiameter 200 mm diberikan sebuah momen puntir sebesar 20.000 N.m. Hitunglah tegangan geser pada baut-baut tersebut. *Jawab:* 67,9 MPa.

3-38. Sebuah kopling terbuat dengan delapan buah baut berkekuatan tinggi, berdiameter 20 mm, terletak pada suatu lingkaran baut dengan diameter 240 mm. (a) Hitunglah momen puntir yang dapat diteruskan oleh kopling ini bila tegangan ijin dalam baut adalah 75 MPa. (b) Hitunglah daya dalam kW yang dapat diteruskan bila poros dan kopling berputar dengan putaran 250 rpm.

3-39. Sebuah kopling flens mempunyai 6 baut, masing-masing dengan luas penampang 130 mm<sup>2</sup>, pada suatu lingkaran baut berdiameter 200 mm, dan 6 baut, masing-masing dengan luas penampang 320 mm<sup>2</sup> pada suatu lingkaran baut yang berdiameter 120 mm. Bila tegangan geser ijin dalam sebuah baut adalah 110 MPa, berapakah kapasitas momen puntir dari kopling ini?

\*3-40. Enam buah baut berdiameter 20 mm pada lingkaran baut sebelah luar dengan radius 175 mm terdiri dari aluminium, sedang enam baut berdiameter 20 mm pada lingkaran baut sebelah dalam dengan radius 125 mm adalah baja. Berapakah kapasitas momen puntir dari kopling ini? Anggaplah tegangan geser ijin untuk kedua macam bahan tersebut adalah 40.000 kN/m<sup>2</sup> dan gunakanlah  $G_{Al} = 28.000$  MN/m<sup>2</sup> dan  $G_{St} = 84.000$  MN/m<sup>2</sup>. *Jawab:* 15,6 kN.m.



# 4 Gaya Aksial — Geser — dan Momen Lentur

## 4-1 PENDAHULUAN

Efek gaya aksial terhadap batang yang lurus telah dikemukakan pada Bab-bab 1 dan 2. Puntiran dari batang lurus telah dibahas pula pada Bab 3. Secara intuitif jelaslah bagi para pembaca bahwa yang kita sebut ini bukanlah hanya macam gaya yang dapat bekerja pada sebuah batang. Pada kenyataannya, dalam banyak bagian bangunan teknik, gaya perlawanan bekerja secara lateral dan transversal terhadap sumbu-sumbu bagian tersebut. Jenis bagian konstruksi seperti ini dinamakan *balok* (beam). Berbagai penggunaan dari balok dapat ditemui pada struktur dan mesin. Bagian utama yang mendukung lantai bangunan adalah balok, begitu pula sebuah gandar dari mobil juga adalah balok. Dengan bahan-bahan yang modern, maka balok merupakan bagian konstruksi yang menonjol. Penentuan sistem gaya-gaya dalam yang diperlukan untuk keseimbangan setiap bagian balok akan merupakan pokok utama dari bab ini.\*

Balok mungkin berbentuk lurus atau melengkung, tetapi bab ini akan memusatkan pembahasan pada balok lurus. Balok-balok lurus banyak sekali terdapat dalam praktek; lebih lanjut, sistem gaya-gaya pada suatu irisan sebuah balok lurus sama dengan balok lengkung. Jadi, bila sifat dari balok lurus dapat dimengerti, maka tidak banyak yang dibutuhkan lagi untuk memahami balok lengkung. Untuk menyederhanakan pekerjaan bab ini,† maka gaya-gaya yang bekerja pada balok tersebut akan diandaikan terletak pada bidang yang sama, yaitu, suatu masalah balok "planar" akan dibahas secara tersendiri. Selanjutnya, meskipun pemasangan yang sesungguhnya dari suatu balok

\* Isi dari bab ini mungkin dikenal oleh beberapa pembaca. Meskipun demikian, adalah baik sekali untuk meninjau kembali bahan-bahan yang dikemukakan di sini. Pengetahuan sepenuhnya dari bahan ini haruslah dipunyai sebelum membahas bab-bab yang menyusul.

† Lihat Bab 7 untuk pembahasan masalah yang lebih umum.

mungkin tegak, condong atau mendatar, maka untuk *tepatnya* balok-balok yang dibahas di sini akan kelihatan dalam kedudukan mendatar. Semua balok yang ditinjau akan ditentukan secara statis, yaitu reaksi selalu dapat ditentukan dengan penggunaan persamaan keseimbangan statis.

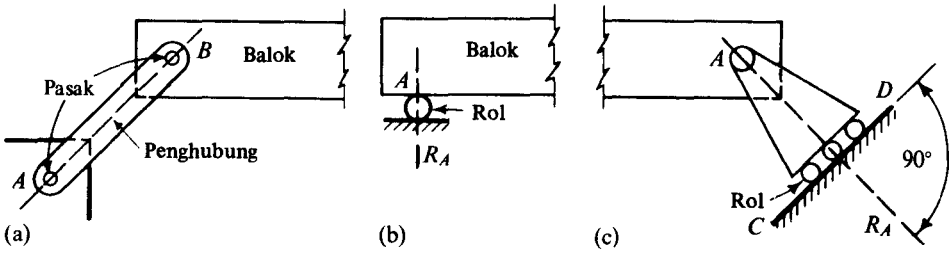
Untuk batang beban aksial atau puntiran yang telah kita tinjau sebelum ini, hanya satu gaya dalam yang dibutuhkan pada suatu irisan untuk memenuhi keadaan keseimbangan. Tetapi umumnya, suatu sistem *tiga* komponen gaya dalam dapat diakui pada sebuah irisan sebuah balok. Besaran-besaran ini akan ditentukan dalam bab ini dengan mengisolasi bagian-bagian dari balok serta menggunakan syarat-syarat keseimbangan kepada bagian-bagian balok tersebut. Penelaahan hubungan gaya-gaya ini dengan tegangan yang diakibatkan oleh gaya-gaya tersebut dalam balok tersebut akan dibahas dalam dua bab yang berikutnya.

## 4-2 Kaidah Diagramatis untuk Tumpuan

Dalam mempelajari perbalokan penting sekali untuk memakai kaidah-kaidah diagramatik untuk tumpuan balok tersebut dan pembebanan yang disebabkan oleh bermacam-macam tumpuan dan berbagai variasi dari beban yang mungkin. Penguasaan yang cermat dari dan *ketaatan* kepada kaidah-kaidah demikian akan menghindari banyak keraguan dan memperkecil kemungkinan membuat kesalahan. Kaidah-kaidah ini membentuk bahasa bergambar bagi para ahli teknik. Sebagai disebutkan dalam pendahuluan, untuk *mudahnya*, maka balok-balok tersebut biasanya terlihat dalam kedudukan yang horizontal (mendatar).

Ada tiga macam tumpuan yang dikenal pada balok yang dibebani oleh gaya yang bekerja dalam bidang yang sama. Hal ini ditunjukkan oleh macamnya perlawanan yang diberikan balok tersebut terhadap gaya tersebut. Salah satu jenis dari tumpuan secara fisis dinyatakan dengan sebuah *rol* atau sebuah *penghubung*. Alat ini mampu melawan gaya dalam *suatu garis aksi yang spesifik*. Penghubung yang terlihat pada Gambar 4-1(a) dapat melawan gaya hanya dalam arah garis *AB*. Rol pada Gambar 4-1(b) hanya dapat melawan gaya yang vertikal, sedang rol-rol yang terlihat dalam Gambar 4-1(c) hanya dapat melawan suatu gaya yang tegak lurus terhadap bidang *CD*. Dalam buku ini jenis tumpuan ini akan biasa dilambangkan oleh tumpuan sebagai yang terlihat dalam Gambar-gambar 4-1(b) dan (c), dan kita akan memahami bahwa *tumpuan rol sanggup melawan gaya dalam arah mana pun\** sepanjang garis aksi dari gaya reaksi. Untuk menghindari kedua pengertian ini, suatu penghubung skematik adakalanya dilakukan untuk menunjukkan bahwa gaya reaksi dapat bekerja dalam tiap arah (lihatlah Gambar 4-4). Suatu reaksi dari jenis tumpuan ini sesuai dengan suatu yang tidak diketahui yang tunggal bila persamaan-persamaan statika digunakan. Untuk reaksi-reaksi yang miring, maka *perbandingan* antara kedua komponen adalah tetap (lihatlah Contoh 1-3).

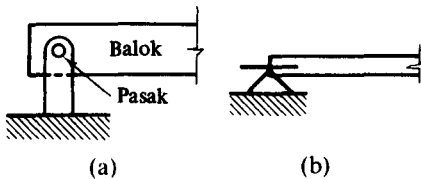
\* Hal ini secara tidak langsung menyatakan bahwa dalam disain yang sesungguhnya sebuah penghubung harus diadakan bila gaya reaksi bekerja menjauhi balok, dengan perkataan lain, balok tersebut tidak diperbolehkan terangkat dari tumpuan tersebut pada titik *A* dalam Gambar 4-1(b). Pada gambar ini mungkin menolong untuk memperlihatkan rol tersebut di atas balok tersebut dalam hal reaksi yang ke bawah, dengan maksud menjelaskan bahwa balok tersebut terbatas menghadapi gerak ke atas secara vertikal pada tumpuan tersebut. Praktek ini biasanya akan diikuti oleh buku ini.



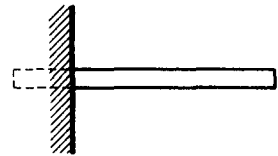
**Gambar 4-1** Tumpuan jenis penghubung dan rol (kemungkinan garis aksi dari reaksi diperlihatkan oleh garis-garis putus).

Jenis tumpuan lain yang mungkin digunakan adalah *pasak* (pin). Dalam menggambar sebuah tumpuan seperti di atas dicapai dengan menggunakan perincian seperti yang terlihat dalam Gambar 4-2(a). Dalam buku ini tumpuan-tumpuan yang demikian dilambangkan secara diagramatis seperti yang diperlihatkan oleh Gambar 4-2(b). Tumpuan yang berpasak mampu melawan gaya yang bekerja dalam *setiap* arah dari bidang. Jadi, pada umumnya, reaksi pada suatu tumpuan seperti ini mempunyai dua komponen, yang satu dalam arah horizontal dan yang lainnya dalam arah vertikal. Tidak seperti pada perbandingan pada tumpuan rol atau penghubung, maka perbandingan antara komponen-komponen reaksi pada tumpuan yang berpasak tidaklah tetap. Untuk menentukan kedua komponen ini, dua buah persamaan statika harus digunakan.

Tumpuan jenis ketiga yang digunakan untuk balok mampu melawan gaya dalam setiap arah dan *juga mampu melawan suatu kopel atau momen*. Secara fisis, tumpuan seperti itu diperoleh dengan membangun sebuah balok ke dalam suatu dinding batu bata, mengecornya ke dalam beton, atau melas ujung balok ke dalam bangunan utama. Suatu sistem *tiga* gaya dapat muncul pada tumpuan demikian, yaitu dua komponen gaya dan sebuah momen. Tumpuan ini disebut *tumpuan jepit* (fixed support) yaitu ujung yang tertanam tersebut adalah jepit, atau dijaga untuk tidak berputar. Kaidah standar yang menunjukkan hal ini terlihat dalam Gambar 4-3.

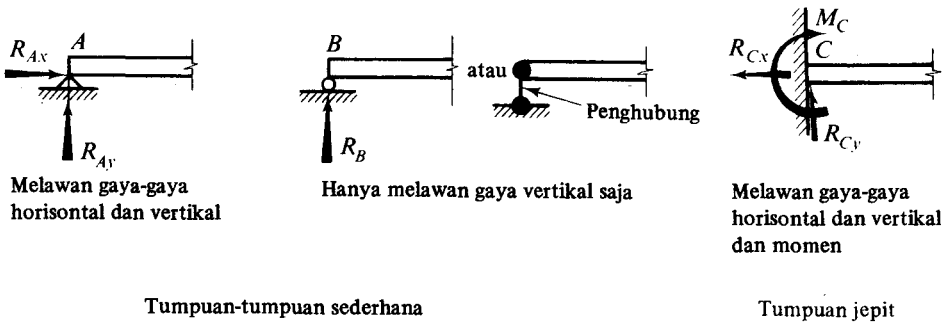


**Gambar 4-2** Tumpuan yang berpasak:  
(a) sesungguhnya, (b) diagramatis



**Gambar 4-3** Tumpuan jepit

Untuk membedakan tumpuan jepit dari tumpuan-tumpuan rol dan pasak yang tidak mampu melawan momen, maka dua yang kemudian disebut *tumpuan sederhana*. Gambar 4-4 menyimpulkan perbedaan yang terdahulu antara ketiga jenis tumpuan dan macam perlawanan yang diambil oleh masing-masing jenis tersebut. Para ahli teknik praktis biasanya menentukan tumpuan tersebut sebagai salah satu dari ketiga jenis ter-

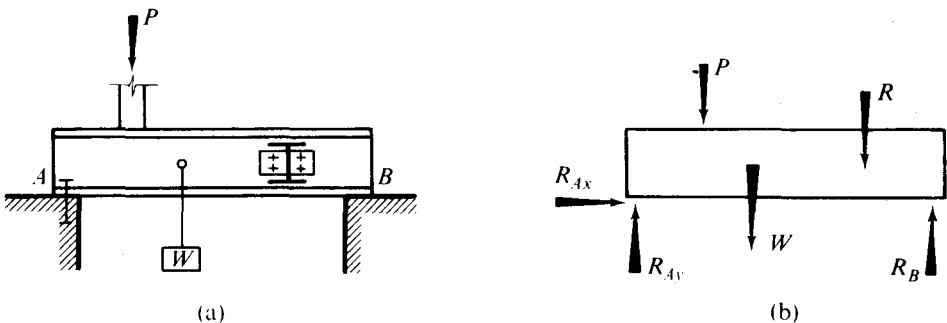


Gambar 4-4 Tiga jenis tumpuan yang umum

sebut di atas dengan "pertimbangan", meskipun dalam struktur yang sesungguhnya, tumpuan-tumpuan dari balok tidak selalu dengan jelas dapat dimasukkan ke dalam klasifikasi ini. Suatu pembahasan yang lebih lanjut mengenai aspek masalah ini adalah di luar lingkup buku ini.

### 4-3 KAJIDAH DIAGRAMATIS UNTUK PEMBEBANAN

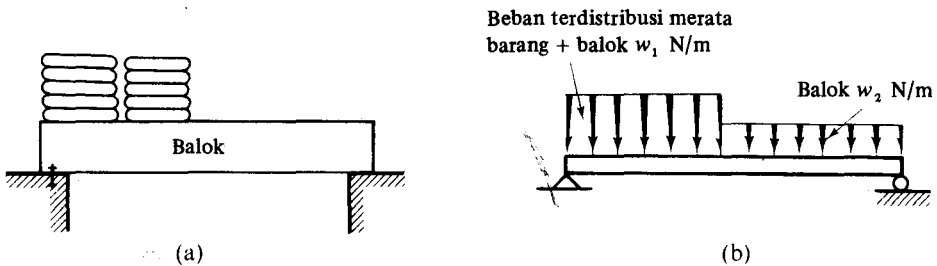
Balok didatangkan untuk menumpu bermacam-macam beban. Acapkali suatu gaya diberikan kepada balok, melalui sebuah tonggak, sebuah anggar atau sekelompok bangunan yang memakai baut seperti yang terlihat dalam Gambar 4-5(a). Susunan demikian mempergunakan gaya terhadap bagian balok yang sangat terbatas dan diidealisasi untuk tujuan-tujuan analisis balok sebagai gaya *terpusat*. Hal ini secara diagramatis dapat dilihat dalam Gambar 4-5(b). Pada pihak lain, dalam banyak hal gaya-gaya tersebut berlaku pada bagian yang kecil dari balok. Umpamanya, dalam sebuah gudang barang-barang boleh ditumpuk sepanjang sebuah balok. Gaya-gaya demikian disebut beban-beban yang *terdistribusi*.



Gambar 4-5 Pembebanan terpusat pada sebuah balok (a) yang sesungguhnya (b) yang diidealisasi

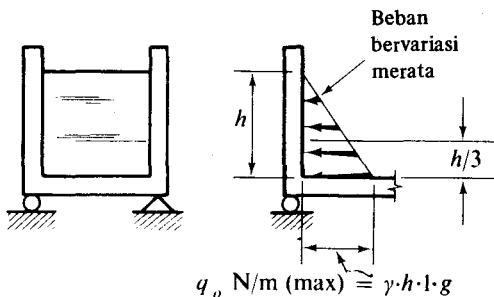
Banyak jenis-jenis beban yang terdistribusi yang terjadi. Diantaranya, ada dua macam beban yang terutama sekali penting: beban *yang terdistribusi secara merata* dan

beban yang bervariasi secara merata. Jenis beban yang pertama dengan mudah dapat merupakan suatu idealisasi dari muatan gudang yang baru saja disinggung, di mana barang-barang yang sejenis ditumpuk mencapai ketinggian yang sama di sepanjang balok tersebut. Demikian juga balok itu sendiri, bila luas penampang adalah tetap, merupakan suatu gambaran yang bagus dari pembebanan yang sama jenisnya. Suatu keadaan yang nyata dan idealisasi diagramatis dari hal di atas terlihat pada Gambar 4-6. Beban ini biasa dinyatakan sebagai gaya per satuan panjang balok, kecuali disebutkan yang sebaliknya. Dalam satuan SI ia boleh ditulis sebagai newton per meter (N/m), atau kilonewton per meter (kN/m).



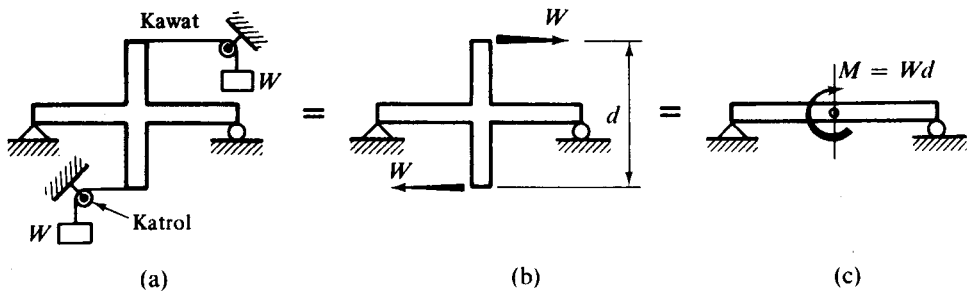
Gambar 4-6 Pembebanan yang terdistribusi (a) sesungguhnya (b) idealisasi

Beban-beban yang bervariasi secara merata bekerja pada dinding yang vertikal dan miring dari suatu bejana berisi zat cair. Ini dilukiskan pada Gambar 4-7 di mana diambil bahwa balok vertikal lebarnya satu meter sedang satuan massa zat cair adalah  $\gamma$  (kg/m<sup>3</sup>). Untuk pembebanan jenis ini, harus diperhatikan benar bahwa intensitas maksimum beban  $q_0$  N/m hanya berlaku pada suatu panjang yang kecil takberhingga dari balok. Besarnya dua kali intensitas tekanan rata-rata. Jadi gaya total yang digunakan oleh pembebanan seperti ini pada suatu balok adalah  $(q_0 h/2)$  N, dan resultan-nya bekerja pada jarak  $h/3$  di atas dasar bejana. Dasar horizontal dari bejana yang berisi zat cair mendapat beban secara merata.



Gambar 4-7 Pembebanan hidrostatik pada dinding vertikal

Akhirnya, ada kemungkinan untuk membebani balok dengan suatu momen terpusat yang diberikan pada balok tersebut, tepatnya pada suatu titik. Salah satu susunan yang mungkin untuk menggunakan momen terpusat dapat dilihat dalam Gambar 4-8(a), dan



Gambar 4-8 Metoda penggunaan momen terpusat pada suatu balok

lambang diagramatis yang digunakan dalam buku ini dapat dilihat dalam Gambar 4-8(c).

Keinginan untuk suatu pengertian yang lengkap mengenai pernyataan lambang untuk tumpuan dan gaya seperti yang telah dibahas tidak perlu mendapat perhatian yang lebih besar lagi. Yang perlu diperhatikan adalah macam perlawanan yang diambil oleh berbagai jenis tumpuan dan cara menyatakan gaya-gaya pada tumpuan yang demikian. Catatan-catatan ini akan berguna untuk membangun diagram benda bebas dari balok.

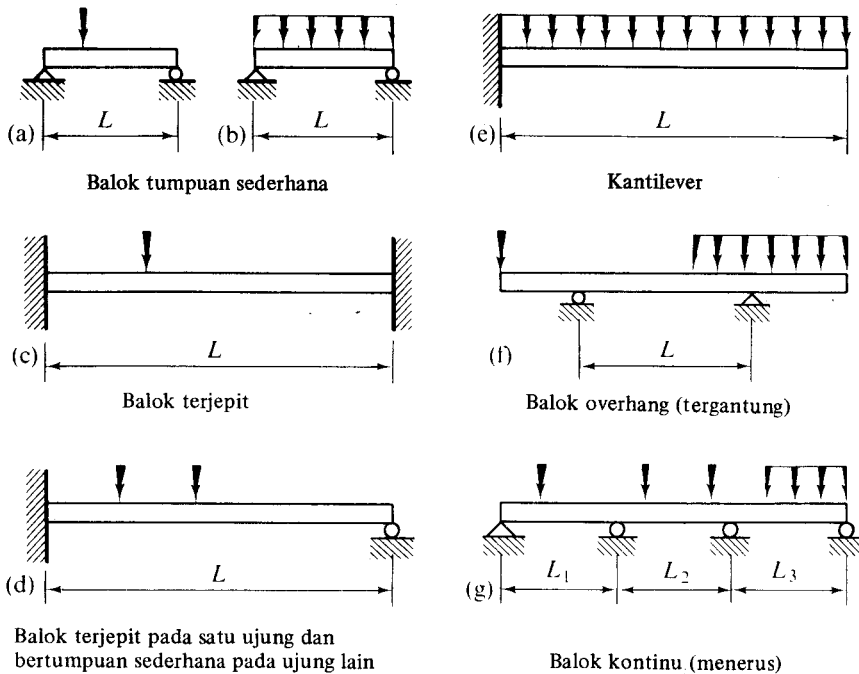
#### 4-4 KLASIFIKASI BALOK

Balok diklasifikasikan ke dalam beberapa kelompok, terutama tergantung pada macam tumpuan yang digunakan. Jadi bila tumpuan tersebut berada pada ujung-ujung dan pada pasak atau rol, maka balok tersebut disebut *tumpuan yang sederhana* atau balok *sederhana*, lihat Gambar 4-9(a) dan (b). Balok tersebut menjadi balok *jepit* atau balok *ujung jepit*, Gambar 4-9(c), bila ujung-ujungnya mempunyai tumpuan jepit. Balok-balok demikian disebut juga *balok pengekang* (restrained beams) bila ujungnya "dikekang" untuk tidak berputar. Suatu balok terjepit pada salah satu ujung dan bebas sempurna pada ujung yang lain, mempunyai nama khusus, yaitu balok *kantilever*, Gambar 4-9(e).

Bila balok dibangun melewati tumpuan, maka balok tersebut dikatakan *tergantung*. Jadi balok yang terlihat dalam Gambar 4-9(f) adalah balok yang tergantung. Bila tumpuan-tumpuan antara terdapat pada batang kontinu secara fisis bekerja seperti balok, Gambar 4-9(g), maka balok tersebut dinamakan balok *kontinu* (menerus).

Untuk semua balok tersebut di atas jarak  $L$  antara tumpuan disebut *bentang* (span). Pada balok kontinu terdapat beberapa bentang yang panjangnya mungkin berbeda-beda.

Sebagai tambahan terhadap pengklasifikasian balok berdasarkan kepada tumpuan, maka sering pula dipakai ungkapan-ungkapan yang deskriptif mengenai macam pembebanan yang digunakan. Jadi balok yang terlihat dalam Gambar 4-9(a) adalah balok sederhana dengan beban terpusat, sedang yang terlihat dalam Gambar 4-9(b) adalah balok sederhana dengan beban yang terdistribusi merata. Jenis balok yang lain dapat pula dilukiskan secara yang sama.



Gambar 4-9 Jenis-jenis balok

Untuk kebanyakan tugas dalam mekanika bahan, adalah berfaedah pula untuk mengelompokkan lebih lanjut balok-balok tersebut ke dalam balok-balok statis tertentu (statically determinate) dan statis tak tentu (statically indeterminate). Bila balok tersebut yang dibebani dalam suatu bidang adalah statis tertentu, maka jumlah komponen-komponen reaksi yang tidak diketahui tidak akan melebihi tiga. Komponen yang tidak diketahui ini selalu dapat ditentukan dari persamaan keseimbangan statika. Pasal yang berikut dengan ringkas meninjau kembali metoda-metoda statika untuk menghitung reaksi untuk balok-balok statis tertentu. Sedang penyelidikan mengenai balok statis tak tentu akan kita tunda sampai Bab 11.

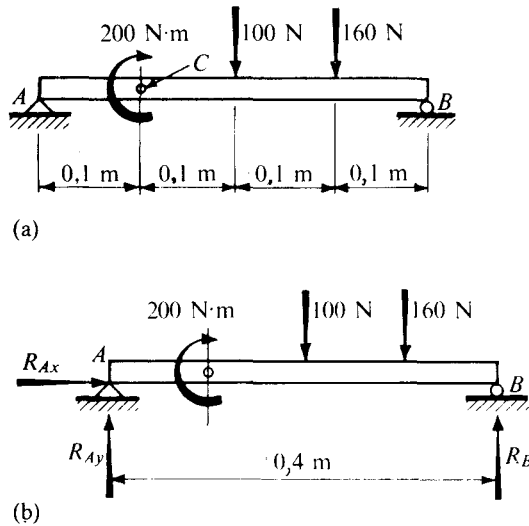
#### 4-5 PERHITUNGAN REAKSI BALOK

Semua tugas dengan balok yang berikut akan diawali dengan penentuan gaya reaksi. Bila semua gaya-gaya bekerja dalam satu bidang, maka tiga persamaan keseimbangan statika harus tersedia untuk tujuan ini. Yaitu  $\sum F_x = 0$ ,  $\sum F_y = 0$  dan  $\sum M_z = 0$ , yang telah kita bicarakan dalam Bab 1. Untuk balok lurus dalam kedudukan yang horizontal, maka sumbu- $x$  akan diambil sebagai arah yang horizontal, sumbu  $y$  untuk arah yang vertikal dan sumbu  $z$  yang tegak lurus terhadap bidang kertas. Penggunaan ketiga persamaan pada beberapa persoalan balok dilukiskan di bawah dan dimaksudkan untuk berlaku sebagai peninjauan kembali dari prosedur yang penting ini. Deformasi dari

balok, sangat kecil, hingga dapat diabaikan bila persamaan-persamaan di atas digunakan. Untuk balok-balok yang stabil sejumlah kecil dari deformasi yang mengambil bagian dalam merubah titik-titik tangkap gaya-gaya tidaklah terlihat.

#### CONTOH 4-1

Hitunglah reaksi pada tumpuan untuk balok sederhana berbeban seperti yang terlihat dalam Gambar 4-10(a). Abaikanlah berat dari balok.



Gambar 4-10

#### PENYELESAIAN

Pembebanan dari balok telah diberikan dalam bentuk diagramatis. Hakekat dari tumpuan akan dibahas sesudah ini, dan komponen-komponen yang tidak diketahui dari reaksi ini dengan tegas ditunjukkan pada diagram. Balok tersebut, dengan komponen-komponen reaksi yang tidak diketahui dan semua gaya-gaya terpakai, digambarkan kembali dalam Gambar 4-10(b) untuk dengan sengaja menekankan langkah penting ini dalam membangun diagram benda bebas. Pada titik *A*, dua komponen reaksi mungkin ada, karena ujungnya diberi pasak. Reaksi di titik *B* dapat bekerja hanya dalam arah vertikal karena ujung terletak di atas rol. Titik-titik tangkap dari semua gaya secara cermat harus diperhatikan. Sesudah diagram benda bebas dari balok dibuat, maka penyelesaian dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan-persamaan statika.

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 & R_{Ax} &= 0 \\ \sum M_A &= 0 \text{ (}\curvearrowleft\text{)} +, & 200 + (100)(0,2) + (160)(0,3) & - R_B(0,4) = 0 \\ & & R_B &= + 670 \text{ N } \uparrow \\ \sum M_B &= 0 \text{ (}\curvearrowleft\text{)} +, & R_{Ay}(0,4) - 200 - (100)(0,2) - (160)(0,1) & = 0 \\ & & R_{Ay} &= 410 \text{ N } \downarrow\end{aligned}$$



*Periksa:*

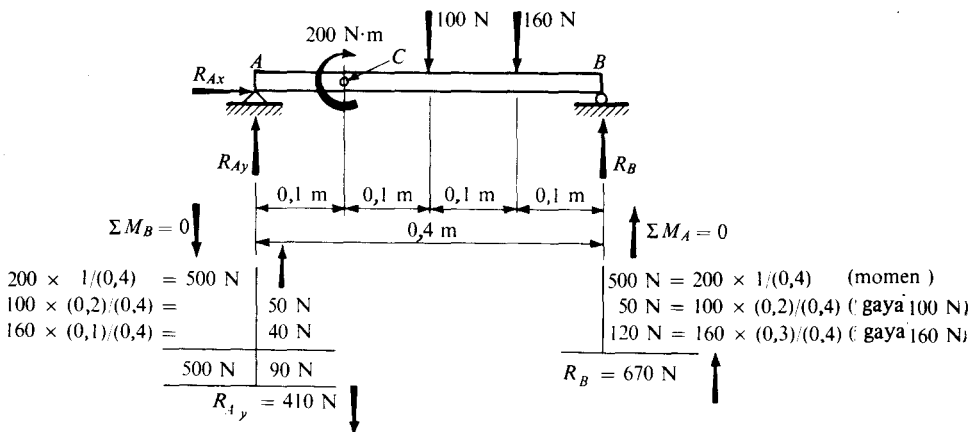
$$\sum F_y = 0 \uparrow +, \quad -410 - 100 - 160 + 670 = 0$$

Perhatikanlah bahwa  $\sum F_x = 0$  menyelesaikan satu dari tiga persamaan statika yang bebas, hingga hanya dua komponen reaksi tambahan yang dapat ditentukan dari statika. Bila yang muncul pada tumpuan adalah lebih banyak komponen reaksi dan momen yang tidak diketahui, maka soal tersebut menjadi statis tak tentu. Dalam Gambar 4-9 balok-balok yang diperlihatkan pada (c), (d) dan (g) adalah balok-balok statis tak tentu dan boleh dibuktikan dengan memeriksa sejumlah komponen reaksi yang tidak diketahui. (Cobalah membuktikan pernyataan ini).

Perhatikan pula bahwa momen terpusat yang bekerja pada titik *C* masuk hanya ke dalam tanda penjumlahan momen. Tanda positif dari  $R_B$  menunjukkan bahwa arah  $R_B$  sesuai dengan anggapan dalam membuat Gambar 4-10(b). Sebaliknya yang terjadi dengan arah  $R_{Ay}$  di mana arah vertikal dari reaksi di titik *A* adalah ke bawah. Perhatikanlah bahwa pemeriksaan pekerjaan menghitung tersebut di atas akan didapat bila perhitungan-perhitungan dilakukan menurut yang telah diperlihatkan di atas.

#### PENYELESAIAN DENGAN CARA LAIN

Dalam menghitung gaya-gaya reaksi beberapa insinyur lebih menyukai membuat perhitungan dengan cara yang ditunjukkan oleh Gambar 4-11. Pada dasarnya ini melibatkan penggunaan dasar-dasar yang sama. Hanya perinciannya yang berlainan. Reaksi untuk setiap gaya ditentukan satu persatu sekaligus. Reaksi total diperoleh dengan menjumlahkan semua reaksi ini. Prosedur ini membolehkan pemeriksaan seketika terhadap perhitungan yang sedang dilakukan. Untuk setiap gaya maka jumlah gaya-gaya reaksinya harus sama dengan gaya tersebut itu sendiri. Umpamanya untuk gaya 160 N, mudah dilihat bahwa gaya-gaya reaksi ke atas adalah 40 N dan 120 N dan berjumlah 160 N. Pada

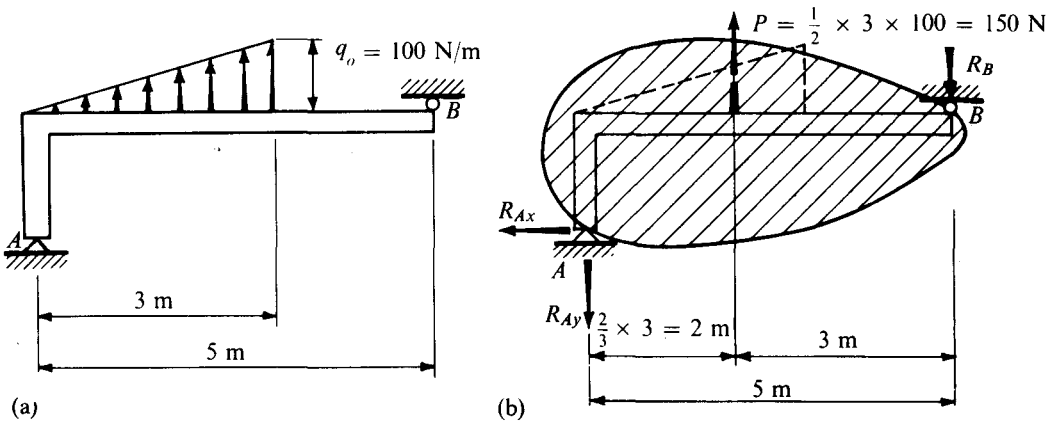


Gambar 4-11

pihak lain, momen terpusat di titik  $C$  adalah sebuah kopel dan mendapat perlawanan dari sebuah kopel juga. Hal ini menyebabkan suatu gaya *ke atas* sebesar 500 N pada reaksi kanan dan gaya *ke bawah* sebesar 500 N pula pada reaksi sebelah kiri.

#### CONTOH 4-2

Hitunglah gaya-gaya reaksi balok berbeban sebagian dengan beban bervariasi dengan merata seperti yang terlihat dalam Gambar 4-12(a). Abaikanlah berat dari balok.



Gambar 4-12

#### PENYELESAIAN

Pemeriksaan terhadap keadaan tumpuan menunjukkan ada tiga komponen gaya reaksi yang tidak diketahui, hingga balok tersebut termasuk yang statis tertentu. Hal ini serta beban yang bekerja diperlihatkan dalam Gambar 4-12(b). Terutama harus diperhatikan bahwa susunan batang tersebut tidaklah penting dalam menghitung gaya reaksi. Gambar yang bentuknya kasar yang tidak mirip dengan balok yang sesungguhnya dapat dilihat pada gambar untuk menekankan pendapat ini. Tetapi benda baru yang digambarkan ini haruslah ditumpu pada titik-titik  $A$  dan  $B$  dengan cara yang sama dengan balok yang asli.

Untuk menghitung gaya-gaya reaksi maka beban yang terdistribusi digantikan oleh gaya  $P$  yang setara. Gaya ini bekerja melalui titik berat gaya-gaya yang terdistribusi. Besaran-besaran yang bersangkutan ini diberikan tanda pada sketsa kerja. Gambar 4-12(b). Setelah diagram benda bebas dibuat, maka penyelesaian diperoleh dengan mempergunakan persamaan-persamaan keseimbangan statis.

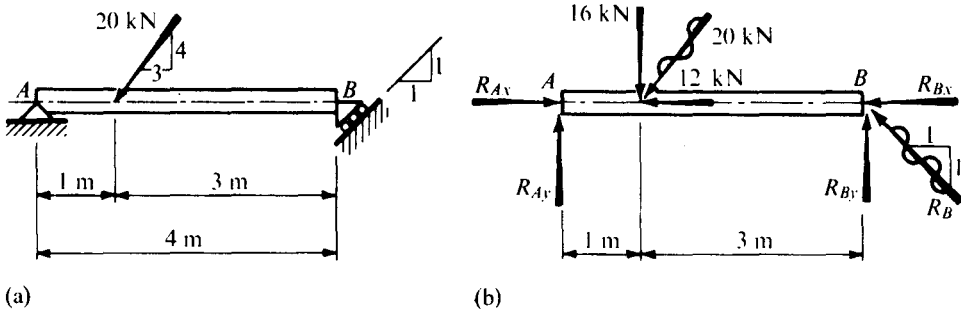
$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 & R_{Ax} &= 0 \\ \sum M_A &= 0 \circ +, & + (150)(2) - R_B(5) &= 0, & R_B &= 60 \text{ N} \downarrow \\ \sum M_B &= 0 \circ +, & - R_{Ay}(5) + (150)(3) &= 0, & R_{Ay} &= 90 \text{ N} \downarrow\end{aligned}$$

Periksa:

$$\sum F_y = 0 \uparrow +, \quad - 90 + 150 - 60 = 0$$

**CONTOH 4-3**

Tentukanlah gaya-gaya reaksi di titik *A* dan *B* untuk balok yang "tidak berberat" seperti yang terlihat dalam Gambar 4-13(a).



**Gambar 4-13**

**PENYELESAIAN**

Diagram benda bebas terlihat dalam Gambar 4-13(b). Pada titik *A* ada dua komponen gaya reaksi yang tidak diketahui, yaitu  $R_{Ax}$  dan  $R_{Ay}$ . Pada titik *B* gaya reaksi  $R_B$  bekerja tegaklurus pada bidang tumpuan dan memberikan suatu harga yang tidak diketahui yang tunggal. Adalah bijaksana untuk menggantikan gaya ini dengan dua komponen  $R_{By}$  dan  $R_{Bx}$  yang dalam soal yang khusus ini mempunyai harga yang sama. Demikian pula, adalah sangat baik mengganti gaya yang miring dengan dua komponen seperti yang diperlihatkan. Langkah-langkah ini mengurangi masalah di mana semua gaya-gaya adalah horizontal atau vertikal. Ini baik sekali dalam menggunakan persamaan keseimbangan statis.

$$\sum M_A = 0 \circ +, \quad + (16)(1) - R_{By}(4) = 0, \quad R_{By} = 4 \text{ kN } \uparrow = |R_{Bx}|$$

$$\sum M_B = 0 \circ +, \quad + R_{Ay}(4) - (16)(3) = 0, \quad R_{Ay} = 12 \text{ kN } \uparrow$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow +, \quad + R_{Ax} - 12 - 4 = 0, \quad R_{Ax} = 16 \text{ kN } \rightarrow$$

$$R_A = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20 \text{ kN}$$

$$R_B = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2} \text{ kN}$$

*Periksa:*

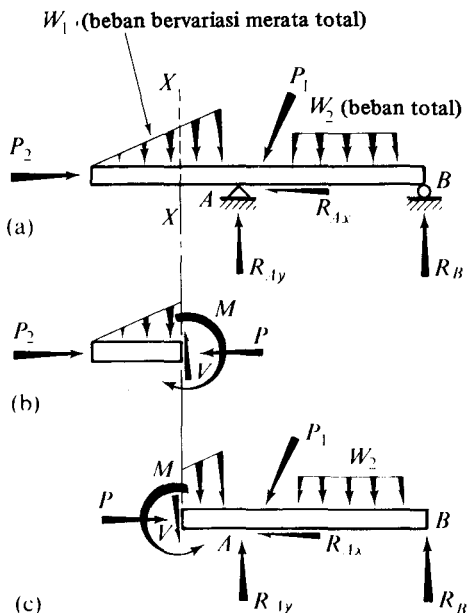
$$\sum F_y = 0 \uparrow +, \quad + 12 - 16 + 4 = 0$$

**4-6 APLIKASI METODA IRISAN**

Tujuan utama dari bab ini ialah untuk memantapkan cara menentukan gaya yang terdapat pada sebuah irisan dari balok. Untuk mendapatkan gaya-gaya ini, maka sekarang akan digunakan metoda irisan, yaitu pendekatan dasar dari mekanika bahan.

Penelaahan setiap balok dimulai dengan membuat diagram benda bebas. Gaya reaksi selalu dapat dihitung dengan mempergunakan persamaan-persamaan keseimbangan, selama balok tersebut merupakan statis tertentu. Sistem yang lengkap dari gaya-gaya yang menjaga balok tersebut berada dalam keseimbangan dengan demikian dapat disusun, sedang dalam langkah-langkah analisis yang berikut *tidak diperlukan membuat perbedaan antara gaya terpakai dan gaya reaksi*. Metoda irisan selanjutnya dapat digunakan untuk setiap irisan dari balok dengan mengerjakan konsep yang dipakai terdahulu di mana bila *keseuruhan benda* berada dalam keseimbangan maka *setiap bagian dari benda tersebut* berada pula dalam keseimbangan.

Untuk lebih khusus, tinjaulah sebuah balok seperti yang digambarkan dalam Gambar 4-14(a) dengan gaya-gaya terpusat dan terdistribusi yang bekerja terhadapnya. Gaya-gaya reaksi telah dianggap pula lebih dahulu sebagai besaran yang diketahui karena dapat dihitung seperti pada contoh-contoh soal yang telah kita tinjau lebih dahulu dalam Pasal 4-5. Gaya-gaya terpakai luar serta gaya-gaya reaksi pada tumpuan menjaga *keseuruhan benda* berada dalam keadaan seimbang. Sekarang tinjaulah suatu irisan khayal  $X-X$  yang *tegak lurus* terhadap sumbu balok yang memisahkan balok menjadi dua segmen seperti yang terlihat dalam Gambar-gambar 4-14(b) dan (c). Terutama perhatikanlah bahwa irisan khayal tersebut melalui beban yang terdistribusi dan memisahkan pula menjadi dua. Masing-masing segmen balok ini adalah benda bebas yang harus berada dalam keseimbangan. Tetapi syarat keseimbangan membutuhkan adanya suatu sistem gaya pada irisan dari balok tersebut. Pada umumnya pada sebuah irisan sebuah balok suatu gaya vertikal, gaya horisontal dan suatu mómen diperlukan untuk mempertahankan bagian balok tersebut berada dalam keseimbangan. Besaran-besaran ini mempunyai arti yang khusus dalam balok dan karena itu akan dibahas secara terpisah.

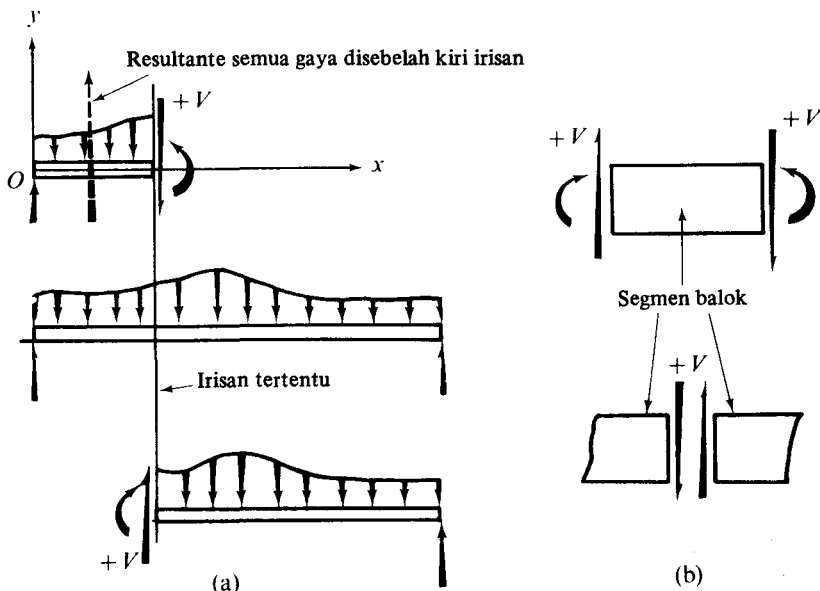


Gambar 4-14 Penggunaan metoda irisan pada balok statis tertentu

#### 4-7 GESER DALAM BALOK

Untuk mempertahankan segmen balok seperti yang terlihat dalam Gambar 4-14(b) berada dalam keseimbangan maka pada irisan harus ada suatu gaya dalam vertikal  $V$  yang memenuhi persamaan  $\Sigma F_y = 0$ . Gaya dalam  $V$  ini, yang bekerja *tegaklurus* pada sumbu balok, disebut *geser* atau *gaya geser* (shearing force). *Gaya geser secara numerik adalah sama dengan jumlah aljabar dari semua komponen vertikal gaya-gaya luar yang bekerja pada segmen yang terisolasi*, tetapi dengan arah yang berlawanan. Dengan data kualitatif yang ditunjukkan oleh Gambar 4-14(b) maka  $V$  mempunyai arah yang berlawanan dengan beban yang ke bawah di sebelah kiri irisan. Gaya geser pada irisan dapat pula dihitung dengan meninjau segmen balok yang sebelah kanan seperti yang terlihat dalam Gambar 4-14(c). Geser ini secara numerik sama dan berlawanan arah dengan jumlah semua gaya vertikal, termasuk komponen gaya-gaya reaksi yang terdapat di sebelah kanan irisan. Apakah segmen yang sebelah kanan atau sebelah kiri yang dipergunakan untuk menentukan gaya geser pada irisan, tidaklah penting, yang menentukan adalah kesederhanaan dalam perhitungan. Geser *pada irisan yang lain* dapat pula dihitung dengan cara yang serupa.

Pada waktu ini suatu pengamatan yang berarti haruslah kita buat. Geser yang *sama* yang terlihat dalam Gambar-gambar 14(b) dan (c) pada irisan  $X-X$  dalam kedua diagram mempunyai arah yang berlawanan. Untuk yang *bagian* beban  $W_1$  yang mengarah ke bawah pada sebelah kiri irisan  $X-X$ , balok pada irisan tersebut mempunyai sebuah tumpuan ke atas untuk membuat gaya vertikal berada dalam keseimbangan. Sebaliknya, bagian balok yang dibebani tersebut menggunakan gaya arah ke bawah *pada* balok tersebut seperti yang terlihat dalam Gambar 4-14(c). Pada irisan geser "dua arah" haruslah dibedakan, tergantung kepada *segmen balok yang mana* yang ditinjau. Ini



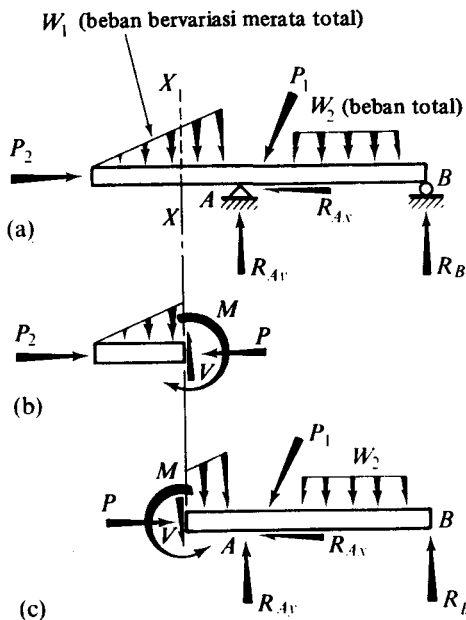
Gambar 4-15 Definisi dari geser positif

mengikuti konsep statika aksi-reaksi yang telah kita kenal dan yang telah terjadi dahulu dalam kasus batang beban aksial, dan kemudian dalam masalah puntiran.

Arah geser pada irisan  $X-X$  akan saling terbalik pada kedua diagram bila beban terdistribusi  $W_1$  bekerja ke atas. Acapkali keterbalikan yang serupa dalam arah geser terdapat pada suatu irisan atau yang lain di sepanjang balok untuk pertimbangan yang akan menjadi jelas kelak. Pemakaian kaidah tanda adalah perlu untuk membedakan antara kedua arah geser yang mungkin. Definisi dari geser positif digambarkan dalam gambar 4-15(a).\* Suatu gaya dalam ke bawah yang bekerja pada sebelah kiri dari suatu irisan atau satu gaya ke atas di sebelah kanan dari irisan yang sama adalah suatu geser positif. Geser positif untuk elemen yang diisolasi dari suatu balok oleh dua irisan diperlihatkan dalam Gambar 4-15(b). Sedang geser pada irisan  $X-X$  dari Gambar 4-14(a) adalah suatu geser negatif.

#### 4-8 GAYA AKSIAL DALAM BALOK

Sebagai tambahan pada gaya geser  $V$ , maka suatu gaya mendatar seperti  $P$  pada Gambar 4-16(b) dan (c), mungkin diperlukan pada sebuah irisan sebuah balok untuk memenuhi syarat keseimbangan. Besar dan arti dari gaya ini akan mengikuti jawab khusus dari persamaan  $\Sigma F_x = 0$ . Bila gaya horisontal  $P$  tersebut bekerja terhadap irisan



Gambar 4-16 Pemakaian metoda irisan pada balok statis tertentu (ulangan)

\* Definisi geser positif adalah berlawanan dengan penyelesaian matematis yang tepat yang berhubungan dengan sistem Cartesius empat persegi panjang sebelah kanan. Bagaimana pun hal ini akan digunakan di seluruh buku ini karena kaidah ini sangat banyak dipakai dalam kepustakaan teknik untuk penyelesaian yang benar-benar konsisten, lihat umpamanya E.P. Popov, *Introduction to Mechanics of Solids*, Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1968.

maka ia disebut *gaya dorong* (thrust); bila gaya tersebut menjauhi irisan, dinamakan *gaya tarik aksial* (axial tension). Sehubungan dengan perbedaan gaya-gaya ini maka digunakan pula sebutan gaya aksial. Pengaruh dari gaya aksial pada irisan sebuah batang telah dibahas pula dalam Bab 1. Kita melihat bahwa penting untuk membuat gaya ini melalui *titik berat* luas penampang untuk menghindari lenturan. Begitu pula bahwa *garis aksi gaya aksial selalu diarahkan melalui titik berat luas penampang dari balok*.

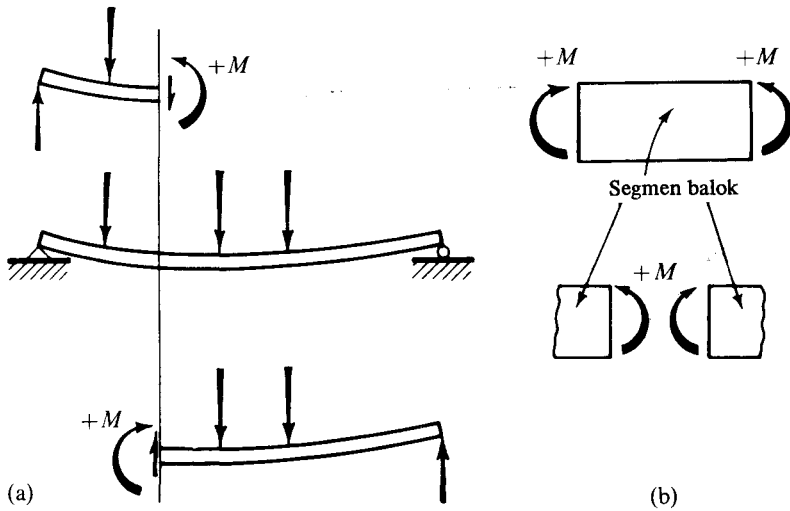
Kita boleh pula memeriksa suatu irisan dari balok untuk menentukan besaran gaya aksial dengan cara tersebut di atas. Gaya tarik pada sebuah irisan biasanya diambil positif. Gaya aksial (dorong) pada irisan  $X-X$  dalam Gambar-gambar 4-16(b) dan (c) adalah sama dengan gaya mendatar  $P_2$ .

#### 4-9 MOMEN LENTUR DALAM BALOK

Penentuan gaya geser dan aksial pada sebuah irisan balok melengkapi dua syarat statika yang harus dipenuhi oleh segmen. Gaya-gaya ini memenuhi persamaan  $\Sigma F_x = 0$  dan  $\Sigma F_y = 0$ . Syarat keseimbangan statis yang tinggal untuk persoalan planar adalah  $\Sigma M_z = 0$ . Pada umumnya, ini dipenuhi hanya dengan membentuk sebuah kopel atau *momen perlawanan dalam* (internal resisting moment) pada luas penampang dari irisan untuk menghadapi momen yang disebabkan oleh gaya-gaya luar. Momen perlawanan dalam tersebut haruslah bekerja dalam arah yang berlawanan dengan momen luar untuk memenuhi persamaan  $\Sigma M_z = 0$ . Demikian pula dari persamaan yang sama diperoleh *bahwa besar momen perlawanan dalam adalah sama dengan momen luar*. Momen-momen ini cenderung untuk melenturkan balok dalam bidang beban dan yang biasanya diartikan sebagai *momen lentur* (bending moments).

Momen lentur dalam  $M$  dapat ditunjukkan dalam Gambar 4-16(b). Momen ini dapat dibentuk hanya dalam daerah penampang balok dan setara dengan sebuah kopel. Untuk menentukan momen ini perlu dijaga keseimbangan segmennya, jumlah momen yang disebabkan oleh gaya-gaya dapat dibuat disekitar tiap titik dalam bidang; sudah tentu, *semua* gaya dikalikan dengan lengan harus dimasukkan ke dalam penjumlahan ini. Tidak terkecuali gaya-gaya dalam  $V$  dan  $P$ . Untuk mengeluarkan momen yang disebabkan oleh gaya-gaya ini dari penjumlahan, lebih baik dalam persoalan-persoalan numerik ini untuk *memilih titik potong kedua gaya dalam ini sebagai titik di sekitar mana momen-momen tersebut dijumlahkan*. Pada titik ini kedua gaya  $V$  dan  $P$  ini mempunyai lengan yang panjangnya adalah nol, yang terletak *pada titik berat daerah penampang* dari balok.

Di samping meninjau segmen sebelah kiri irisan  $X-X$ , maka segmen sebelah kanan balok, seperti dalam Gambar 4-16(c), dapat pula digunakan untuk menentukan momen lentur dalam. Sebagai diterangkan di atas, momen dalam ini sama dengan momen luar gaya-gaya terpakai (termasuk gaya-gaya reaksi). Penjumlahan momen lebih baik dibuat di sekitar titik berat irisan *pada* potongan tersebut. Dalam Gambar 4-16(b) momen perlawanan dapat ditafsirkan secara fisis sebagai suatu tarikan pada serat atas dan dorongan kepada serat yang lebih bawah. Interpretasi yang sama dapat pula berlaku untuk momen yang sama dalam Gambar 4-16(c).



Gambar 4-17 Definisi dari momen lentur positif

Bila beban  $W_1$  dalam Gambar 4-16(a) bekerja dalam arah yang berlawanan, maka momen perlawanan dalam Gambar-gambar 4-16(b) dan (c) akan terbalik. Hal ini dari keadaan yang serupa memerlukan penggunaan kaidah tanda untuk momen lentur. Kaidah ini berhubungan dengan tindakan fisis yang tertentu dari balok tersebut. Umpamanya, pada Gambar-gambar 4-16(b) dan (c) momen-momen dalam tersebut menunjukkan tarik pada bagian atas dari balok dan menekan bagian yang lebih bawah. Ini cenderung untuk memperbesar panjang permukaan atas dari balok dan memperpendek bagian permukaan yang lebih rendah. Kejadian yang terus menerus dari momen-momen seperti itu di sepanjang balok membuat balok tersebut berubah bentuk melengkung ke atas, yaitu "tahan air". Momen lentur yang demikian diberi *tanda negatif*. Sebaliknya, momen yang positif didefinisikan sebagai yang menghasilkan tekan di sebelah atas dan tarik di sebelah lebih bawah dari suatu penampang balok. Dalam keadaan demikian balok tersebut dianggap mempunyai bentuk "menyimpan air". Umpamanya, sebuah balok sederhana yang mendukung suatu kelompok gaya ke bawah akan melengkung ke bawah seperti yang diperlihatkan dalam bentuk yang *berlebihan* dalam Gambar 4-17(a), suatu kenyataan yang dapat diduga secara langsung dengan intuisi. Pada balok seperti itu, suatu pembahasan yang terperinci dari momen lentur sepanjang balok memperlihatkan bahwa semua momen tersebut adalah positif. Pengertian momen lentur yang positif pada suatu irisan ditunjukkan dalam Gambar 4-17(b).

#### 4-10 DIAGRAM GESER, GAYA AKSIAL DAN MOMEN LENTUR

Dengan metoda yang dibahas di atas maka besaran dan arti dari gaya geser, gaya aksial dan momen lentur dapat diperoleh pada berbagai irisan dari balok. Selanjutnya, dengan memakai kaidah tanda untuk besaran-besaran ini, suatu plot dari harga-harganya



dapat dibuat pada diagram-diagram yang *terpisah*. Pada diagram-diagram tersebut berdasarkan basis yang menyatakan panjang balok, maka ordinat menunjukkan besaran-besaran yang dihitung. Bila titik-titik ordinat ini digambar dan dihubungkan oleh garis, kita memperoleh pernyataan grafis dari fungsi-fungsi tersebut. Diagram-diagram ini sesuai dengan macam besaran yang digambarkannya, yang berturut-turut disebut *diagram gaya geser*, *diagram gaya aksial*, atau *diagram momen lentur*. Dengan bantuan diagram demikian, maka besar dan letak berbagai besaran ini dengan segera menjadi jelas. Adalah lebih baik membuat plot ini langsung di bawah diagram benda bebas dari balok, dengan mempergunakan skala horisontal yang sama untuk panjang balok tersebut. Dalam membuat diagram-diagram tersebut, biasanya tidak diperlukan ketelitian seperti para juru gambar. Meskipun ordinat-ordinat yang penting ditandai dengan harga numeriknya.

Diagram gaya aksial tidak umum digunakan dalam sehari-hari sebagaimana halnya diagram gaya geser dan momen lentur. Hal ini disebabkan oleh kebanyakan balok yang dipelajari dalam praktek adalah yang dibebani oleh gaya-gaya yang bekerja tegaklurus terhadap sumbu balok. Malahan pada pembebanan balok tersebut, gaya aksial tidak ada pada irisan-irisannya.

Diagram-diagram geser dan momen adalah yang amat penting. Dari diagram ini para perancang dapat dengan sekilas melihat macam kemampuan yang dapat diharapkan dari balok pada setiap irisan. Pada Bab 10 mengenai disain batang metoda untuk menggambar diagram-diagram ini secara cepat akan dibahas kelak. Bagaimana pun, prosedur yang telah dibahas di atas mengenai pengirisan sebuah balok serta mendapatkan sistem gaya-gaya yang terdapat pada irisan adalah merupakan pendekatan yang sangat mendasar. Ini akan digunakan dalam melukiskan contoh-contoh yang berikut.

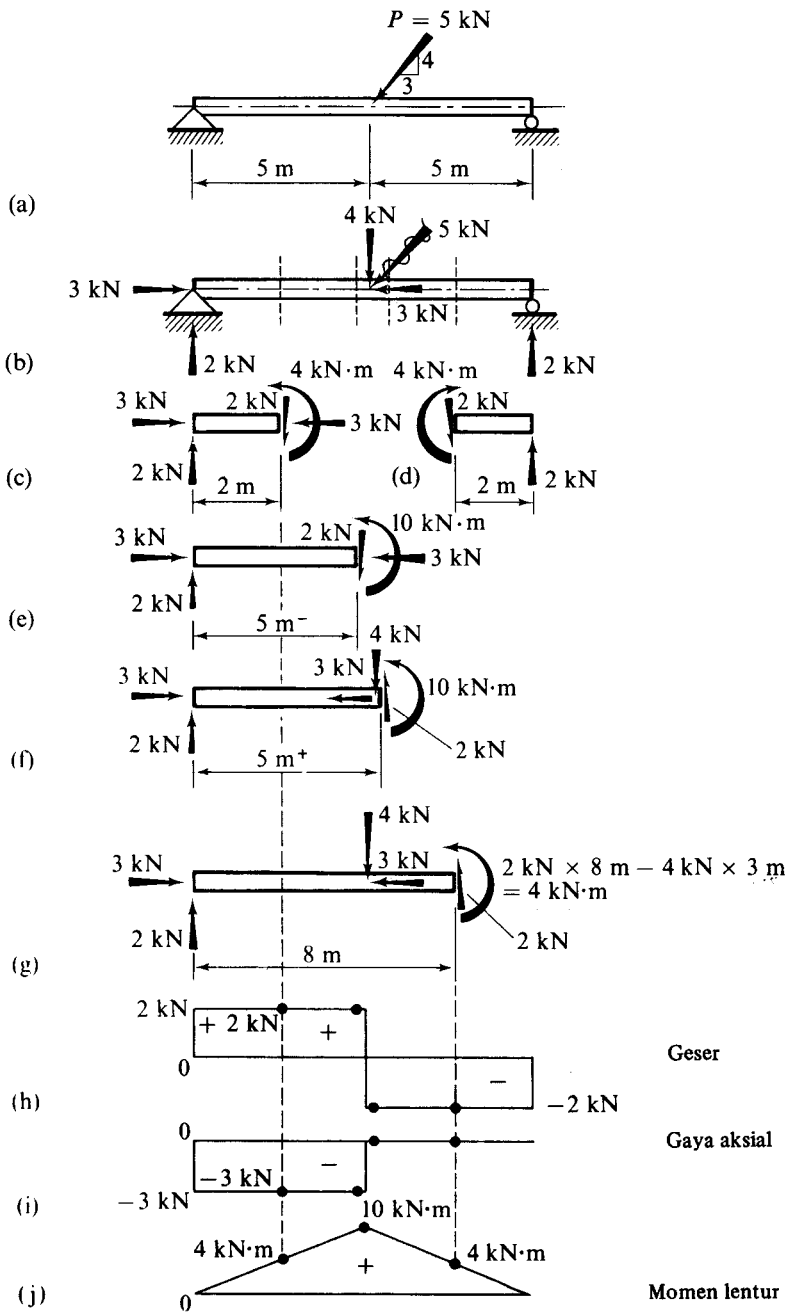
#### CONTOH 4-4

Gambarlah diagram-diagram gaya geser, gaya aksial dan momen lentur untuk balok yang tidak berberat seperti yang terlihat dalam Gambar 4-18(a), yang mengalami gaya miring sebesar  $P = 5 \text{ kN}$ .

#### PENYELESAIAN

Diagram benda bebas untuk balok tersebut dapat dilihat dalam Gambar 4-18(b). Gaya-gaya reaksi diperoleh sesudah gaya terpakai diuraikan menjadi dua komponen. Kemudian diselidiki beberapa irisan yang dibuat pada balok tersebut, seperti yang terlihat dalam Gambar-gambar 4-18(c), (d), (e), (f) dan (g). Untuk setiap kasus pertanyaan yang sama dapat diajukan: *Gaya-gaya dalam yang manakah yang diperlukan untuk menjaga segmen balok tersebut berada dalam keseimbangan?* Besaran-besaran yang sesuai ditulis pada masing-masing diagram benda bebas yang bersangkutan dari segmen balok. Ordinat untuk besaran-besaran ini ditunjukkan oleh titik-titik tebal dalam Gambar-gambar 4-18(h), (i) dan (j) dengan perhatian kepada tanda-tanda besaran tersebut.

Perhatikanlah bahwa benda-benda bebas yang terlihat dalam Gambar-gambar 4-18(d) dan (g) adalah diagram pengganti karena memberikan keterangan yang sama dan biasanya keduanya tidak usah dibuat. Perhatikan pula bahwa irisan *agak sebelah kiri dari* gaya terpakai mempunyai satu macam tanda dari geser, Gambar 4-18(e), sedang *yang*



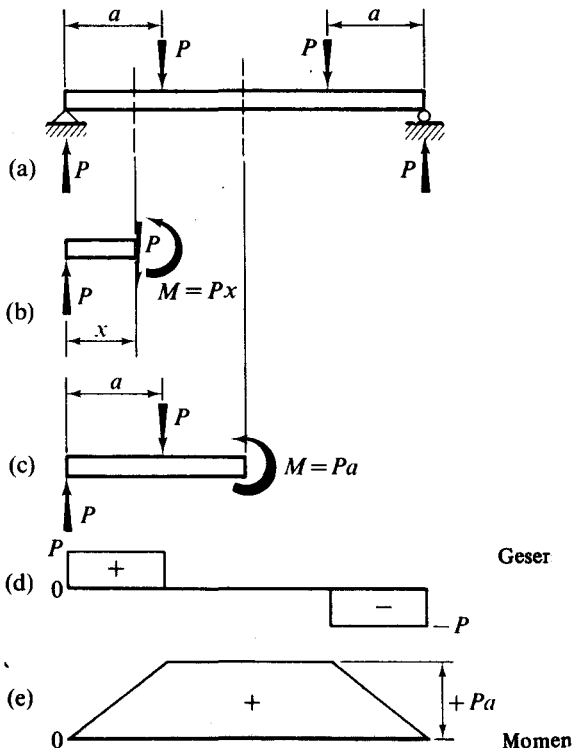
Gambar 4-18

*agak sebelah kanan*, Gambar 4-18(f), mempunyai tanda yang lain. Ini menunjukkan pentingnya menentukan geser pada sebelah menyebelah gaya terpusat. Untuk keadaan yang diperlihatkan tersebut, maka balok *tidak melawan* geser yang harganya sama dengan keseluruhan gaya. Sedang momen lentur untuk kedua kasus adalah sama.

Untuk kasus yang khusus ini, setelah beberapa titik individual telah ditetapkan pada ketiga diagram dalam Gambar 4-18(h), (i), dan (j), maka sifat masing-masing besaran pada keseluruhan panjang balok boleh diperbincangkan. Jadi meskipun segmen balok yang terlihat dalam Gambar 4-18(c) panjangnya adalah 2 m, tetapi panjang ini boleh saja diambil berubah-ubah dari nol sampai panjang ke titik *dekat sebelah kiri gaya terpakai*, di mana *tidak terdapat perubahan gaya geser dan gaya aksial*. Jadi ordinat dalam Gambar-gambar 4-18(h) dan (i) *tetap* konstan untuk segmen balok ini. Di pihak lain, momen lentur bergantung dan berbanding lurus dengan jaraknya dari tumpuan, hingga besaran ini berubah secara linier seperti yang terlihat dalam Gambar 4-18(j). Pertimbangan yang serupa berlaku pula untuk segmen yang terlihat dalam Gambar 4-18(d), yang memungkinkan kita dapat melengkapi bagian sebelah kanan ketiga diagram tersebut di atas. Penggunaan diagram benda bebas dari Gambar 4-18(g) untuk melengkapi diagram yang sebelah kanan memberikan hasil yang sama pula.

#### CONTOH 4-5

Gambarlah diagram geser dan momen lentur untuk balok yang dibebani oleh gaya yang terlihat dalam Gambar 4-19(a).



Gambar 4-19

## PENYELESAIAN

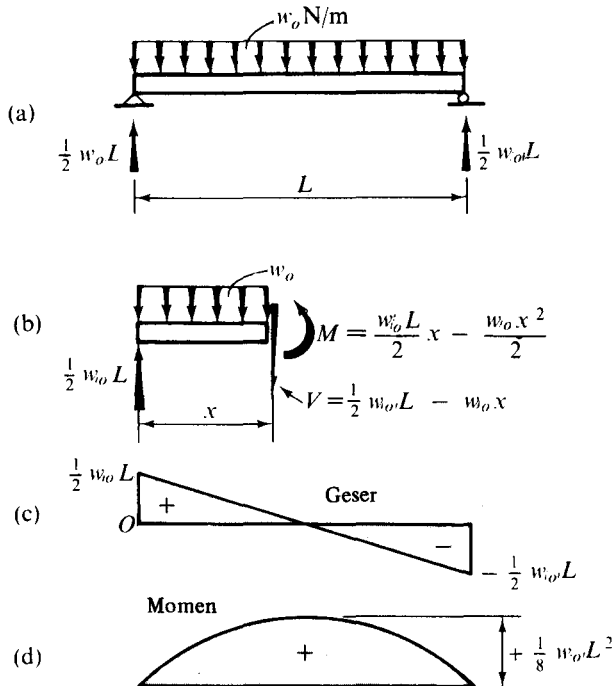
Sebuah irisan tertentu pada suatu jarak  $x$  dari tumpuan sebelah kiri memisahkan segmen balok yang terlihat dalam Gambar 4-19(b). Irisan ini berlaku untuk semua harga  $x$  yang terletak di sebelah kiri gaya terpakai  $P$ . Gaya geser tetap konstan yaitu sebesar  $+P$ . Tanpa memperhatikan jaraknya dari tumpuan. Momen lentur berubah secara linier dari titik tumpuan, sampai mendekati harga maksimumnya yaitu sebesar  $+Pa$ .

Suatu irisan tertentu yang berlaku di mana-mana antara dua gaya terpakai diperlihatkan dalam Gambar 4-19(c). Tidak ada gaya geser yang diperlukan untuk menjaga keseimbangan segmen dari bagian balok ini. Hanya satu momen lentur yang konstan sebesar  $+Pa$  yang ada dalam daerah ini yang harus dilawan oleh balok tersebut. Keadaan lentur yang demikian dinamakan lenturan *murni* (pure bending).

Diagram-diagram geser dan momen lentur untuk keadaan pembebanan ini dapat dilihat dalam Gambar-gambar 4-19(d) dan (e). Diagram gaya aksial tidak dibutuhkan karena gaya ini memang tidak ada dalam irisan balok ini.

## CONTOH 4-6

Gambarlah diagram geser dan momen lentur untuk sebuah balok sederhana dengan beban yang terdistribusi secara merata, Gambar 4-20(a).



Gambar 4-20

### PENYELESAIAN

Cara yang terbaik untuk menyelesaikan soal ini ialah dengan menuliskan pernyataan aljabar untuk besaran-besaran yang diselidiki. Untuk tujuan ini, sebuah irisan yang tertentu dibuat pada jarak  $x$  dari tumpuan sebelah kiri, yang digunakan untuk mengisolasi segmen yang terlihat dalam Gambar 4-20(b). Karena beban terpakai tersebut secara kontinu didistribusikan sepanjang balok, maka irisan ini adalah khas dan berlaku untuk *setiap irisan* di seluruh panjang balok. Pada kasus yang lebih sukar beberapa daerah dari sebuah balok mungkin harus pula diselidiki tergantung dari distribusi dari beban terpakai. Dalam beberapa hal dianjurkan mempergunakan beberapa titik asal dari  $x$  untuk mempermudah fungsi-fungsi aljabar.

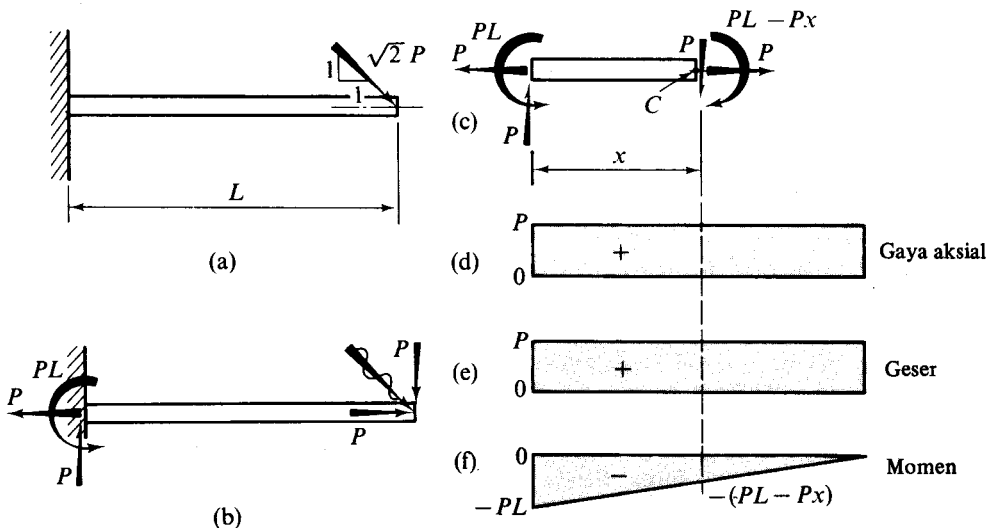
Gaya geser  $V$  adalah sama dengan gaya reaksi ke atas sebelah kiri *dikurangi* dengan beban pada sebelah kiri irisan. Momen lentur dalam  $M$  melawan momen yang disebabkan oleh gaya reaksi pada sebelah kiri *kurang* momen yang disebabkan oleh gaya-gaya pada sebelah kiri irisan yang sama. Penjumlahan momen-momen ini dilakukan sekitar suatu sumbu *pada irisan tersebut*. Meskipun biasanya kita mengisolasi segmen yang sebelah kiri, tetapi hasil yang sama akan dapat pula kita peroleh dengan meninjau segmen sebelah kanan dari balok, dengan memperhatikan kaidah-kaidah tanda. Gambar fungsi-fungsi  $V$  dan  $M$  dapat dilihat dalam Gambar-gambar 4-20(c) dan (d).

### CONTOH 4-7

Tentukanlah diagram-diagram geser, gaya aksial dan momen lentur untuk kantilever yang dibebani oleh suatu gaya yang miring pada ujungnya, Gambar 4-21(a).

### PENYELESAIAN

Pertama kali gaya miring tersebut kita uraikan ke dalam dua komponen yang diperlihatkan oleh Gambar 4-21(b) dan kemudian gaya-gaya reaksi dapat ditentukan. *Ketiga*



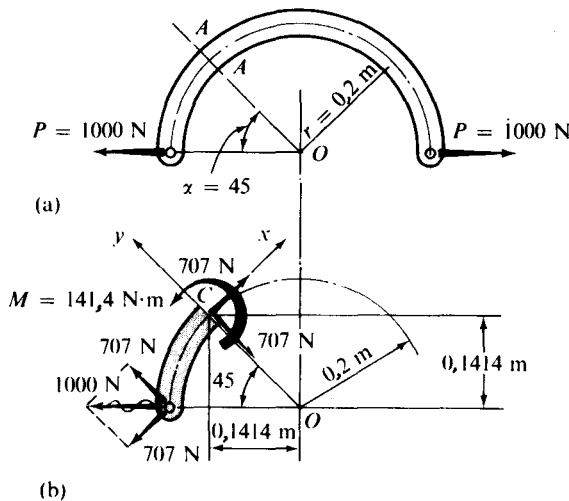
Gambar 4-21

besaran yang tidak diketahui pada tumpuan dapat diselesaikan dari persamaan-persamaan statika yang sudah kita kenal. Ini melengkapi diagram benda bebas yang terlihat dalam Gambar 4-21(b). *Kelengkapan menunjukkan semua gaya-gaya ini merupakan hal yang paling penting.*

Sebuah segmen balok diperlihatkan dalam Gambar 4-21(c); dari segmen ini kita melihat bahwa gaya geser dan gaya aksial tetap sama tanpa melihat jarak  $x$ . Pada pihak lain, momen lentur adalah suatu besaran variabel. Penjumlahan momen sekitar titik  $C$  memberikan  $(PL - Px)$  yang bekerja dalam arah yang terlihat. Ini menunjukkan suatu momen *negatif*. Momen pada tumpuan seperti halnya momen lentur *negatif* mempunyai kecenderungan untuk menarik serat *atas* dari balok. Ketiga diagram tersebut digambarkan dalam Gambar-gambar 4-21(d), (e), dan (f).

#### CONTOH 4-8

Diberikan sebuah balok lengkung yang sumbu titik beratnya dibengkokkan menjadi bentuk setengah lingkaran dengan radius 0,2 m seperti yang terlihat dalam Gambar 4-22(a). Bila batang ini ditarik oleh gaya sebesar 1000 N, hitunglah gaya aksial, geser dan momen lentur pada irisan  $A-A$ ,  $\alpha = 45^\circ$ . Sumbu titik berat dan gaya-gaya terpakai semuanya terletak dalam bidang yang sama.



Gambar 4-22

#### PENYELESAIAN

Tidak ada perbedaan yang berarti dalam metoda penyelesaian soal ini dibandingkan dengan persoalan balok lurus. Benda secara keseluruhan diperiksa dengan syarat keseimbangan. Dari keadaan persoalan di sini, hal seperti ini sudah merupakan kasus. Berikutnya, sebuah segmen dari balok diisolasikan, seperti Gambar 4-22(b). *Irisan A-A di-*

*ambil tegaklurus terhadap sumbu balok.* Sebelum menentukan besaran-besaran yang dikehendaki pada irisan, maka gaya terpakai  $P$  diuraikan ke dalam komponen-komponen yang sejajar dan tegaklurus terhadap irisan tersebut. Arah-arrah ini diambil masing-masing sebagai sumbu-sumbu  $y$  dan  $x$ . Penguraian ini mengganti gaya  $P$  dengan komponen-komponen yang diperlihatkan dalam Gambar 4-22(b). Dari  $\Sigma F_x = 0$ , gaya aksial pada irisan adalah  $+707$  N. Dari  $\Sigma F_y = 0$ , diperoleh gaya geser sebesar  $707$  N dengan arah yang seperti diperlihatkan dalam gambar. Momen lentur pada irisan dapat ditentukan dengan beberapa cara yang berbeda. Umpamanya, bila kita gunakan penjumlahan  $\Sigma M_o = 0$ , maka harus diperhatikan bahwa garis kerja gaya terpakai  $P$  dan geser pada irisan melalui titik  $O$ . Karena itu yang perlu kita perhatikan sekarang hanyalah gaya aksial melalui titik berat irisan dikalikan dengan radius, hingga kita memperoleh momen lentur *perlawanan* adalah  $707(0,2) = 141,4$  N·m, yang bekerja dalam arah yang diperlihatkan dalam gambar di atas. Cara penyelesaian yang lain dapat diperoleh dengan menggunakan  $\Sigma M_c = 0$ . Pada titik  $C$ , yaitu titik yang terletak pada titik berat, gaya aksial dan geser berpotongan. Oleh karena itu maka momen lentur sekarang menjadi sebagai hasil perkalian antara gaya terpakai  $P$  dengan lengan sebesar  $0,1414$  m. Dalam kedua metoda penentuan momen lentur ini, penguraian gaya  $P$  ke dalam komponen-komponennya tidaklah perlu dilakukan hingga persoalan sekarang menjadi lebih menyangkut perhitungan saja.

Pembaca dapat pula dianjurkan untuk melengkapi persoalan ini dalam bentuk sudut umum  $\alpha$ . Beberapa pengamatan yang penting mungkin dapat dibuat dari penyelesaian umum seperti ini. Momen-momen pada ujung-ujung akan menjadi nol untuk  $\alpha = 0^\circ$  dan  $\alpha = 180^\circ$ . Untuk  $\alpha = 90^\circ$  gaya geser akan menjadi nol dan gaya aksial akan menjadi sama dengan gaya terpakai  $P$ . Demikian pula dengan momen lentur yang menjadi maksimum pada  $\alpha = 90^\circ$ .

#### 4-11 PROSEDUR LANGKAH DEMI LANGKAH (STEP-BY-STEP PROCEDURE)

Dalam analisis balok adalah penting sekali untuk dapat menentukan gaya geser, gaya aksial dan momen lentur pada setiap irisan. Teknik untuk mendapatkan besaran-besaran ini luar biasa jelasnya dan sistematis. Untuk memberikan penekanan lebih lanjut, maka langkah-langkah yang digunakan untuk menyelesaikan semua soal-soal yang sudah dibahas akan kita ringkas sekarang. Ikhtisar ini dimaksudkan untuk membantu pada mahasiswa dalam melakukan analisis yang tertib mengenai persoalan ini. Menghafal belaka prosedur ini adalah mengecewakan.

1. Buatlah skets balok yang baik di mana *semua* gaya-gaya terpakai dengan jelas diperlihatkan beserta letaknya terhadap tumpuan.
2. Dengan tegas tunjukkan gaya-gaya reaksi yang tidak diketahui (lebih baik menggunakan pensil berwarna). Ingatlah bahwa sebuah tumpuan rol mempunyai *satu* gaya reaksi yang tidak diketahui, tumpuan berpasak mempunyai *dua* gaya reaksi yang tidak diketahui, sedang tumpuan jepit mempunyai *tiga* gaya reaksi yang tidak diketahui.

3. Gantilah semua gaya-gaya miring (yang diketahui dan tidak diketahui) dengan komponen-komponen yang sejajar dan tegaklurus dengan balok.\*
4. Pergunakanlah persamaan-persamaan statika untuk memperoleh gaya-gaya reaksi tersebut.† Pemeriksaan terhadap gaya-gaya reaksi yang dilakukan dengan cara yang sudah dikemukakan dalam Contoh-contoh 4-1, 4-2 dan 4-3, adalah sangat diperlukan.
5. Buatlah suatu irisan pada letak yang dikehendaki dari balok yang tegaklurus pada sumbunya. Irisan khayal ini memotong *balok tersebut saja* dan isolasikan gaya-gaya yang bekerja pada segmen tersebut.
6. Pilihlah suatu segmen di sebelah menyebelah irisan yang sudah dikemukakan dan gambarkan kembali segmen ini, dengan menunjukkan semua gaya-gaya luar yang bekerja padanya. Ini harus termasuk semua komponen gaya-gaya reaksi.
7. Tunjukkan ketiga besaran yang tidak diketahui yang mungkin ada pada irisan potongan, yaitu, perlihatkanlah gaya-gaya  $P$ ,  $V$  dan  $M$ , dengan mengandaikan arah-arah mereka.
8. Pergunakanlah persamaan-persamaan keseimbangan untuk segmen tersebut dan selesaikanlah untuk besaran-besaran  $P$ ,  $V$  dan  $M$ . Bila hasil penyelesaian tersebut menunjukkan bahwa besaran-besaran ini berharga negatif, maka arah yang telah diandaikan semula pada irisan tersebut haruslah dibalikkan.

Prosedur ini memungkinkan kita menentukan gaya geser, gaya aksial dan momen lentur pada setiap irisan sebuah balok. Tanda untuk besaran-besaran ini mengikuti definisi-definisi yang telah diberikan lebih dahulu. Bila yang dikehendaki adalah diagram sistim gaya-gaya dalam, maka beberapa irisan bisa pula diselidiki. Janganlah salah menentukan perubahan mendadak dari gaya geser pada gaya-gaya yang terpusat, dan perubahan mendadak dari harga momen lentur pada titik-titik di mana ada momen-momen yang terpusat. Kadang-kadang diperlukan pula pernyataan aljabar dari besaran-besaran yang sama.

Dalam pembahasan di atas pembuatan diagram-diagram gaya geser dan momen terutama digambarkan untuk batang yang horisontal. Untuk batang yang miring, prosedur adalah sama, kecuali bila mengarahkan sumbu koordinat sepanjang dan tegaklurus sumbu batang. Pada sistem struktur melengkung dan yang mengikuti ruang arah sumbu adalah sepanjang sumbu dari batang. Dalam kasus demikian salah satu sumbu koordinat diambil menyinggung terhadap sumbu batang, seperti yang terlihat dalam Gambar 4-22. Untuk menyelesaikan dengan skema diagramatis yang digunakan dalam buku ini untuk balok horisontal, maka ordinat untuk momen lentur dari sistem lengkung dan sistem bentuk ruang haruslah diplot pada bagian tekan dari irisan.‡

Pada waktu ini disarankan untuk meninjau kembali Pasal 1-9 mengenai pendekatan dasar dari mekanika bahan, sebagai pengetahuan yang sangat baik mengenai isi pasal tersebut.

\* Suatu kecerdikan yang lebih besar dibutuhkan untuk menghadapi balok-balok yang melengkung.

† Langkah ini dapat dihilangkan untuk kantilever dengan mengerjakan dari ujung yang bebas.

‡ Dalam beberapa buku mengenai analisa struktur, skema yang berlawanan dipergunakan pula.

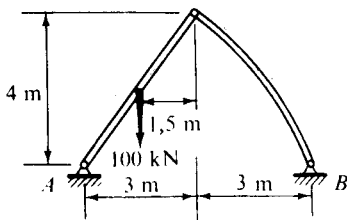


SOAL-SOAL YANG HARUS DISELESAIKAN

(Catatan: Sebagai tambahan pada balok, maka kerangka sederhana termasuk pula ke dalam soal-soal yang berikut. Untuk besaran-besaran yang ditanyakan, penelaahan mengenai kerangka-kerangka ini analog dengan yang mengenai balok).

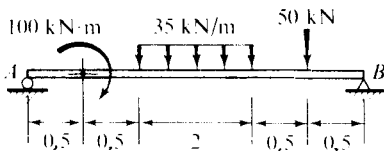
4-1. Buktikanlah bahwa efek terhadap suatu struktur dari gaya tarik yang bekerja pada kabel fleksibel yang melalui sebuah katrol yang tidak mempunyai gesekan adalah sama dengan yang dari dua gaya yang sama yang bekerja pada titik pusat gandar.

4-2. Hitunglah gaya-gaya reaksi pada tumpuan-tumpuan sendi  $A$  dan  $B$ . *Jawab:*  $R_{Ax} = 18,75$  kN,  $R_{Ay} = 75$  kN.



GAMBAR SOAL 4 - 2

4-3. Untuk balok yang dibebani seperti yang diperlihatkan dalam gambar, tentukanlah besar dan arah gaya-gaya reaksi.

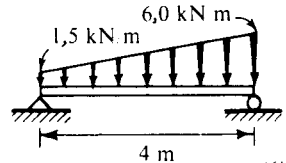


(Semua ukuran dalam mm)

GAMBAR SOAL 4 - 3

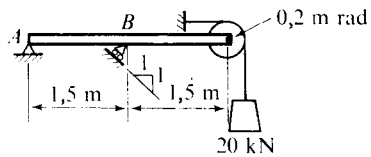
4-4 sampai 4-13. Untuk struktur-struktur planar yang dibebani seperti yang diperlihatkan dalam gambar-gambar yang di bawah, tentukanlah gaya-gaya reaksi atau komponen-komponen gaya reaksi. Semua struktur tersebut diandaikan tidak mempunyai berat. *Suatu penggambaran diagram benda bebas yang benar adalah bagi-*

*an yang penting dari masing-masing soal. Jawab:* Komponen reaksi ke atas untuk gaya reaksi sebelah kiri diberikan dalam tanda kurang pada masing-masing gambar, dalam satuan yang sama dengan beban terpakai.



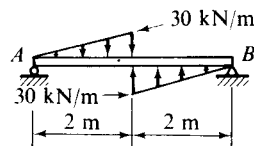
(6)

GAMBAR SOAL 4 - 4



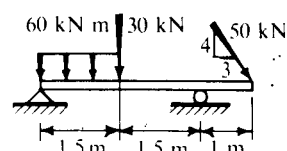
(-20)

GAMBAR SOAL 4 - 5



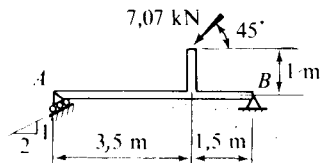
(10)

GAMBAR SOAL 4 - 6



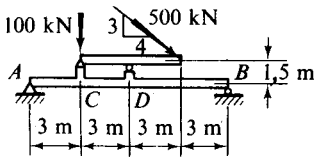
(69,2)

GAMBAR SOAL 4 - 7



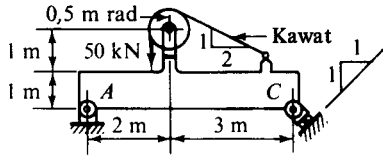
(2,5)

GAMBAR SOAL 4 - 8



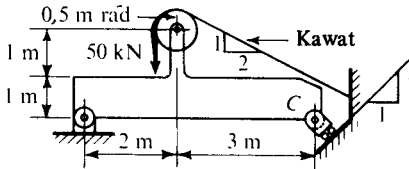
(100)

GAMBAR SOAL 4 - 9



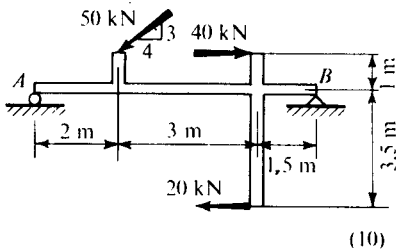
(35)

GAMBAR SOAL 4 - 10



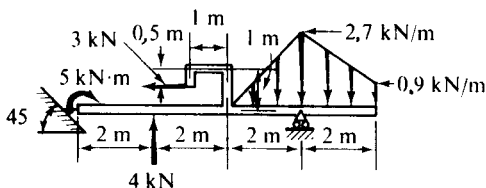
(25,6)

GAMBAR SOAL 4 - 11



(10)

GAMBAR SOAL 4 - 12

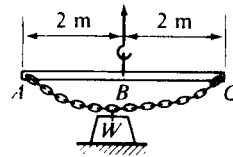


(877)

GAMBAR SOAL 4 - 13

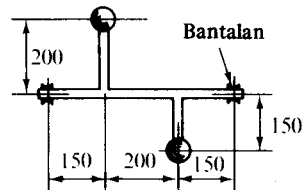
4-14. Untuk balok yang dibebani seperti yang diperlihatkan dalam gambar, hitunglah gaya geser dan momen lentur pada pertengahan rentangan yang disebabkan oleh beban terpakai.

4-15. Sebuah blok rantai dipergunakan untuk mengangkat berat 1000 kg dengan perantaraan balok penyebar yang terlihat pada gambar. Rantai AB adalah 2,4 m panjangnya, sedang rantai BC adalah 3,2 m panjangnya. Dengan mengabaikan berat dari susunan balok ini, hitunglah komponen-komponen semua gaya yang bekerja sejajar dan tegaklurus kepada balok tersebut bila sedang digunakan. Jawab:  $R_{Ax} = 3530$  N.



GAMBAR SOAL 4 - 15

4-16. Dua buah massa masing-masing berat 2 kg dipasang pada sebuah poros dengan perantaraan lengan kaku seperti yang terlihat dalam gambar. Dengan mengabaikan berat poros dan lengan-lengan, hitunglah gaya-gaya reaksi pada bantalan bila poros berputar dengan 600 rpm.



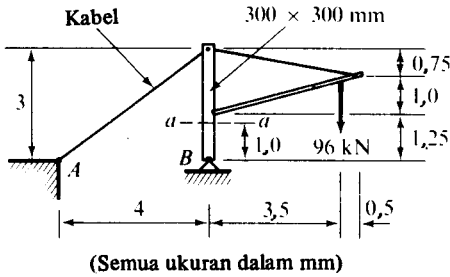
(Semua ukuran dalam mm)

GAMBAR SOAL 4 - 16

4-17. Tentukanlah momen lentur pada tumpuan B dalam Soal 4-5. Jawab: 30 kN·m.

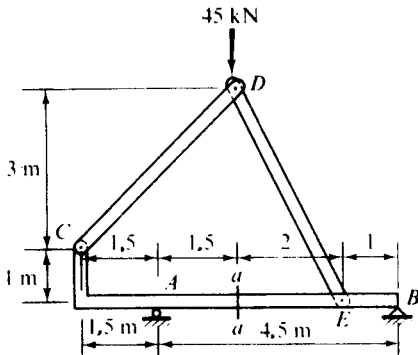
4-18. Tentukanlah gaya geser dan momen lentur pada irisan yang terdapat di tengah-tengah antara titik C dan D pada balok AB dari soal 4-9. Jawab: +300 kN, +1350 kN·m.

4-19. Hitunglah komponen-komponen gaya reaksi pada titik A dan B, dan hitunglah gaya aksial, geser dan momen lentur pada irisan a-a dari tiang kayu 300 x 300 mm.



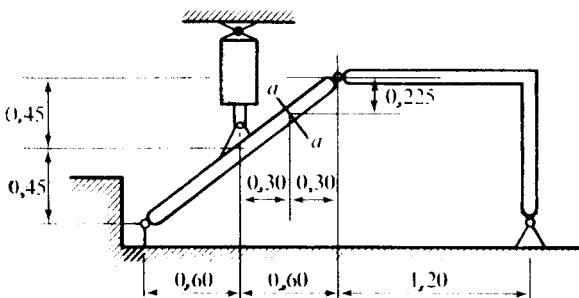
GAMBAR SOAL 4 – 19

4-20. Untuk struktur planar yang terlihat dalam gambar, tentukanlah gaya aksial, geser dan momen lentur pada irisan  $a-a$ .



GAMBAR SOAL 4 – 20

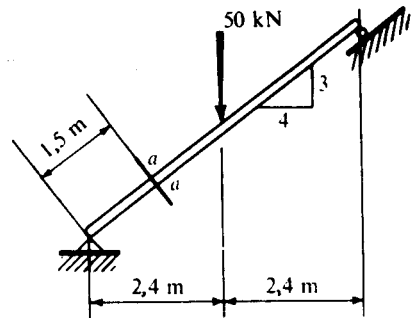
4-21. Sebuah dongkrak hidrolik menggunakan suatu gaya ke bawah sebesar 5400 N pada hubungan yang terlihat dalam gambar. Berapakah besar gaya aksial, geser dan momen lentur pada irisan  $a-a$  yang disebabkan oleh pemakaian gaya ini? Semua ukuran dalam meter.



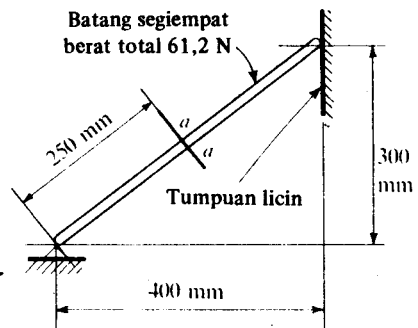
GAMBAR SOAL 4 – 21

4-22 sampai 4-33. Untuk struktur-struktur planar yang diperlihatkan dalam gambar-gambar yang berikut, tentukanlah gaya aksial, gaya geser dan momen lentur pada irisan-irisan  $a-a$ ,  $b-b$ ,  $c-c$ , dan  $d-d$  di mana besaran-besaran tersebut bekerja. Abaikanlah berat struktur tersebut. Pada setiap kasus, gambarkan diagram benda-bebas dari bagian yang diisolasi dari struktur tersebut, dan dengan jelas perlihatkanlah keadaan dari besaran-besaran yang dihitung. Beberapa irisan terlihat berdekatan antara samanya. Dalam keadaan ini, tentukanlah besaran-besaran yang ditanyakan di atas, sedikit di sebelah kiri dan sedikit di sebelah kanan dari titik dalam pertanyaan tersebut, dengan menganggap lebar dari anggota bangunan adalah kecil sekali. *Jawab:* Jawaban untuk beberapa soal diberikan sebagai berikut: gaya aksial, geser dan momen. Tanda untuk geser dan momen berlaku hanya untuk struktur horisontal.

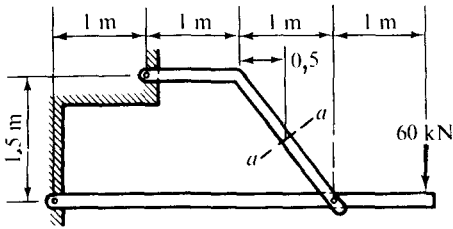
Soal. 4-22.  $-30 \text{ kN}$ ,  $+20 \text{ kN}$ ,  $+30 \text{ kN}\cdot\text{m}$ .  
Soal. 4-25.  $+10 \text{ kN}$ ,  $+5 \text{ kN}$ ,  $+2,5 \text{ kN}\cdot\text{m}$ .



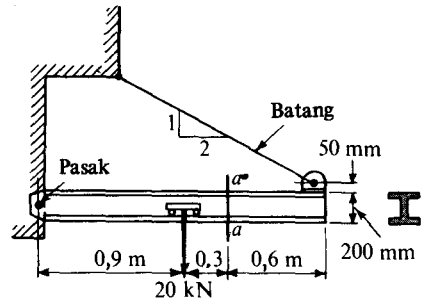
GAMBAR SOAL 4 – 22



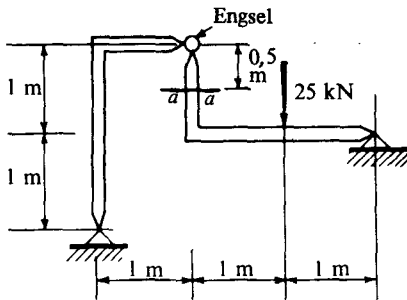
GAMBAR SOAL 4 – 23



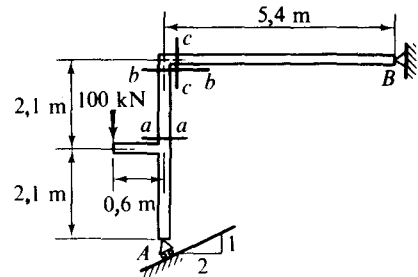
GAMBAR SOAL 4 – 24



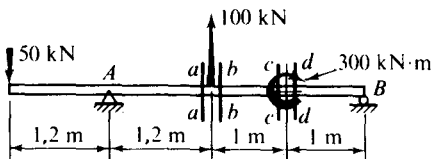
GAMBAR SOAL 4 – 28



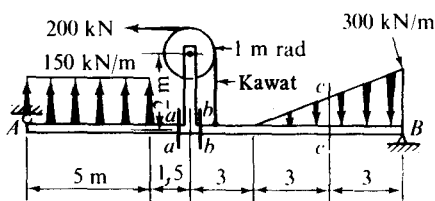
GAMBAR SOAL 4 – 25



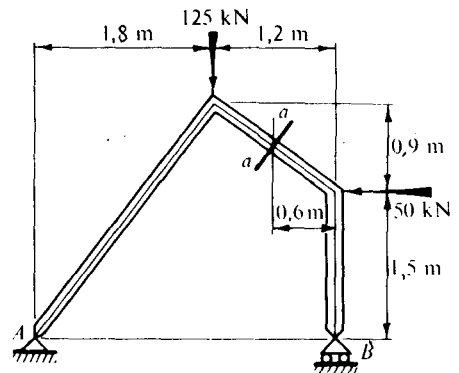
GAMBAR SOAL 4 – 29



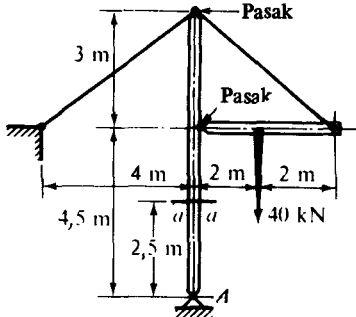
GAMBAR SOAL 4 – 26



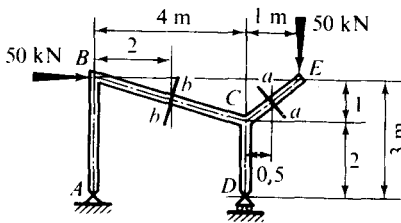
GAMBAR SOAL 4 – 27



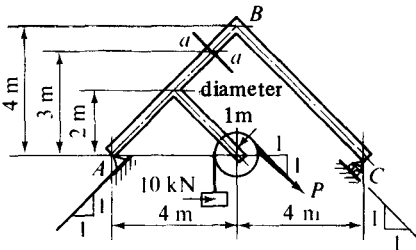
GAMBAR SOAL 4 – 30



GAMBAR SOAL 4 – 31

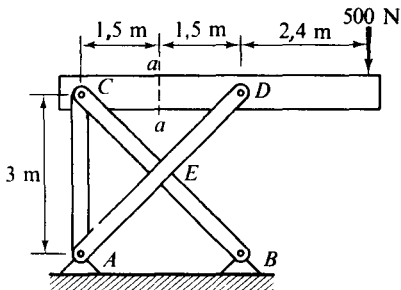


GAMBAR SOAL 4 – 32.



GAMBAR SOAL 4 – 33

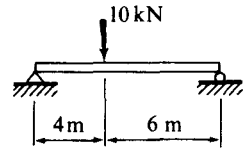
4-34. Tentukanlah gaya aksial, geser dan momen lentur pada irisan  $a-a$ . Tidak ada hu-



GAMBAR SOAL 4 – 34

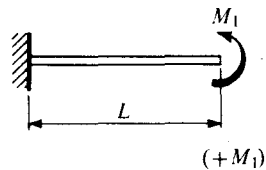
bugan antara batang-batang  $AD$  dan  $BC$  di titik  $E$ .

4-35 sampai 4-40. Buatlah plot diagram gaya geser dan momen untuk balok yang dibebani seperti yang terlihat dalam gambar. *Jawab:* momen maksimum terdapat dalam tanda kurung pada masing-masing gambar soal yang bersangkutan.

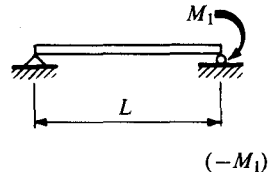


(+24)

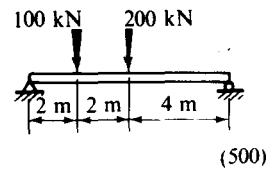
GAMBAR SOAL 4 – 35



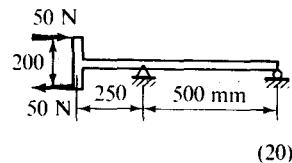
GAMBAR SOAL 4 – 36



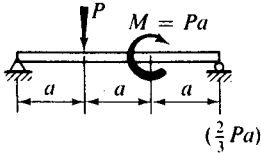
GAMBAR SOAL 4 – 37



GAMBAR SOAL 4 – 38

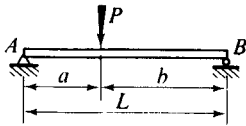


GAMBAR SOAL 4 – 39

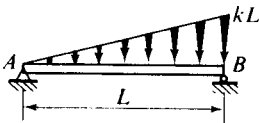


GAMBAR SOAL 4 – 40

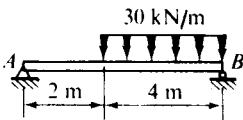
4-41 sampai 4-43. Untuk balok-balok yang dibebani seperti yang terlihat dalam gambar-gambar soal yang berikut, tuliskan pernyataan aljabar dari gaya geser dan momen lentur untuk selang  $AB$ . *Jawab:* Soal 4-42:  $M = \frac{1}{6} k (L^2 x - x^3)$ .



GAMBAR SOAL 4 – 41



GAMBAR SOAL 4 – 42

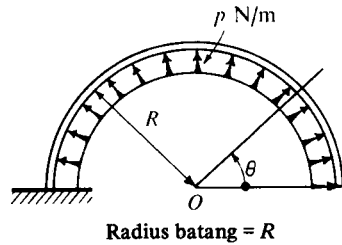


GAMBAR SOAL 4 – 43

4-44. Tuliskan persamaan aljabar umum untuk gaya aksial, geser dan momen lentur untuk balok lengkung dari Contoh 4-8. *Jawab:*  $M = Pr \sin \alpha$ .

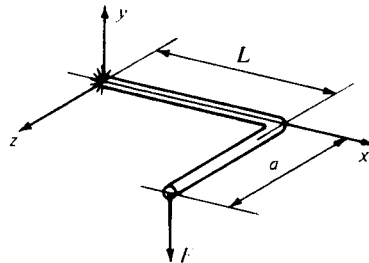
4-45. Sebuah batang berpenampang sikuempat yang dibengkokkan menjadi berbentuk setengah lingkaran, terpasang tetap pada salah satu

ujungnya sedang seluruh batang mendapat tekanan radial dalam sebesar  $p$  N per satuan panjang (lihat gambar). Tuliskan pernyataan umum untuk  $P(\theta)$ ,  $V(\theta)$  dan  $M(\theta)$  dan plot hasilnya dalam diagram kutub. Perhatikan arah positif yang diandaikan untuk  $P$ ,  $V$  dan  $M$  pada diagram benda bebas. *Jawab:*  $M = pr^2 (1 - \cos \theta)$ .



GAMBAR SOAL 4 – 45

4-46. Sebuah batang dibuat dalam bentuk sebuah siku-siku seperti terlihat dalam gambar dan terpasang tetap pada salah satu ujungnya. (a) Tuliskan pernyataan umum untuk  $V$ ,  $M$  dan  $T$  (momen puntir) yang disebabkan oleh penggunaan suatu gaya  $F$  yang tegak lurus terhadap bidang batang yang dibengkokkan tersebut. Plotlah hasilnya. (b) Bila sebagai tambahan terhadap gaya terpakai  $F$  di atas, ditinjau pula berat batang sebesar  $w$  N per satuan panjang, maka sistem komponen gaya dalam apakah yang akan terbentuk pada ujung batang yang terpasang tetap? *Jawab:* (a)  $M = -F(L - x)$ , (b)  $M = -(F + aw + \frac{1}{2}wL)L$ .



GAMBAR SOAL 4 – 46

(Catatan: Untuk soal-soal tambahan lihatlah Bab 10).

# 5 Lenturan Murni Balok

## 5-1 PENDAHULUAN

Sistem gaya yang mungkin terdapat pada suatu irisan sebuah balok telah dibahas dalam bab yang lalu. Sistem gaya ini terdiri dari gaya aksial, gaya geser dan momen lentur. Pengaruh dari salah satu gaya ini, yaitu gaya aksial, terhadap sebuah bagian struktur, telah dibahas dalam Bab-bab 1 dan 2. Dalam bab ini kita akan meninjau unsur yang lain dari sistem gaya yang mungkin muncul dalam sebuah irisan sebuah batang yaitu momen lentur dalam. Selanjutnya, karena dalam beberapa hal suatu segmen balok mungkin berada dalam keseimbangan hanya di bawah pengaruh momen saja, suatu keadaan yang disebut *lenturan murni* (pure bending atau flexure), maka kejadian ini sendiri memberikan suatu masalah yang lengkap. Hal ini merupakan tujuan dari bab ini untuk menghubungkan momen lentur dalam dengan tegangan yang dihasilkannya dalam sebuah balok. Bila sebagai tambahan kepada momen lentur dalam tersebut terdapat gaya aksial dan geser yang bekerja secara serentak maka tegangan yang rumit akan muncul. Hal ini akan dibahas dalam Bab-bab 7, 8 dan 9. Defleksi dari balok yang disebabkan oleh lenturan akan dibahas dalam Bab 11.

Sebagian besar dari bab ini akan diisi dengan metoda penentuan tegangan dalam balok yang homogen lurus yang disebabkan oleh momen lentur. Termasuk pula ke dalam bab ini pokok-pokok pembahasan mengenai balok-balok yang terbuat dari dua atau lebih jenis bahan, balok lengkung dan konsentrasi tegangan.

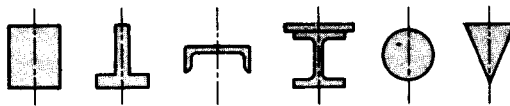
## 5-2 BEBERAPA PEMBATASAN PENTING DARI TEORI

Sama halnya seperti dalam batang beban aksial dan puntiran (torsi), maka semua gaya yang bekerja pada sebuah balok akan diandaikan berada dalam keadaan tetap (steady) dan diberikan kepada balok tanpa kejutan atau tabrakan. Masalah-masalah yang

menyangkut kejutan atau tabrakan tersebut akan ditinjau dalam Bab 15. Selanjutnya, semua balok-balok akan diandaikan berada dalam keadaan stabil di bawah pengaruh gaya-gaya terpakai. Hal yang serupa telah dibahas dalam Bab. 1 di mana ditunjukkan bahwa sebuah batang yang bertindak untuk tekan tidak boleh terlalu tipis atau sifatnya tidak akan diatur oleh kriteria kekuatan desak yang biasa. Dalam hal yang demikian *kestabilan* dari batang menjadi penting. Umpamanya, tinjaulah kemungkinan menggunakan selembar kertas pada pinggir sebagai balok. Balok seperti ini mempunyai kedalaman yang kokoh, tetapi sekalipun ia digunakan untuk menahan suatu gaya dalam bentang kecil, balok tersebut akan rebah ke samping atau runtuh. Sifat yang sama akan terjadi pula pada batang-batang kokoh yang lain yang mungkin juga runtuh terhadap suatu gaya terpakai. Balok-balok yang tak stabil itu tidak akan dibahas dalam jangkauan buku ini. Semua balok yang ditinjau di sini akan diandaikan cukup stabil secara tegak berdasarkan ukuran-ukuran balok tersebut atau tidak tergoyahkan sepenuhnya ke arah samping. Pemahaman yang lebih baik mengenai sifat-sifat penting ini akan berakhir setelah mempelajari bab mengenai kolom. Kebanyakan balok yang digunakan dalam kerangka bangunan dan bagian-bagian mesin adalah sedemikian rupa hingga teori lentur yang kita kembangkan di sini dapat berlaku. Hal ini benar-benar menguntungkan karena teori yang mengatur kestabilan batang adalah lebih kompleks.

### 5-3 PENGANDAIAN DASAR

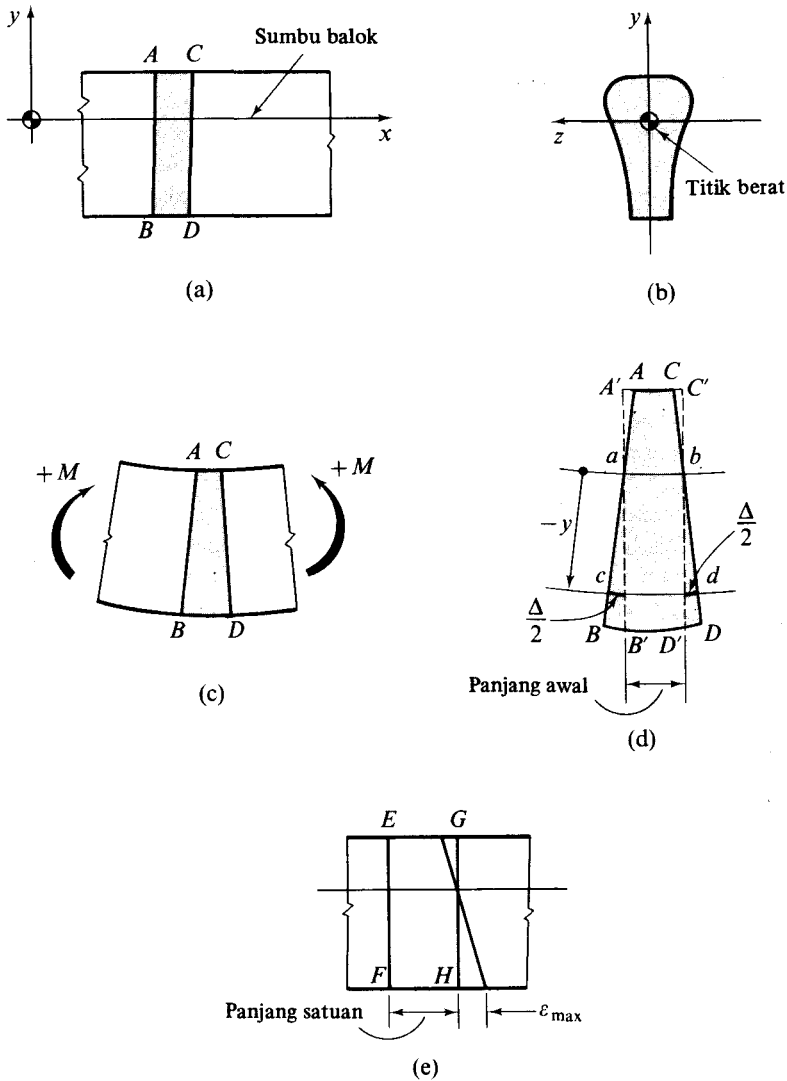
Untuk yang sekarang, kita mengandaikan bahwa hanya balok *lurus* yang mempunyai luas penampang konstan *dengan sebuah sumbu simetri* yang akan disertakan ke dalam pembahasan ini. Selanjutnya kita andaikan pula bahwa momen lentur terpakai terletak pada bidang yang mengandung sumbu simetri dan sumbu balok. Seterusnya kita setuju pula bahwa demi kesederhanaan pembuatan sketsa-sketsa, maka sumbu simetri akan diambil secara vertikal. Beberapa luas penampang balok yang memenuhi syarat-syarat tersebut di atas terlihat dalam Gambar 5-1. Perluasan dari masalah ini akan dikemukakan dalam Pasal 5-7.



Gambar 5-1 Penampang balok dengan sumbu simetri vertikal

Sebuah segmen balok yang memenuhi persyaratan di atas diperlihatkan dalam Gambar 5-2(a) dan penampangnya dalam Gambar 5-2(b). Untuk balok demikian garis yang melalui titik berat semua penampang akan diambil sebagai sumbu balok. Berikutnya, ambillah dua bidang melalui balok yang tegaklurus terhadap sumbunya. Perpotongan kedua bidang ini dengan bidang longitudinal yang melalui sumbu balok dan sumbu simetri ditunjukkan oleh garis-garis *AB* dan *CD*. Maka tidaklah sukar untuk membayangkan bahwa bila segmen ini diberikan momen lentur *M* pada ujung-ujungnya seperti yang terlihat dalam Gambar 5-2(c), maka balok tersebut akan melengkung dan bidang-bidang





Gambar 5-2 Sifat balok dalam melentur

yang tegaklurus pada sumbu balok akan menjadi miring sedikit. Selanjutnya, garis-garis  $AB$  dan  $CD$  *tetap* lurus.\* Hal ini dapat dibuktikan dengan memuaskan secara eksperimen.

\* Hal ini dapat ditunjukkan dengan menggunakan model karet dengan garis-garis kisi yang digambar padanya. Kemungkinan lain, dengan menggunakan batang vertikal tipis yang melalui blok karet. Di saat momen-momen terpakai bekerja, deformasi karet menjadi lebih kompleks. Tetapi, sesuai dengan dasar St. Venant (Pasal 2-11), hal ini hanyalah sifat-sifat lokal yang hilang dengan cepat.

mental.† Dengan memperluas pengamatan ini untuk seluruh balok, kita akan memperoleh *hipotesa yang amat mendasar\** dari teori lenturan yang berdasarkan kepada perubahan bentuk geometri. Hipotesa ini dapat dinyatakan sebagai berikut :

1. Irisan bidang melalui sebuah balok yang ditarik tegaklurus pada sumbunya, akan *tetap merupakan bidang* setelah balok tersebut dihadapkan pada lenturan.

Ini berarti bahwa pada suatu balok yang melengkung dua bidang yang tegaklurus pada sumbu balok, yang semula saling sejajar akan menjadi tidak sejajar lagi. Ditinjau dari samping, sifat kedua bidang itu sesuai dengan sifat garis-garis  $AB$  dan  $CD$  dari Gambar-gambar 5-2(a) dan (c). Suatu elemen balok yang terdapat antara kedua bidang ini terlihat dalam Gambar 5-2(d). Di bawah pengaruh kerja momen-momen dengan keadaan yang diperlihatkan dalam gambar, jarak  $AC$  menjadi lebih kecil dari  $BD$ . Lebih lanjut, disebabkan oleh momen dalam tersebut, maka suatu gaya dorong haruslah muncul pada bagian atas dari balok sedang suatu gaya tarik terdapat pada bagian bawah. Jadi elemen balok yang tidak mengalami perubahan bentuk haruslah dapat dihubungkan dengan elemen yang berubah bentuk karena pengaruh momen, seperti  $A'C'B'D'$  dengan  $ACDB$ , pada Gambar 5-2(d). Dari diagram ini kelihatan bahwa serat atau pun filamen balok sepanjang permukaan  $ab$  tidak berubah panjangnya.‡ Jadi, *serat pada permukaan  $ab$  tidaklah mengalami tegangan sama sekali* dan karena elemen tersebut di atas dipilih satu yang tertentu, maka serat yang bebas tegangan secara kontinu terdapat pada keseluruhan panjang dan lebar pada permukaan tersebut dari balok. Serat-serat ini terletak dalam suatu permukaan yang disebut *permukaan netral* dari balok. Perpotongannya dengan irisan tegaklurus melalui balok dinamakan *sumbu netral* dari balok. Nama lain yang diberikan adalah lokasi *tegangan nol* (zero stress) dari anggota konstruksi yang mengalami lenturan.

Tempat yang tepat untuk permukaan netral dari suatu balok akan diterangkan dalam pasal yang berikut. Pertama-tama kita akan melakukan pembahasan mengenai hakekat dari regangan pada serat yang sejajar dengan permukaan netral. Sekarang tinjaulah suatu serat yang khas seperti serat  $cd$  yang sejajar dengan permukaan netral dan berjarak  $y^*$  dari permukaan tersebut. Selama lenturan serat ini memuai sepanjang  $\Delta$ .

† Penyelesaian yang teliti dari Teori Elastisitas Matematis menunjukkan bahwa adanya lengkungan sedikit dari garis-garis ini. Kelengkungan demikian terjadi bila balok mendapat gaya geser sebagai tambahan terhadap momen lentur. Tetapi kelengkungan tersebut pada *irisan-irisan yang bersebelahan* mempunyai bentuk yang serupa sekali. Jadi jarak antara dua titik seperti titik-titik  $A$  dan  $C$  pada irisan yang bersebelahan praktis tetap sama meskipun yang kita tinjau adalah garis-garis  $AB$  dan  $CD$  yang melengkung atau lurus. Dan karena jarak antara irisan-irisan yang bersebelahan tersebut merupakan dasar untuk menetapkan teori lenturan elementer, maka anggapan yang selanjutnya membentuk suatu hipotesa kerja yang baik sekali untuk semua keadaan. Selain itu, suatu keputusan yang sangat penting adalah adanya gaya geser pada suatu irisan tidaklah mempengaruhi pernyataan yang diturunkan dalam bab ini. Hal ini akan dilakukan dalam tugas yang berikut.

\* Hipotesa ini dalam bentuknya yang kurang teliti, mula-mula dikemukakan oleh matematikawan Swiss, Jacob Bernoulli (1645 – 1705). Dalam bentuk lebih baik kita dapat melihat kepada tulisan-tulisan pendidik teknik Perancis, M. Navier (1785 – 1836).

† Suatu penyelesaian yang teliti memperlihatkan bahwa permukaan ini agak berbentuk silinder sedikit dalam dua arah. Pada pembahasan yang sekarang permukaan ini dianggap melengkung hanya dalam arah yang terlihat dalam gambar.

‡ Arah positif dari  $y$  diambil arah ke atas sumbu netral.

Bila pemuaian ini dibagi dengan panjang serat semula  $L$ , maka akan kita peroleh *regangan*  $\epsilon$  dari serat. Berikutnya, perhatikanlah bahwa dari pengandaian geometris yang telah dibuat terdahulu, maka perpanjangan berbagai serat yang berbeda akan berubah *secara linier* dari sumbu netral semenjak perpanjangan ini ditetapkan oleh segitiga-segitiga  $aBB'$ ,  $bDD'$ ,  $aAA'$  dan  $bCC'$ . Di pihak lain panjang awal dari semua serat adalah sama. Jika pengandaian dasar yang asli dapat dinyatakan menjadi<sup>§</sup> :

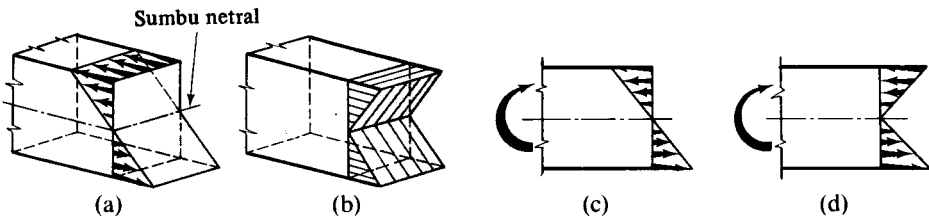
1a. Pada suatu balok yang mengalami lenturan, regangan-regangan dalam serat-seratnya akan berubah secara linier atau langsung dengan jaraknya dari permukaan netral.

Keadaan ini adalah analog dengan yang kita peroleh sebelumnya dalam masalah puntiran (torsis) di mana regangan-regangan *geser* berubah secara linier terhadap jaraknya dari sumbu suatu poros melingkar. Dalam suatu balok, regangan berubah secara linier dari *permukaan netral*. Perubahan ini diperlihatkan secara diagramatis dalam Gambar 5-2(e). Regangan *aksial* ini berhubungan dengan tegangan yang bekerja *tegaklurus* pada irisan balok. Akibat yang wajar terhadap pengandaian asal di atas berlaku untuk sifat bahan-bahan dalam daerah elastis atau tak elastis.\* Untuk tahap sekarang perluasan ini akan dibatasi dengan memperkenalkan pengandaian dasar kedua dari teori lenturan:

2. Hukum Hooke berlaku untuk masing-masing individu dari serat yaitu tegangan sebanding dengan regangan. Modulus kenyal  $E$  yang sama dianggap berlaku untuk bahan yang mengalami tarik atau tekan (kompresi). Efek Poisson dan interferensi antara serat-serat yang berdampingan dengan tegangan yang berbeda, diabaikan.

Dengan menggabungkan pengandaian-pengandaian yang terdahulu, kita memperoleh dasar untuk menetapkan teori lenturan untuk bahan elastis yaitu:

*Dalam suatu irisan suatu balok, tegangan normal yang dihasilkan oleh lenturan berubah secara linier dengan jaraknya dari sumbu netral.*



Gambar 5-3 Distribusi tegangan pada irisan sebuah balok dalam melawan momen lentur

Haruslah benar-benar mantap dalam pikiran para pembaca bahwa tegangan-tegangan tersebut bekerja tegaklurus terhadap irisan balok. Tegangan-tegangan ini adalah hasil perpanjangan atau penyusutan *aksial* dari berbagai serat dalam balok. Sekali lagi kita ulangi, bahwa perubahan linier dari tegangan tersebut merupakan akibat dari perubahan linier dalam regangan dan kesebandingan tegangan terhadap regangan. Jarak terhadap

§ Secara eksperimental, pengandaian ini lebih mudah diturunkan dibandingkan dengan pengandaian (1).

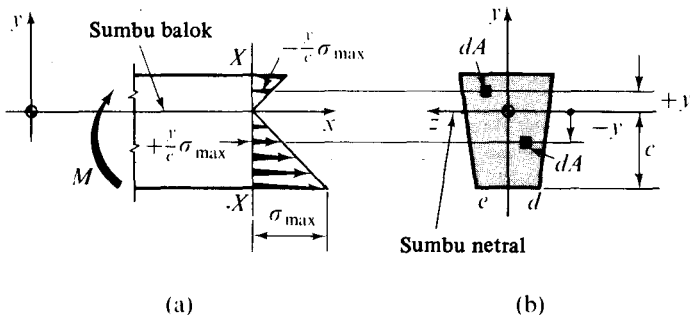
\* Balok yang mendapat tegangan di luar batas elastis akan dibahas dalam Pasal 5-8.

berbagai serat dari balok diukur secara *vertikal* dari sumbu netral. Gambar-gambar 5-3(a) dan (b) menggambarkan hakekat dari distribusi tegangan dalam suatu balok yang melawan momen lentur. Ada dua skema alternatif untuk menyatakan masalah tiga dimensi yang ada pada bidang yang terlihat dalam Gambar-gambar 5-3(c) dan (d). Dalam tugas-tugas yang berikut ini merupakan bentuk yang biasa untuk memperlihatkan distribusi tegangan lenturan pada irisan balok.

#### 5-4 RUMUS LENTURAN (FLEXURE FORMULA)

Setelah kita memahami hakekat distribusi tegangan dalam daerah elastik pada suatu irisan balok, maka selanjutnya kita akan menyusun pernyataan kuantitatif mengenai hubungan antara momen lentur dengan tegangan. Untuk tujuan ini, pertama-tama ditentukan letak permukaan netral dengan meninjau keseimbangan statika.

Tinjaulah suatu segmen balok yang dihadapkan kepada suatu momen lentur positif  $M$  seperti yang terlihat dalam Gambar 5-4(a). Pada irisan  $X-X$  momen terpakai ini mendapat perlawanan dari tegangan yang berubah secara linier terhadap sumbu netral. Tegangan yang tertinggi akan terjadi pada titik-titik yang paling jauh dari sumbu netral. Ini terjadi sepanjang garis  $ed$  dari balok yang diperlihatkan dalam Gambar 5-4(b). Tegangan ini adalah tegangan normal dan dinyatakan oleh  $\sigma_{\max}$  pada Gambar 5-4(a). Tegangan normal yang lain yang bekerja pada daerah penampang dihubungkan dengan tegangan di atas oleh suatu perbandingan jaraknya dari sumbu netral. Jadi pada suatu luas kecil takberhingga  $dA$ , dalam Gambar 5-4(b), dan pada jarak  $y$  dari sumbu netral, tegangan tersebut adalah  $-(y/c)\sigma_{\max}$ , di mana  $c$  adalah jarak yang diukur dari sumbu netral ke serat yang terjauh dari balok. Tegangan-tegangan yang berada di bawah permukaan netral ditentukan menurut hubungan yang sama; tanda dari tegangan tersebut secara otomatis berlawanan dengan tanda  $y$  yang diukur ke bawah dari sumbu netral. Tanda yang berlawanan ini sesuai dengan tegangan yang berlawanan antara gaya tekan dengan tarik. Perhatikanlah bahwa untuk momen lentur yang positif, tegangan normal pada sebuah irisan adalah positif (tarik) untuk harga  $y$  yang negatif, dan adalah negatif (tekan) untuk harga  $y$  yang positif. Jadi ungkapan  $-(y/c)\sigma_{\max}$  adalah ungkapan umum untuk tegangan normal pada *setiap* daerah kecil takberhingga dari irisan balok pada jarak  $y$  dari sumbu netral.



Gambar 5-4 Suatu balok dengan lenturan murni

Karena segmen balok yang terlihat dalam Gambar 5-4(a) haruslah berada dalam keseimbangan, maka jumlah semua gaya dalam arah  $x$  yang diambil secara horisontal, haruslah nol, yaitu  $\Sigma F_x = 0$ . Oleh karena itu sejak segmen balok tersebut hanya melawan sebuah kopel, maka jumlah (atau integral) semua gaya yang bekerja pada *irisan* balok tersebut haruslah nol. Jadi

$$\int_A \underbrace{\left(-\frac{y}{c} \sigma_{\max}\right)}_{\substack{\text{(tegangan)} \\ \text{(gaya)}}} \underbrace{dA}_{\text{(luas)}} = 0$$

di mana tanda huruf  $A$  integral menunjukkan bahwa penjumlahan tersebut haruslah dilakukan pada seluruh daerah penampang dari balok. Tetapi pada irisan harga  $\sigma_{\max}$  dan  $c$  adalah konstan, jadi integral dapat ditulis kembali sebagai :

$$-\frac{\sigma_{\max}}{c} \int_A y dA = 0$$

Berhubung karena pada balok yang mendapat tegangan  $c$  maupun  $\sigma_{\max}$  tidak mungkin nol, maka  $\int_A y dA = 0$ . Jadi oleh definisi  $\int_A y dA = \bar{y}A$ , di mana  $\bar{y}$  adalah jarak dari suatu garis alas (dalam hal ini sumbu netral) kepada titik berat luas  $A$ , maka  $\bar{y}A = 0$ . Karena  $A$  tidaklah nol, maka  $\bar{y}$  haruslah menjadi nol. Karena itu jarak dari sumbu netral kepada titik berat haruslah nol, dan *sumbu netral haruslah melalui titik berat daerah irisan penampang balok*. Jadi sumbu netral dengan cepat dan mudah dapat ditentukan untuk setiap balok, yaitu dengan mencari titik berat daerah irisan penampang balok tersebut.

Berikut ini, tinggal lagi satu persamaan keseimbangan statis penting yang akan digunakan pada segmen balok seperti tergambar dalam Gambar 5-4(a) untuk mengevaluasi besaran-besaran tegangan normal. Persamaan ini adalah  $\Sigma M_z = 0$  di mana untuk tujuan yang sekarang adalah lebih baik dinyatakan sebagai: *Momen luar  $M$  mendapat perlawanan dan adalah sama dengan momen lentur dalam yang dibentuk oleh tegangan lentur pada suatu irisan*. Besaran terakhir ini ditentukan dengan menjumlahkan gaya-gaya yang bekerja pada daerah kecil takberhingga  $dA$ , dalam Gambar 5-4(b), dikalikan dengan lengan yang bersangkutan terhadap sumbu netral. Dengan merumuskan pernyataan-pernyataan ini secara matematis, maka kita peroleh kesamaan berikut:

$$M = \int_A \underbrace{\left(-\frac{y}{c} \sigma_{\max}\right)}_{\substack{\text{(tegangan)} \\ \text{(gaya)}}} \underbrace{dA}_{\text{(luas)}} \quad y = -\frac{\sigma_{\max}}{c} \int_A y^2 dA$$

(momen)
(lengan)

di mana (seperti sebelumnya)  $\sigma_{\max}/c$  adalah konstan, jadi dapat muncul di luar tanda integral. Integrasi ini haruslah dilakukan pada seluruh daerah irisan penampang balok.

Integral  $\int_A y^2 dA$  hanya tergantung kepada sifat geometris daerah irisan penampang. Dalam mekanika bahan integral ini disebut sebagai *momen inersia* dari daerah irisan penampang terhadap sumbu titik berat, bila  $y$  diukur dari sumbu tersebut. Momen inersia ini adalah suatu tetapan untuk suatu luas tertentu, dan dalam buku ini akan dilambangkan dengan  $I$ . Dengan penggunaan notasi ini maka ungkapan yang terdahulu dapat ditulis dengan rapi sebagai

$$M = -\frac{\sigma_{\max} I}{c} \quad \text{atau} \quad \sigma_{\max} = -\frac{Mc}{I}$$

Adalah biasa untuk membuang tanda tegangan normal tersebut karena sikap tegangan ini dapat diperoleh lewat pemeriksaan. Pada setiap irisan tegangan normal haruslah bertindak dengan cara seperti membangun sebuah kopel secara statis setara dengan perlawanan terhadap momen lentur, dan sikap yang telah diketahui. Jadi persamaan di atas dapat ditulis dengan mudah sebagai

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I} \quad (5-1)$$

Persamaan 5-1 adalah *rumus lenturan\** dari balok. Rumus ini memberikan tegangan normal *maksimum* dalam balok yang mendapatkan suatu momen lentur  $M$ . Selanjutnya karena tegangan  $\sigma$  pada setiap titik pada penampang adalah  $-(y/c)\sigma_{\max}$ , maka ungkapan umum untuk tegangan normal pada irisan diberikan sebagai

$$\sigma = -\frac{My}{I} \quad (5-1a)$$

Rumus-rumus ini luar biasa pentingnya dalam mekanika bahan. Dalam rumus ini,  $M$  adalah momen lentur dalam atau perlawanan, yang sama besarnya dengan momen luar pada irisan di mana tegangan itu terdapat. Pada rumus ini momen lentur dinyatakan dalam satuan *newton-meter (N·m)*. Jarak  $y$  antara sumbu netral dengan titik pada irisan di mana terdapat tegangan normal  $\sigma$  yang tegak lurus diukur terhadap sumbu netral, haruslah dinyatakan dalam meter. Bila  $y$  mencapai harga maksimumnya, maka ia sesuai dengan  $c$  dan bila harga  $y$  ini mendekati nilai maksimum, maka tegangan normal  $\sigma$  mendekati  $\sigma_{\max}$ . Dalam persamaan ini  $I$  adalah momen inersia dari *seluruh* daerah irisan penampang balok *terhadap sumbu netral*. Untuk menghindari keraguan dengan momen inersia *kutub*, maka  $I$  kadang-kadang disebut juga sebagai momen inersia *sikuempat*. Dimensinya adalah  $m^4$ . Penelaahan momen inersia untuk berbagai luas akan dibahas dalam pasal yang berikut. Penggunaan satuan-satuan yang konsisten seperti yang telah

\* Hampir dua abad usaha diperlukan untuk mengembangkan ungkapan yang sederhana ini. Usaha pertama dalam menyelesaikan persoalan lenturan dilakukan oleh Galileo pada abad ketujuhbelas. Tetapi penyelesaian soal tersebut dalam bentuk yang kita gunakan sekarang telah dilakukan semenjak bagian pertama abad kesembilanbelas. Umumnya, Navier dari Perancis mempunyai saham dalam usaha menemukan penyelesaian ini. Tetapi, beberapa orang memberikan penghargaan kepada Coulomb, yang juga menurunkan rumus-rumus puntiran.

ditunjukkan di atas, memberikan satuan tegangan  $\sigma$  menjadi  $[N \cdot m] [m] / [m^4] = N/m^2 = Pa$ .

Para pelajar diminta untuk menggambarkan kembali arti dari syarat-syarat yang digunakan untuk mendapatkan persamaan-persamaan di atas. Tegangan yang diberikan oleh persamaan-persamaan ini menunjukkan bahwa tegangan tersebut bekerja tegaklurus pada irisan dan berubah secara linier terhadap sumbu netral. Kenyataan-kenyataan ini adalah sangat penting. Demikian pula tiga dimensional dari persoalan haruslah selalu diingat.

Pembahasan yang lalu hanya berlaku untuk keadaan di mana bahan bersifat *elastis*. Konsep penting dalam mendapatkan rumus-rumus lenturan dapat diringkaskan sebagai berikut :

1. *Deformasi* dianggap memberikan regangan yang berubah secara linier terhadap sumbu netral.
2. *Sifat-sifat bahan* digunakan untuk menghubungkan regangan dan tegangan.
3. Syarat-syarat *keseimbangan* digunakan untuk menentukan letak sumbu netral dan tegangan-tegangan dalam (interval stresses).

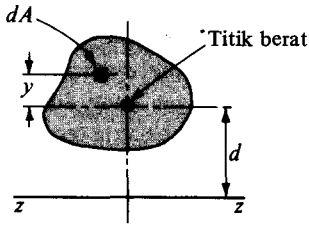
Konsep-konsep ini adalah sama dengan konsep yang digunakan untuk mendapatkan rumus-rumus puntiran.

## 5-5 PENGHITUNGAN MOMEN INERSIA

Dalam menggunakan rumus-rumus lenturan, maka momen inersia  $I$  dari daerah irisan penampang terhadap sumbu netral harus ditentukan dahulu. Harga momen inersia ditentukan dengan integrasi  $y^2 dA$  terhadap seluruh luas irisan penampang batang dan harus ditekankan bahwa momen inersia untuk rumus lenturan ini haruslah dihitung terhadap sumbu netral daerah irisan penampang. Sumbu ini, menurut Pasal 5-4, haruslah melalui titik berat daerah irisan penampang. Untuk irisan-irisan yang simetris maka sumbu netral tersebut tegaklurus pada sumbu simetri. Sumbu seperti itu merupakan salah satu *sumbu-sumbu utama*\* (principal axes) dari daerah irisan penampang. Kebanyakan pembaca harus sudah mengenal metoda penentuan momen inersia  $I$  tersebut. Tetapi meskipun demikian prosedur penting dari metoda ini akan ditinjau kembali di bawah ini.

Langkah pertama untuk mengevaluasi momen inersia  $I$  untuk suatu daerah adalah mendapatkan titik berat dari daerah tersebut. Kemudian suatu integrasi  $y^2 dA$  dapat dilakukan terhadap sumbu horisontal yang melalui titik berat dari luas daerah tersebut. Integrasi yang sesungguhnya terhadap daerah luas hanya diperlukan untuk beberapa bentuk dasar seperti empatpersegi panjang, segitiga dan seterusnya. Setelah hal ini dilakukan maka kebanyakan luas irisan penampang yang dipergunakan dalam praktek

\* Sumbu-sumbu utama per definisi adalah sumbu di mana momen lembam sikuempat adalah maksimum atau minimum. Sumbu-sumbu ini selalu saling tegaklurus antara sesamanya. Hasil momen inersia yang didefinisikan oleh  $\int yz dA$  akan menjadi nol untuk sumbu-sumbu utama ini. Sumbu simetri dari suatu daerah irisan penampang selalu sebuah sumbu utama. Untuk perincian selanjutnya harap di lihat lampiran pada Bab 8.



**Gambar 5-5** Daerah yang diarsir dipergunakan untuk mendapatkan teorema sumbu sejajar

dapat dapat dipecah-pecah menjadi gabungan bentuk-bentuk sederhana di atas. Harga momen-momen inersia untuk beberapa bentuk sederhana bisa ditemukan pada setiap handbook teknik sipil dan mesin (lihat pula Tabel 2 dari Lampiran). Untuk mendapatkan momen inersia  $I$  untuk suatu luas yang terdiri dari beberapa bentuk sederhana, maka diperlukan *teorema sumbu sejajar* (kadang-kadang disebut *rumus perpindahan*). Teorema tersebut dikembangkan sebagai berikut.

Daerah yang diperlihatkan dalam Gambar 5-5 mempunyai momen inersia  $I_0$  terhadap sumbu horisontal yang melalui titik beratnya yaitu:  $I_0 = \int y^2 dA$ , di mana  $y$  diukur dari sumbu titik berat. Momen inersia  $I_{zz}$  dari daerah yang sama terhadap sumbu horisontal  $z$ - $z$  yang lain dedefinisikan sebagai

$$I_{zz} = \int_A (d + y)^2 dA$$

di mana seperti sebelumnya  $y$  diukur dari sumbu yang melalui titik berat. Dengan mengkuadratkan besaran-besaran di dalam tanda kurung dan menempatkan konstanta-konstanta ke luar tanda integral maka

$$I_{zz} = d^2 \int_A dA + 2d \int_A y dA + \int_A y^2 dA = Ad^2 + 2d \int_A y dA + I_0$$

Akan tetapi, karena sumbu dari mana  $y$  diukur adalah melalui titik berat dari daerah luas, maka  $\int y dA$  atau  $\bar{y}A$  adalah nol. Jadi

$$I_{zz} = I_0 + Ad^2 \quad (5-2)$$

Persamaan ini merupakan teorema sumbu sejajar. Teorema ini dapat dinyatakan sebagai berikut: Momen inersia suatu luas terhadap suatu sumbu adalah sama dengan momen inersia dari luas yang sama terhadap sumbu yang sejajar yang melalui titik berat luas tersebut, ditambah dengan hasil kali dari luas yang sama dengan kuadrat jarak antara kedua sumbu.\*

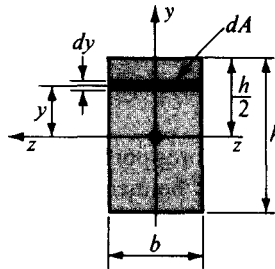
\* Suatu teorema yang sama dapat pula dibuktikan untuk perkalian (untuk definisi inersia lihatlah lampiran Bab 8).  $I_{yz} = I_{y_c z_c} + Ad_1 d_2$  di mana  $I_{y_c z_c}$  adalah inersia suatu luas  $A$  terhadap sumbu titik berat  $y_c$ ,  $z_c$  dan  $I_{yz}$  adalah perkalian dari luas yang sama terhadap skumpulan sumbu sejajar  $y$ ,  $z$ . Jarak antara  $y$  dan  $y_c$  adalah  $d_1$  dan antara  $z$  dan  $z_c$  adalah  $d_2$ . Selanjutnya hubungan ini berkenaan dengan Persamaan 5-2a.



Contoh-contoh yang berikut menggambarkan metoda untuk menghitung  $I$  langsung dengan mengintegrasikan dua macam luas sederhana. Kemudian akan diberikan suatu penggunaan teorema sumbu sejajar untuk suatu luas gabungan. Harga dari  $I$  untuk balok-balok baja, baja siku dan pipa baja yang dibuat secara komersial diberikan dalam Tabel 3 sampai 8 dari Lampiran.

#### CONTOH 5-1

Hitunglah momen inersia terhadap sumbu horisontal yang melalui titik berat luas siku-empat yang terlihat dalam Gambar 5-6.



Gambar 5-6

#### PENYELESAIAN

Titik berat irisan ini terletak pada perpotongan kedua sumbu simetri dari luas siku-empat. Karena itu lebih baik menulis  $dA$  dengan  $b dy$ . Jadi

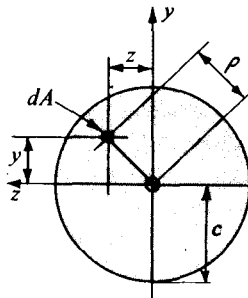
$$I_{zz} = I_o = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 b dy = b \left| \frac{y^3}{3} \right|_{-h/2}^{+h/2} = \frac{bh^3}{12}. \quad (5-3)$$

Dengan cara yang sama diperoleh  $I_{yy} = \frac{b^3 h}{12}$

Ungkapan-ungkapan ini sangat sering dipakai, karena balok-balok sikuempat sangat banyak digunakan dalam praktek.

#### CONTOH 5-2

Hitunglah momen inersia terhadap suatu diameter dari suatu luas lingkaran dengan jari-jari  $c$ , seperti yang terlihat dalam Gambar 5-7.



Gambar 5-7

**PENYELESAIAN**

Karena adanya kemungkinan terjadi keraguan antara  $I$  dan  $I_p$  untuk suatu irisan lingkaran, maka ada baiknya untuk menyebut  $I$  sebagai momen inersia sikuempat dari luas semacam ini.

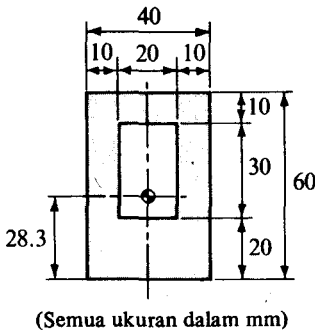
Untuk mendapatkan  $I$  untuk suatu lingkaran, pertama-tama perhatikanlah bahwa  $\rho^2 = z^2 + y^2$ , seperti yang dapat dilihat dalam gambar. Dengan menggunakan definisi  $J$ , dengan memperhatikan simetri terhadap kedua sumbu dan menggunakan Persamaan 3-2 maka

$$\begin{aligned} I_p &= \int_A \rho^2 dA = \int_A (y^2 + z^2) dA = \int_A y^2 dA + \int_A z^2 dA \\ &= I_{zz} + I_{yy} = 2I_{xx} \\ I_{xx} &= I_{yy} = \frac{J}{2} = \frac{\pi c^4}{4} \end{aligned} \quad (5-4)$$

Dalam penggunaan-penggunaan mekanis poros-poros melingkar banyak dipakai sebagai balok, jadi Persamaan 5-4 akan banyak bermanfaat. Untuk poros berbentuk tabung, momen inersia dari rongga dalam harus dikurangi dari momen inersia poros melingkar di atas.

**CONTOH 5-3**

Tentukanlah momen inersia  $I$  terhadap sumbu horisontal untuk luas yang terlihat dalam Gambar 5-8 yang digunakan dalam rumus lenturan.



Gambar 5-8

**PENYELESAIAN**

Karena momen inersia diinginkan untuk digunakan dalam rumus lenturan, maka momen inersia ini haruslah dihadapkan pada sumbu yang melalui titik berat daerah luas. Jadi yang mula-mula harus ditentukan adalah titik berat daerah luas. Hal ini dapat dilakukan dengan sangat mudah dengan menghitung keseluruhan irisan bagian luar dan kemudian dengan mengurangkannya dengan rongga di dalam. Untuk baiknya, pekerjaan ini dilakukan dalam bentuk tabung. Kemudian teorema sumbu sejajar digunakan untuk memperoleh momen inersia  $I$ .

| Luas                           | $A \text{ [mm}^2\text{]}$ | $y \text{ [mm]}$<br>(dari bawah)   | $Ay$    |
|--------------------------------|---------------------------|------------------------------------|---------|
| Luas keseluruhan               | $40(60) = 2400$           | 30                                 | 72 000  |
| Rongga dalam                   | $-20(30) = -600$          | 35                                 | -21 000 |
| $\Sigma A = 1800 \text{ mm}^2$ |                           | $\Sigma Ay = 51\,000 \text{ mm}^3$ |         |

$$\bar{y} = \frac{\Sigma Ay}{\Sigma A} = \frac{51\,000}{1800} = 28,3 \text{ mm dari dasar}$$

Untuk luas keseluruhan:  $I_o = \frac{bh^3}{12} = \frac{40(60)^3}{12} = 72 \times 10^4 \text{ mm}^4$

$$Ad^2 = 2400(30 - 28,3)^2 = \frac{0,69 \times 10^4 \text{ mm}^4}{I_{zz} = 72,69 \times 10^4 \text{ mm}^4}$$

Untuk rongga dalam:  $I_o = \frac{bh^3}{12} = \frac{20(30)^3}{12} = 4,50 \times 10^4 \text{ mm}^4$

$$Ad^2 = 600(35 - 28,3)^2 = \frac{2,69 \times 10^4 \text{ mm}^4}{I_{zz} = 7,19 \times 10^4 \text{ mm}^4}$$

Jadi untuk irisan gabungan:  $I_{zz} = (72,69 - 7,19)10^4 = 65,50 \times 10^4 \text{ mm}^4$ .

Terutama perhatikanlah bahwa dalam menggunakan teorema sumbu sejajar, masing-masing elemen dari daerah gabungan memberikan dua faktor kepada harga total  $I$ . Satu faktor adalah momen inersia luas terhadap sumbu titik beratnya, dan yang lain adalah faktor yang disebabkan oleh pemindahan sumbunya kepada titik berat dari seluruh luas. Pekerjaan metoda ini diperlukan sekali dalam menyelesaikan soal-soal seperti ini dengan tepat.

## 5-6 CATATAN TENTANG RUMUS LENTURAN

Tegangan lentur pada setiap titik sebuah irisan balok diberikan oleh Persamaan 5-1a,  $\sigma = -My/I$ . Tegangan paling besar untuk irisan yang sama dapat diperoleh dari hubungan di atas dengan mengambil harga  $|y|$  maksimum, hingga mendapatkan Persamaan 5-1 yaitu  $\sigma_{\max} = Mc/I$ . Pada soal-soal yang sangat praktis maka tegangan maksimum yang diberikan oleh Persamaan 5-1 adalah besaran yang dicari; jadi ini diperlukan sekali untuk membuat pengolahan penentuan harga  $\sigma_{\max}$  menjadi sesederhana mungkin. Hal ini dapat dilaksanakan dengan memperhatikan bahwa kedua besaran  $I$  dan  $c$  adalah konstan untuk irisan balok yang diketahui. Dengan demikian  $I/c$  adalah suatu tetapan. Lebih-lebih lagi, karena perbandingan  $I/c$  ini hanya merupakan fungsi dari ukuran-ukuran irisan penampang balok, maka perbandingan tersebut secara khusus ditentukan oleh luas irisan penampang. Perbandingan ini disebut *modulus irisan elastis* (elastic section

modulus) dari suatu irisan dan dilambangkan dengan  $S$ . Dengan notasi ini maka Persamaan 5-1 menjadi

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{\frac{I}{c}} = \frac{M}{S} \quad (5-5)$$

atau dinyatakan secara lain

$$\text{tegangan lentur maksimum} = \frac{\text{momen lentur}}{\text{modulus irisan elastis}}$$

Bila momen inersia  $I$  diukur dalam  $\text{m}^4$  dan  $c$  dalam  $\text{m}$ , maka  $S$  diukur dalam  $\text{m}^3$ . Demikian juga bila  $M$  diukur dalam newton-meter, maka satuan dari tegangan seperti sebelumnya, menjadi newton per meter kuadrat ( $\text{N/m}^2$ ). Diulangi pula bahwa jarak  $c$  yang digunakan di sini diukur dari sumbu netral ke serat yang terjauh dari balok. Ini membuat  $I/c = S$  menjadi suatu minimum dan akibatnya  $M/S$  memberikan harga tegangan yang maksimum. Irisan-irisan yang efisien untuk melawan lenturan haruslah mempunyai  $S$  yang sebesar mungkin untuk bahan yang diberikan. Hal ini dapat diperoleh dengan meletakkan sebanyak mungkin bahan yang jauh dari sumbu netral.

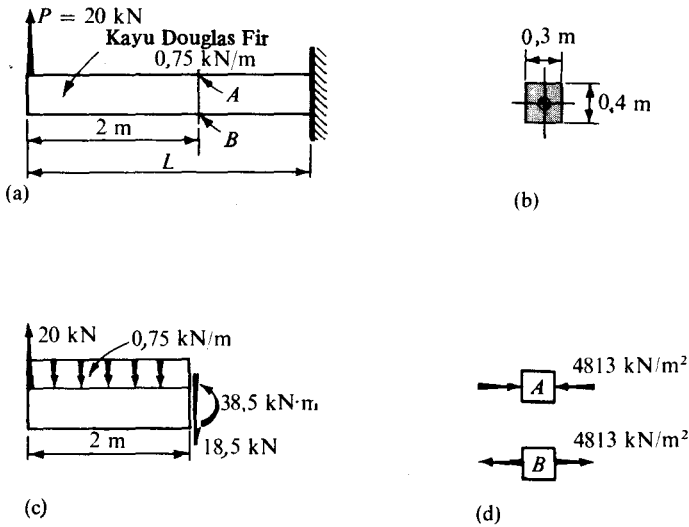
Penggunaan istilah *modulus irisan elastis* dalam Persamaan 5-5 agak sesuai dengan penggunaan istilah luas  $A$  dalam Persamaan 1-1 ( $\sigma = P/A$ ). Tetapi dari Persamaan 5-5 hanya tegangan lentur maksimum pada sebuah irisan yang diperoleh, sedang tegangan yang dihitung dari Persamaan 1-1 berlaku untuk seluruh irisan dari bangunan.

Persamaan 5-5 sangat luas dipergunakan dalam praktek karena kesederhanaannya. Untuk memudahkan penggunaannya, modulus irisan untuk irisan penampang yang dihasilkan pabrik dibuatkan tabel dalam handbook. Harga-harga untuk beberapa baja diberikan dalam Tabel 3 sampai 8 dalam Lampiran. Persamaan 5-5 secara khusus adalah baik untuk disain balok. Sekali momen lentur maksimum untuk sebuah balok dapat ditentukan, dan tegangan ijin telah ditetapkan pula maka Persamaan 5-5 dapat diselesaikan untuk modulus irisan yang dibutuhkan. Keterangan ini cukup untuk memilih sebuah balok. Tetapi peninjauan yang terperinci mengenai disain balok akan ditunda sampai Bab 10. Hal ini perlu karena gaya geser yang pada gilirannya mengakibatkan tegangan, biasanya juga bekerja pada irisan sebuah balok. Pengaruh timbal-balik antara berbagai macam tegangan haruslah ditinjau, pertama-tama untuk mendapatkan pengertian yang lengkap terhadap masalah.

Penggunaan rumus-rumus lenturan untuk soal-soal yang khusus seharusnya tidak menemui banyak kesukaran bila makna dari berbagai hubungan yang terjadi dengan sepenuhnya dapat dipahami. Dua contoh yang berikut akan menggambarkan penyelidikan tegangan lenturan pada irisan-irisan yang khusus.

#### CONTOH 5-4

Sebuah balok kantilever kayu dengan ukuran  $0,3 \text{ m} \times 0,4 \text{ m}$  mempunyai berat  $76 \text{ kg/m}$  memuat gaya terpusat ke atas sebesar  $20 \text{ kN}$  pada ujungnya, seperti yang terlihat dalam Gambar 5-9(a). Tentukanlah tegangan lentur maksimum pada sebuah irisan  $2 \text{ m}$  dari ujung bebas.



Gambar 5-9

#### PENYELESAIAN

Suatu diagram benda bebas untuk sebuah segmen balok 2 m diperlihatkan dalam Gambar 5-9(c). Untuk menjaga segmen ini dalam keseimbangan dibutuhkan suatu geseran sebesar  $20 - 0,75(2) = 18,5$  kN dan momen lentur dari  $20(2) - 0,75(2)1 = 38,5$  kN·m pada irisan potongan. Kedua besaran ini diperlihatkan dengan sikap yang digambarkan oleh Gambar 5-9(c). Dengan pemeriksaan yang dilakukan kepada daerah irisan penampang balok memperlihatkan, bahwa jarak dari sumbu netral ke serat yang terjauh adalah 0,2 m, karena itu  $c = 0,2$  m. Ini berlaku untuk kedua macam, serat tarik dan serat tekan.

$$\text{Dari Persamaan 5-3: } I_{zz} = \frac{bh^3}{12} = \frac{(0,3)(0,4)^3}{12} = 16 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$\text{Dari Persamaan 5-1: } \sigma_{\max} = \frac{Mc}{I} = \frac{(38,5)(0,2)}{16 \times 10^{-4}} = \pm 4813 \text{ kN/m}^2$$

Dari sikap momen lentur yang diperlihatkan dalam Gambar 5-9(c) maka serat-serat sebelah atas balok terlihat dalam keadaan tekan, sedang yang bawah dalam keadaan tarik. Pada jawaban yang diberikan, tanda positif dipakai untuk tegangan tarik, sedang tanda negatif untuk tegangan tekan. Kedua tegangan ini berkurang secara linier ke arah sumbu netral di mana tegangan lentur menjadi nol. Tegangan normal yang bekerja pada elemen-elemen kecil takberhingga pada A dan B dapat dilihat dalam Gambar 5-9(d). Adalah sangat penting untuk belajar membuat pernyataan suatu elemen seperti ini karena akan sering digunakan dalam Bab-bab 7, 8 dan 9.

#### PENYELESAIAN YANG LAIN

Bila yang dikehendaki hanyalah tegangan maksimum saja, maka persamaan yang me-

nyangkut modulus irisan dapat pula digunakan. Modulus irisan untuk irisan sikuempat dalam bentuk aljabar adalah:

$$S = \frac{J}{c} = \frac{bh^3}{12} \cdot \frac{2}{h} = \frac{bh^2}{6} \quad (5-6)$$

Pada soal ini,  $S = (0,3)(0,4)^2/6 = 8 \times 10^{-3} \text{ m}^3$  dan dengan menggunakan Persamaan 5-5 maka

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{S} = \frac{38,5}{8 \times 10^{-3}} = 4813 \text{ kN/m}^2 \text{ atau kPa.}$$

Kedua macam penyelesaian di atas memberikan hasil yang sama.

### CONTOH 5-5

Tentukanlah tegangan-tegangan tarik dan tekan maksimum yang bertindak tegaklurus pada irisan A-A dari braket mesin dalam Gambar 5-10(a) yang disebabkan oleh gaya terpakai sebesar 35 kN.

### PENYELESAIAN

Gaya geser dan momen lentur dengan besar dan sikap yang sesuai untuk menjaga segmen bangunan tersebut berada dalam keseimbangan diperlihatkan dalam Gambar 5-10(c). Selanjutnya sumbu netral balok harus kita tempatkan. Ini sudah dilakukan dengan menempatkan titik berat luas daerah yang diperlihatkan dalam Gambar 5-10(b) (Lihat juga Gambar 5-10(d)). Kemudian momen inersia terhadap sumbu netral dihitung. Dalam kedua perhitungan ini, kaki-kaki irisan penampang dianggap sikuempat, dengan mengabaikan lengkungan-lengkungan sudut yang terdapat. Kemudian dengan memperhatikan sikap dari momen lentur perlawanan dan menggunakan Persamaan 5-1, kita memperoleh harga-harga yang diinginkan.

| Nomor daerah                   | A [mm <sup>2</sup> ] | y [mm]<br>(dari ab)                          | Ay<br>[× 10 <sup>3</sup> mm <sup>3</sup> ] |
|--------------------------------|----------------------|--|--|
| 1                              | 2500                 | 12,5   | 31,3                                       |
| 2                              | 1875                 | 62,5   | 117  |
| 3                              | 1875                 | 62,5   | 117  |
| $\Sigma A = 6250 \text{ mm}^2$ |                      | $\Sigma Ay = 265,3 \times 10^3 \text{ mm}^3$ |  |

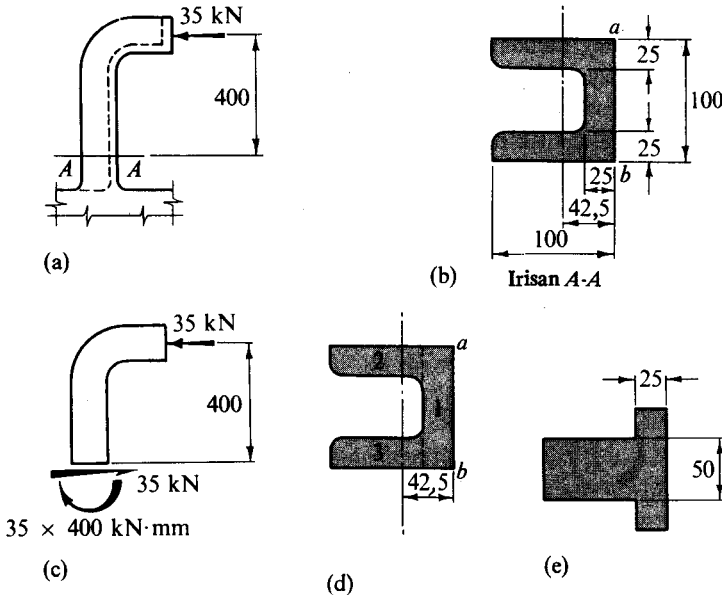
$$\bar{y} = \frac{\Sigma Ay}{\Sigma A} = \frac{265,3 \times 10^3}{6250} = 42,5 \text{ mm} \quad \text{dari garis } ab$$

$$I = \Sigma (I_o + Ad^2) = \frac{(100)(25)^3}{12} + (2500)(30)^2 + \frac{(2)(25)(75)^3}{12} + (2)(1875)(20)^2$$

$$= 5,64 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I} = \frac{35 \times 400 \times 57,5}{5,64 \times 10^6} = 0,143 \text{ kN/mm}^2 = 143 \text{ MPa} \quad (\text{tekan})$$

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I} = \frac{35 \times 400 \times 42,5}{5,64 \times 10^6} = 0,105 \text{ kN/mm}^2 = 105 \text{ MPa} \quad (\text{tarik})$$



(Semua ukuran dalam mm)

Gambar 5-10

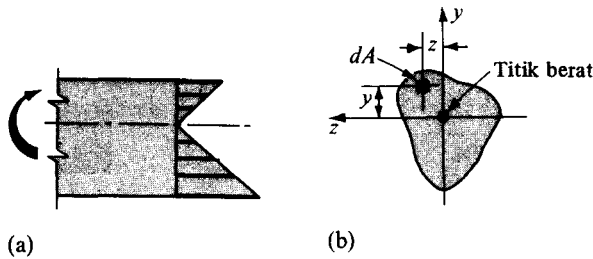
Tegangan ini bervariasi secara linier terhadap sumbu netral dan menjadi nol pada sumbu ini. Bila pada braket yang sama arah dari gaya  $P$  dibalikkan, maka sikap tegangan-tegangan di atas akan menjadi terbalik pula arahnya. Hasil-hasil yang diperoleh akan sama pula bila daerah irisan penampang braket dibuat dalam bentuk  $T$  seperti terlihat dalam Gambar 5-10(e). Sifat-sifat irisan ini terhadap sumbu yang penting adalah sama dengan yang pada kanal. Kedua irisan ini mempunyai sebuah sumbu simetri.

Contoh di atas memperlihatkan bahwa batang yang melawan lenturan dapat diatur supaya mempunyai tegangan maksimum yang berbeda dalam tarik dan tekan. Hal ini penting untuk bahan-bahan yang mempunyai kekuatan yang berbeda dalam tarik dan tekan. Unpamanya, besi cor adalah kuat dalam tekan tetapi lemah dalam tarik. Jadi, perbandingan suatu bangunan besi cor dapat diatur mempunyai tegangan tarik maksimum yang rendah. Kapasitas kemampuan bahan dapat dipergunakan secara lebih baik. Hal ini akan ditinjau lebih lanjut dalam bab mengenai disain balok.

#### \*5-7 LENTURAN MURNI BALOK DENGAN IRISAN TAK SIMETRIS

Lenturan murni dari balok elastis yang mempunyai sumbu simetri telah dibahas dalam pasal yang lalu. Momen terpakai diandaikan bekerja dalam bidang simetri. Batasan-batasan ini, meskipun berguna sekali dalam membentuk teori lenturan, adalah ketat

sekali tetapi bisa pula terlalu leluasa. Rumus-rumus yang sama dapat dipergunakan untuk setiap balok yang mendapat lenturan murni, asal saja momen lentur dilakukan pada bidang yang sejajar dengan sumbu utama daerah irisan penampang. Penurunan rumus sebelumnya dapat diulangi lagi secara identik. Tegangan bervariasi secara linier dari sumbu netral melalui titik berat. Seperti sebelumnya, tegangan pada setiap daerah elementer  $dA$ , dalam Gambar 5-11, adalah  $\sigma = -(y/c)\sigma_{\max}$ . Jadi  $-(y/c)\sigma_{\max} dA$  adalah suatu gaya kecil takberhingga yang bekerja pada sebuah elemen. Penjumlahan momen-momen gaya dalam ini sekitar sumbu  $z$  membentuk momen dalam. Tetapi karena simetri tidaklah cukup gaya-gaya dalam ini dapat membentuk suatu momen sekitar sumbu  $y$ . Hal ini harus diterima.



Gambar 5-11 Balok dengan daerah irisan penampang yang tak simetris

Lengan-lengan momen dari gaya-gaya yang bekerja pada daerah-daerah yang kecil takberhingga sekitar sumbu  $y$  adalah sama dengan  $z$ . Jadi momen  $M_{yy}$  yang mungkin sekitar sumbu  $y$  adalah

$$M_{yy} = \int_A -\frac{y}{c} \sigma_{\max} dA z = -\frac{\sigma_{\max}}{c} \int_A yz dA$$

Integral yang terakhir menyatakan hasil kali inersia dari daerah irisan penampang. Ini sama dengan nol bila sumbu yang dipilih adalah sumbu utama dari daerah tersebut.\* Karena sumbu-sumbu inilah yang kita gunakan di sini dan dianggap merupakan sumbu utama, maka  $M_{yy} = 0$  hingga rumus-rumus yang dibangun semula berlaku pula untuk balok dengan setiap bentuk irisan penampang.

Bila suatu momen lentur berlaku tanpa harus sejajar dengan salah satu sumbu utama, maka yang harus diikuti adalah prosedur-prosedur yang kita pelajari dalam Bab 7.

### \*5-8 LENTURAN TAK ELASTIS DARI BALOK

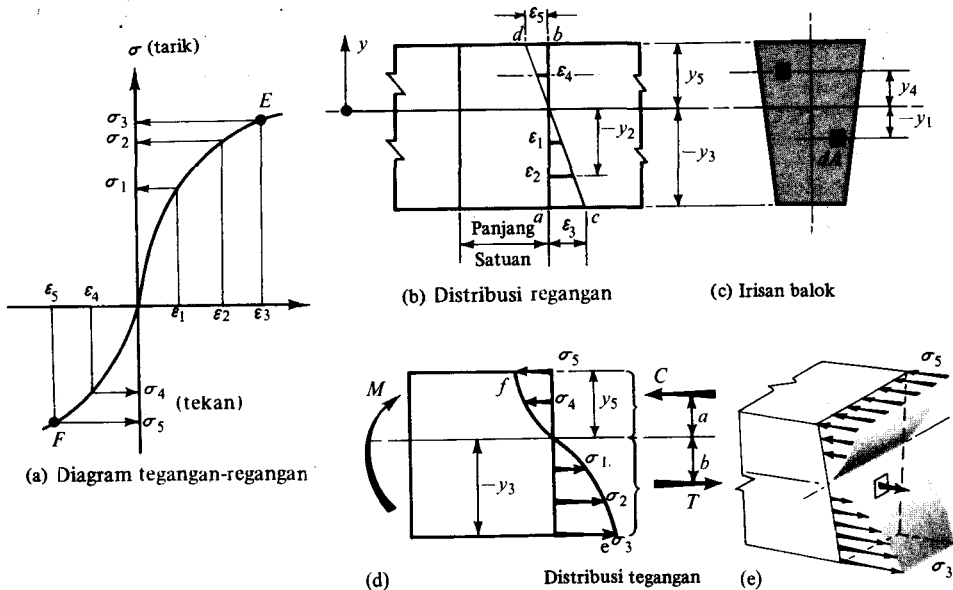
Rumus lenturan elastis yang kita turunkan sebelumnya hanya berlaku bila tegangan berbanding lurus dengan regangan. Suatu teori yang lebih umum akan kita bahas sekarang untuk bahan yang tidak mematuhi hukum Hooke.

\* Lihat lampiran Bab 8.



Pengandaian kinematik dasar yang kita gunakan untuk teori lenturan, sebagai di-terangkan dalam Pasal 5-3, menuntut irisan-irisan yang merupakan bidang datar melalui sebuah balok ditarik tegaklurus terhadap sumbunya adalah masih tetap merupakan bidang datar setelah balok tersebut mengalami lenturan. Pengandaian ini tetap berlaku meskipun bahan bersifat secara tak elastis. Tanpa membuat pengandaian-pengandaian lebih lanjut, berarti bahwa regangan-regangan dalam serat sebuah balok yang menga-lami lenturan bervariasi secara linier terhadap jarak masing-masing serat tersebut dari sumbu netral. Dengan dasar ini, bersama dengan syarat-syarat keseimbangan dan hubungan tegangan-regangan yang tak linier, maka teori lenturan yang lebih umum dapat kita bangun.

Tinjaulah sebuah segmen dari balok berbentuk prisma yang mengalami momen lenturan. Daerah irisan penampang balok ini mempunyai suatu sumbu simetri vertikal, seperti dalam Gambar 5-12(c). Perubahan linier dari regangan dari sumbu netral untuk balok seperti ini dinyatakan secara diagramatis dalam Gambar 5-12(b). Pada sumbu netral, yang mana masih belum diterangkan, regangan tersebut adalah nol. Regangan pada titik-titik yang jauh dari sumbu netral sesuai dengan jarak horisontal dari garis  $ab$  ke garis  $cd$  dalam Gambar 5-12(b). Umpamanya regangan serat pada suatu jarak  $-y_2$  dari sumbu netral adalah  $\epsilon_2$ . Jarak-jarak seperti ini menentukan regangan aksial dari setiap serat dalam balok.



Gambar 5-12 Balok dengan lenturan tak elastis

Untuk membuat penjelasan yang bersifat umum, maka bahan tersebut akan kita andaikan mempunyai kurva tegangan-regangan yang berbeda antara tarik dan tekan. Kurva yang mungkin untuk bahan demikian diperlihatkan dalam Gambar 5-12(a). Kurva-kurva demikian dapat diperoleh dari percobaan-percobaan beban aksial.

Bila efek Poisson diabaikan, maka serat-serat yang membujur dari balok yang melentur akan bersifat secara bebas. Masing-masing serat dapat dianggap sebagai batang kecil takberhingga berbeban aksial, yang mendapat tegangan sampai kepada tingkat ketergantungan terhadap regangannya. Karena perubahan dari regangan dalam balok diatur dengan pengandaian, maka pola tegangan dapat dirumuskan dari kurva tegangan-regangan, seperti dalam Gambar 5-12(a). Umpamanya, terhadap regangan tarik  $\epsilon_1$ , pada jarak  $-y_1$  dari sumbu netral, maka tegangan tarik  $\sigma_1$  bekerja dalam balok tersebut. Demikian pula dengan cara yang sama  $\epsilon_4$  berhubungan dengan  $-\sigma_4$ , yaitu tegangan tekan. Hal yang sama berlaku pula untuk serat yang lain dari balok. Semua ini menentukan distribusi tegangan yang terlihat dalam Gambar-gambar 5-12(d) dan (e); ini mirip dengan bentuk kurva tegangan-regangan (bandingkanlah  $EF$  dengan  $ef$  dengan memutar-nya  $90^\circ$  menurut arah jarum jam).

Karena balok tersebut bekerja dalam lenturan murni, maka persamaan-persamaan statika yang sama akan dipergunakan di sini seperti kita menggunakannya dalam menentukan rumus lenturan elastis. Dua macam hubungan yang dipergunakan seperti sebelumnya adalah

$$\sum F_x = 0 \quad \text{atau} \quad \int_A \sigma dA = 0 \quad (5-7)$$

$$\sum M_z = 0 \quad \text{atau} \quad - \int_A \sigma y dA = M \quad (5-8)$$

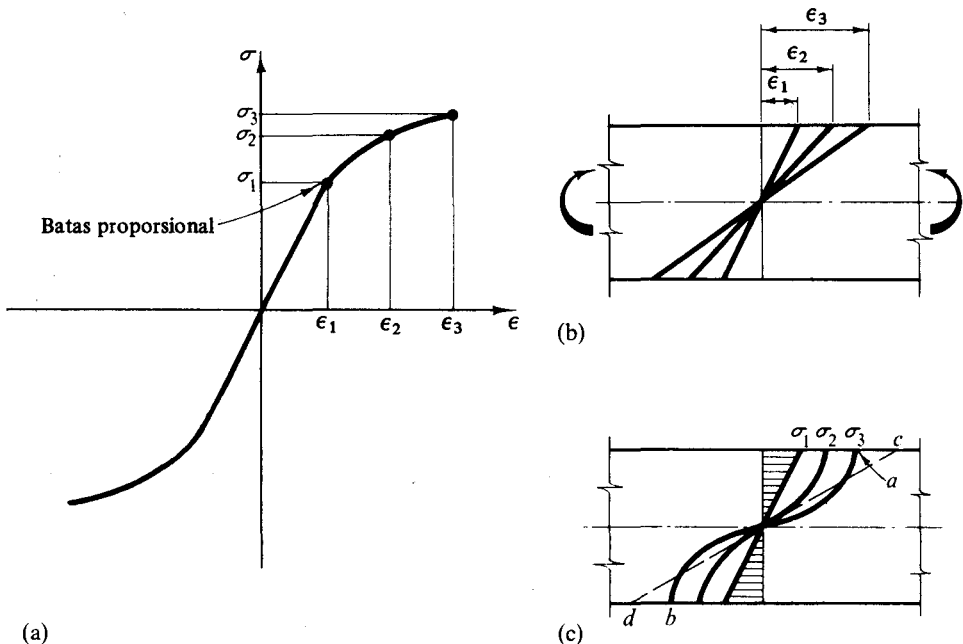
di mana  $\sigma$  adalah tegangan normal yang bekerja pada sebuah elemen kecil takberhingga  $dA$  dari daerah irisan penampang  $A$  dari balok, dan  $y$  adalah jarak elemen  $dA$  tersebut dari sumbu netral. Perlulah diperhatikan bahwa untuk  $M$  yang positif maka integral dalam Persamaan 5-8 menjadi positif karena tegangan  $\sigma$  adalah negatif untuk  $y$  yang positif dan  $\sigma$  positif untuk  $y$  yang negatif.

Hasil penyelesaian soal yang sangat umum dalam lenturan tak elastis, yaitu dalam memenuhi keseimbangan Persamaan-persamaan 5-7 dan 5-8, memerlukan suatu prosedur uji coba. Mula-mula letak dari sumbu netral tidaklah diketahui. Kemudian suatu metoda yang tepat dibuat dengan mengandaikan suatu distribusi regangan, jadi menentukan letak suatu sumbu netral coba dan memberikan tegangan distribusi yang terlihat dalam Gambar 5-12(d). Percobaan-percobaan ini haruslah diteruskan sampai jumlah gaya-gaya  $C$  di sisi tekan dari balok sama dengan jumlah gaya-gaya  $T$  di sisi tarik dari balok. Setelah keadaan demikian telah dipenuhi maka letak sumbu netral dari balok dapat ditentukan. Terutama perhatikanlah bahwa dalam lenturan yang tak elastis sumbu netral dari balok mungkin tidak berimpit dengan sumbu titik berat daerah irisan penampang. Hal ini terjadi demikian hanya bila daerah irisan penampang mempunyai dua sumbu simetri dan diagram tegangan-regangan antara tarik dan tekan adalah identik.

Sesudah letak sumbu netral ditentukan dan harga-harga  $C$  dan  $T$  diketahui maka garis kerja mereka dapat pula ditentukan. Hal ini mungkin, karena distribusi tegangan

pada daerah irisan penampang telah diketahui pula. Akhirnya diperoleh bahwa momen perlawanan adalah  $T(a + b)$  atau  $C(a + b)$ . Proses yang terdahulu adalah setara dengan integrasi yang ditunjukkan oleh Persamaan 5-8. Tetapi momen perlawanan yang dihitung demikian, berdasarkan kepada regangan yang diandaikan, mungkin tidak sama dengan momen terpakai. Jadi proses ini haruslah diulangi dengan mengandaikan mula-mula regangan yang lebih besar atau lebih kecil pada serat yang jauh sampai momen perlawanan menjadi sama dengan momen terpakai.

Metoda yang terdahulu dalam menyelesaikan soal yang umum mengenai lenturan tak elastis adalah membosankan dan suatu prosedur yang lebih cepat untuk menyelesaikan persoalan tersebut telah pula dikembangkan.\* Tetapi pembahasan di atas sudah cukup dalam memberikan gambaran dari sifat balok yang mengalami lenturan di luar batas elastis. Sebagai contoh yang sederhana, tinjaulah sebuah balok yang berpenampang sikuempat yang mengalami lenturan. Ambillah diagram tegangan-regangan dari bahan balok serupa untuk tarik dan tekan seperti yang terlihat dalam Gambar 5-13(a). Kemudian, selagi momen lentur yang bekerja pada balok tersebut diperbesar secara berangsur-angsur, maka regangan yang dihasilkan akan bertambah pula seperti yang ditunjukkan oleh  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  dan  $\epsilon_3$  dalam Gambar 5-13(b). Sesuai dengan regangan-regangan ini dan perubahan linier mereka dari sumbu netral, maka distribusi tegangan yang dihasilkan akan terlihat seperti dalam Gambar 5-13(c). Dalam hal ini, sumbu netral

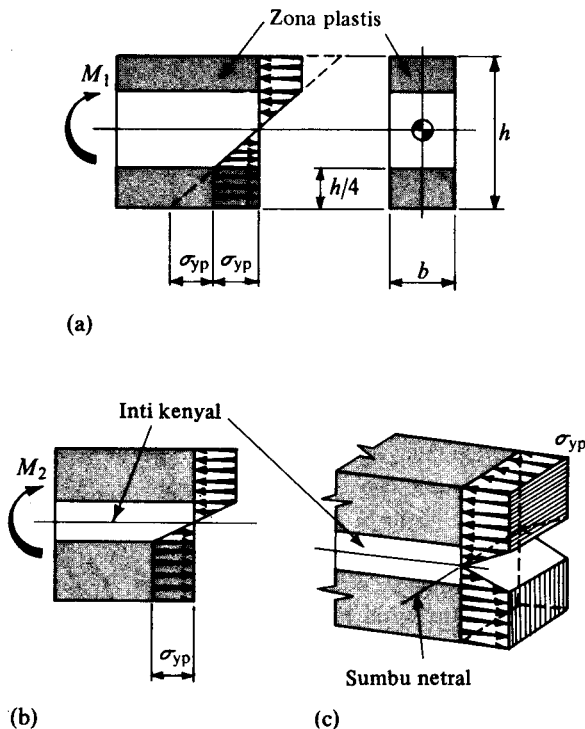


**Gambar 5-13** Balok berpenampang sikuempat dalam keadaan lenturan yang melebihi batas proporsional bahan.

\* A. Nadai, *Theory of Flow and Fracture of Solids*, Vol. I, New York: McGraw-Hill. 1950, hal. 356.

berimpit dengan sumbu titik berat, seperti irisan yang mempunyai dua sumbu simetri dan diagram tegangan-regangan adalah serupa dalam tarik dan tekan.

Bila  $\sigma_3$  sesuai dengan kekuatan ultimat dari bahan yang mengalami tarik aksial, maka momen lentur ultimat yang sanggup dilawan oleh balok dapat diperkirakan. Ia berhubungan dengan distribusi tegangan yang diberikan oleh garis kurva  $ab$  yang terlihat dalam Gambar 5-13(c). Suatu perlawanan setara terhadap momen lentur berdasarkan kepada pengandaian linieritas distribusi tegangan dari sumbu netral diperlihatkan oleh garis  $cd$  dalam gambar yang sama. Karena kedua macam distribusi tegangan ini diandaikan melawan momen yang sama dan dalam kasus yang belakangan tegangan-tegangan lebih rendah bekerja dekat sumbu netral sedang tegangan-tegangan yang lebih tinggi haruslah bekerja dekat serat luar. Tegangan dalam serat yang paling jauh, dihitung berdasarkan rumus lenturan elastis untuk momen lentur ultimat yang ditentukan secara eksperimental, disebut *modulus pecah* (rupture modulus) dari bahan yang melentur. Harganya lebih tinggi dari tegangan yang sebenarnya. Untuk bahan-bahan yang diagram tegangan-regangannya mendekati suatu garis lurus sepenuhnya hingga kepada kekuatan ultimat, maka perbedaan antara tegangan maksimum yang benar dengan modulus pecah adalah kecil. Di pihak lain, perbedaan tersebut adalah besar untuk bahan-bahan dengan lengkungan yang tajam dari kurva tegangan-regangan.



Gambar 5-14 Balok elastis-plastis pada tingkat regangan yang sedang.

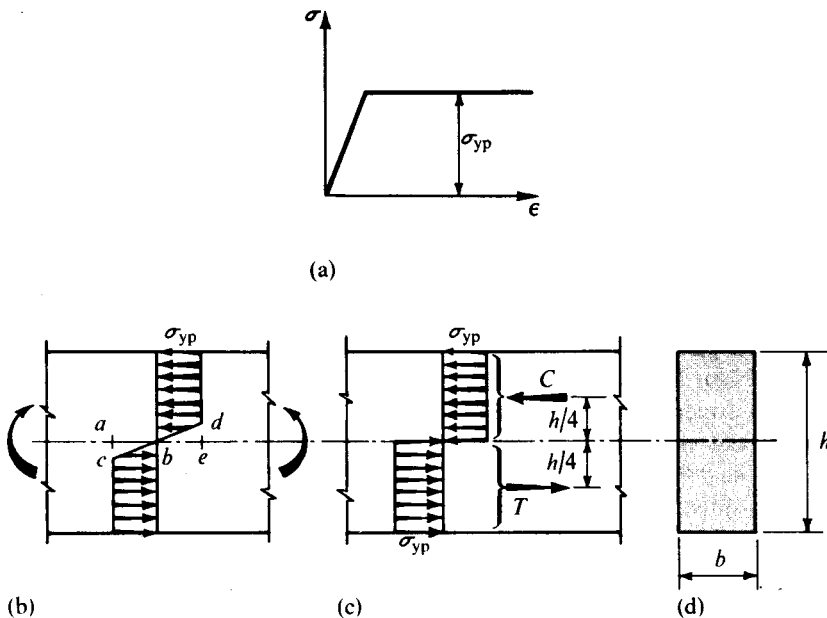
Contoh lain yang penting untuk lenturan yang tak elastis, tinjaulah sebuah balok berpenampang sikuempat yang terbuat dari bahan elastis plastis, seperti dalam Gambar 5-14. Dalam mengidealisasikan sifat bahan seperti itu, adalah mungkin untuk memisahkan dengan jelas anggota tersebut ke dalam daerah-daerah elastis dan plastis. Misalnya, bila regangan dalam serat-serat yang ekstrim menjadi dua kali lipat daripada saat permulaan terjadinya lenturan, maka yang tetap tinggal kenyal adalah seperdua balok di bagian tengah, lihatlah Gambar 5-14(a). Dalam hal ini seperempat bagian luar balok menjadi daerah plastis. Besar momen  $M_1$  yang sesuai dengan keadaan ini telah dapat dihitung (lihat Contoh 5-7). Pada regangan yang lebih tinggi daerah atau inti elastis menjadi berkurang. Distribusi tegangan yang sesuai dengan keadaan ini terlihat dalam Gambar-gambar 5-14(b) dan (c).

#### CONTOH 5-6

Tentukanlah kapasitas plastis atau ultimat lenturan dari balok baja lunak yang berpenampang sikuempat. Tinjaulah bahan yang secara ideal menjadi elastis-plastis.

#### PENYELESAIAN

Diagram tegangan regangan yang diidealisasikan adalah dalam Gambar 5-15(a). Anggaplah bahan tersebut mempunyai sifat yang sama pada tarik dan tekan. Regangan yang terjadi selama pelenturan adalah besar sekali dibandingkan dengan regangan elastis maksimum (15 sampai 20 kali besaran yang kemudian). Oleh karena itu, sejak deformasi balok yang terlalu besar terjadi bersamaan dengan regangan yang besar sekali, maka momen plastis dapat digantikan sebagai momen ultimat.



Gambar 5-15

$_{yp}$  = yield point = titik luluh = titik leleh

Distribusi tegangan yang diperlihatkan dalam Gambar 5-15(b) berlaku setelah suatu deformasi yang besar terjadi. Dalam menghitung momen perlawanan, tegangan-tegangan yang sesuai untuk daerah-daerah segitiga  $abc$  dan  $bde$  dapat diabaikan tanpa terlalu mengurangi ketelitian. Mereka memberikan sedikit perlawanan terhadap momen lentur terpakai karena mempunyai lengan momen yang pendek. Jadi idealisasi distribusi tegangan seperti yang diperlihatkan dalam Gambar 5-15(c) dibolehkan dan mengandung arti fisis yang sederhana. Seluruh separuh atas dari balok dihadapkan kepada tegangan tekan serbasama  $\sigma_{yp}$ , sedang separuh yang bawah kepada tegangan tarik serbasama  $\sigma_{yp}$ . Balok tersebut dibagi rata ke dalam daerah tarik dan daerah tekan mengikuti simetri. Secara numerik

$$C = T = \sigma_{yp}(bh/2), \quad \text{yaitu (tegangan) } \times \text{ (luas)}$$

Masing-masing gaya ini bekerja pada jarak  $h/4$  dari sumbu netral. Jadi momen perlawanan plastis atau ultimat dari balok adalah

$$M_p \equiv M_{ult} = C\left(\frac{h}{4} + \frac{h}{4}\right) = \sigma_{yp} \frac{bh^2}{4}$$

di mana  $b$  adalah lebar balok dan  $h$  tingginya.

Penyelesaian yang sama dapat diperoleh dengan langsung menggunakan Persamaan-persamaan 5-7 dan 5-8. Dengan memperhatikan tanda dari tegangan, kita dapat menyimpulkan bahwa Persamaan 5-7 dipenuhi dengan mengambil sumbu netral melalui tengah-tengah balok. Dengan mengambil  $dA = b \, dy$  dan dengan memperhatikan simetri sekitar sumbu netral, kita dapat mengubah Persamaan 5-8 menjadi

$$M_p \equiv M_{ult} = -2 \int_0^{h/2} (-\sigma_{yp}) y b \, dy = \sigma_{yp} b h^2 / 4 \quad (5-9)$$

Momen lentur perlawanan dari balok yang berpenampang sikuempat, bila serat-serat luar baru mencapai  $\sigma_{yp}$  seperti diberikan oleh rumus lenturan elastis, adalah

$$M_{yp} = \sigma_{yp} I / c = \sigma_{yp} (bh^2/6) \quad \text{karena itu} \quad M_p / M_{yp} = 1,50$$

Perbandingan  $M_p / M_{yp}$  hanya tergantung kepada sifat irisan penampang dari bangunan dan disebut *faktor bentuk* (shape factor). Faktor bentuk di atas untuk balok berpenampang sikuempat menunjukkan bahwa  $M_{yp}$  dapat melebihi 50 persen sebelum kapasitas ultimat dari balok sikuempat tercapai.

Untuk beban-beban statis seperti yang terjadi pada gedung-gedung, kapasitas ultimat dapat ditentukan dengan menggunakan momen plastis. Prosedur yang berdasarkan atas konsep-konsep seperti ini disebut sebagai *metoda plastis dari analisa atau desain*. Untuk pekerjaan yang demikian, maka *modulus irisan plastis* (plastic section modulus)  $Z$  didefinisikan sebagai berikut:

$$M_p \equiv \sigma_{yp} Z \quad (5-10)$$

Untuk balok sikuempat yang ditelaah di atas maka  $Z = bh^2/4$ .

*Steel Construction Manual*\* menyediakan sebuah tabel modulus irisan plastis untuk bermacam-macam bentuk baja biasa. Daftar singkat modulus irisan plastis untuk irisan-irisan baja diberikan pada Tabel 9 dari Lampiran. Untuk  $M_p$  dan  $\sigma_{yp}$  yang diketahui, maka jawaban Persamaan 5-10 untuk  $Z$  sangatlah sederhana.

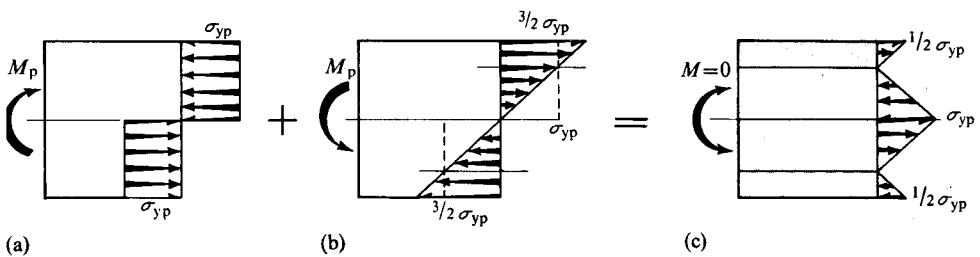
Metoda analisis batas atau plastis ini tidak berlaku untuk disain mesin di mana sifat-sifat lelah atau fatig dari bahan menjadi penting.

#### CONTOH 5-7

Tentukanlah tegangan residu pada balok sikuempat setelah membuang momen lentur ultimat.

#### PENYELESAIAN

Distribusi tegangan yang berhubungan dengan momen ultimat diperlihatkan dalam Gambar 5-16(a). Besar momen ini telah ditentukan dalam contoh yang lalu yaitu  $M_p = \sigma_{yp}bh^2/4$ . Sesudah melepaskan momen plastis  $M_p$  ini setiap serat kembali memantul secara elastis. Daerah kenyal selama pembebanan dilepaskan kembali, adalah dua kali dari yang dapat terjadi pada permulaan. Oleh karena itu, sejak  $M_{yp} = \sigma_{yp}bh^2/6$  dan momen yang dilepaskan adalah  $\sigma_{yp}(bh^2/4)$  atau  $1,5 M_{yp}$ , maka tegangan maksimum yang dihitung berdasarkan tindakan elastis adalah  $\frac{3}{2}\sigma_{yp}$  seperti yang terlihat dalam Gambar 5-16(b). Dengan menggabungkan tegangan awal pada  $M_p$  dengan tegangan memantul elastis yang disebabkan oleh pelepasan  $M_p$ , maka kita peroleh tegangan residu, yaitu dalam Gambar 5-16(c). Perhatikanlah bahwa kedua macam tegangan mikroresidu longitudinal tarik dan tekan masih tinggal dalam balok. Dalam gambar daerah-daerah tarik diberi warna gelap. Bila balok demikian dibubut dengan mengurangi kedalamannya secara berangsur-angsur, maka pelepasan tegangan residu akan mengakibatkan deformasi batang yang tidak diinginkan.



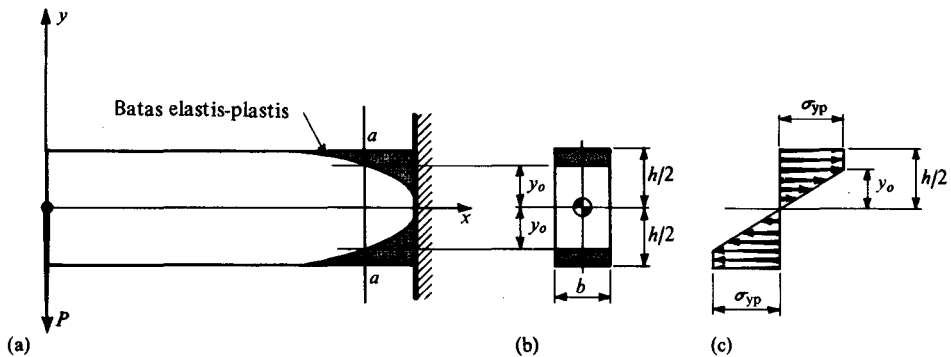
Gambar 5-16 Distribusi tegangan residu pada batang sikuempat

#### CONTOH 5-8

Tentukanlah momen yang melawan kapasitas suatu balok sikuempat yang elastis plastis.

\* American Institute of Steel Construction, *AISC Steel Construction Manual*, (7th Ed.), New York: AISC, Inc, 1970, halaman 2 - 14 sampai 2 - 20.

yp = yield point = titik luluh = titik leleh



Gambar 5-17 Kantilever elastis-plastis

## PENYELESAIAN

Untuk membuat soal tersebut lebih pasti, tinjaulah sebuah kantilever yang dibebani seperti dalam Gambar 5-17(a). Bila balok terbuat dari bahan elastis-plastis ideal dan gaya terpakai  $P$  cukup besar untuk menghasilkan lenturan, maka daerah plastis akan terbentuk (diperlihatkan sebagai daerah berwarna gelap dalam gambar). Pada irisan tertentu  $a-a$  maka distribusi tegangan yang sesuai akan menjadi seperti yang terlihat dalam Gambar 5-17(c). Daerah elastis meluas menjadi sedalam  $2y_0$ . Perhatikanlah bahwa dalam daerah elastis, tegangan-tegangan berubah secara linier dan di mana-mana dalam daerah plastis tegangan aksial adalah  $\sigma_{yp}$ , maka kita memperoleh bahwa momen perlawanan  $M$  adalah

$$M = 2 \int_0^{y_0} \left( -\frac{y}{y_0} \sigma_{yp} \right) (b dy) y - 2 \int_{y_0}^{h/2} (-\sigma_{yp}) (b dy) y \quad (5-11)$$

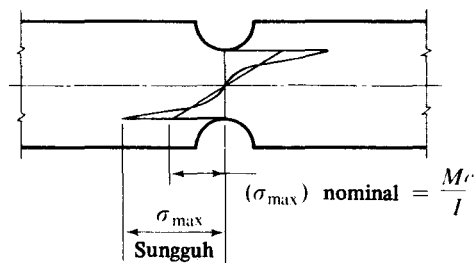
$$\sigma_{yp} \frac{bh^2}{4} - \sigma_{yp} \frac{by_0^2}{3} = M_p - \sigma_{yp} \frac{by_0^2}{3}$$

di mana penyederhanaan yang terakhir dilakukan menurut Persamaan 5-9. Adalah menarik untuk mencatat bahwa, dalam persamaan umum ini, bila  $y_0 = 0$ , maka kapasitas momen menjadi sama dengan momen plastis atau ultimat. Di pihak lain, bila  $y_0 = h/2$ , maka momen berubah kembali kepada pembatasan keadaan kenyal di mana  $M = \sigma_{yp}bh^2/6$ . Bila diketahui momen lentur terpakai sepanjang bentangan tersebut, maka batas elastis plastis dapat ditentukan dengan menyelesaikan Persamaan 5-11 untuk  $y_0$ . Selama daerah atau inti elastis tetap ada, maka deformasi plastis tidak akan terjadi tanpa suatu batas. Hal ini merupakan kasus yang mengandung aliran plastis.

## \*5-9 KONSENTRASI TEGANGAN

Teori lenturan yang dikembangkan dalam pasal yang lalu hanya berlaku untuk





Gambar 5-18 Faktor konsentrasi tegangan lenturan

$$K = \frac{(\sigma_{\max}) \text{ sungguh}}{(\sigma_{\max}) \text{ nominal}}$$

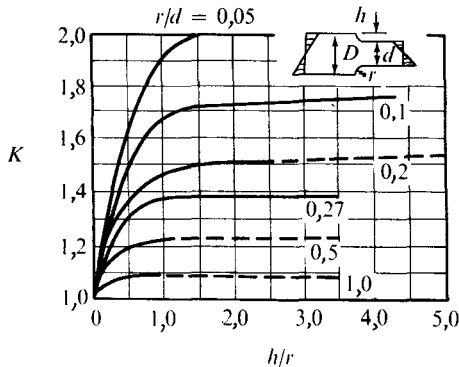
balok-balok yang mempunyai luas irisan penampang yang konstan. Balok-balok demikian dapat dikatakan sebagai *balok prismatis* (prismatic beams). Bila daerah irisan penampang balok bervariasi secara berangsur-angsur, maka penyimpangan yang terjadi dari pola tegangan yang kita bahas semula tidaklah berarti. Tetapi bila pada daerah irisan penampang balok terdapat takikan, lekukan, lubang paku atau penampang tersebut berubah dengan tajam maka timbullah tegangan *lokal* yang tinggi. Hal ini serupa dengan yang telah kita bicarakan dahulu mengenai batang yang mendapat beban aksial dan puntiran. Sekali lagi kita katakan bahwa sangat sukar untuk memperoleh ungkapan yang analitis untuk tegangan yang sesungguhnya. Pada waktu yang lalu kebanyakan keterangan mengenai distribusi tegangan yang sesungguhnya datang dari percobaan foto-elastik yang teliti. Pada waktu sekarang yang dipergunakan secara luas adalah metoda numerik yang menggunakan elemen-elemen terbatas bersama komputer.

Untunglah, seperti telah kita bicarakan untuk kasus-kasus lain, hanyalah ukuran-ukuran geometris dari batang yang akan mempengaruhi pola tegangan lokal. Selanjutnya, karena perhatian kita adalah pada tegangan maksimum, maka ide mengenai faktor konsentrasi tegangan dapat kita gunakan. Perbandingan  $K$  dari tegangan maksimum sesungguhnya terhadap tegangan nominal pada irisan *minimum* seperti diberikan oleh Persamaan 5-1 didefinisikan sebagai faktor konsentrasi tegangan lentur. Konsep ini digambarkan dalam Gambar 5-18. Jadi pada umumnya

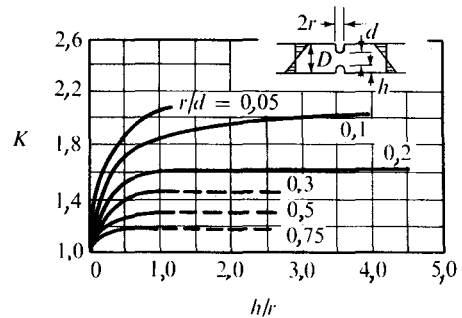
$$(\sigma_{\max})_{\text{sungguh}} = K \frac{Mc}{I} \quad (5-12)$$

Gambar-gambar 5-19 dan 5-20 adalah gambar faktor-faktor tegangan konsentrasi untuk dua kasus yang tepat.\* Faktor  $K$ , yang tergantung kepada ukuran bagian konstruksi, dapat diperoleh dari diagram-diagram ini. Penelaahan grafik-grafik ini menunjukkan kecenderungan lengkungan sudut yang banyak dan penghilangan takikan-takikan yang jelas, untuk memperkecil terjadinya konsentrasi tegangan lokal. Perbaikan-perbaik-

\* Gambar-gambar ini direproduksi dari tulisan M.M. Frocht, "Factors of Stress Concentration Photoelastically Determined," *Trans. ASME*, vol. 57, halaman A-67.



**Gambar 5-19** Faktor-faktor konsentrasi tegangan lenturan murni dari batang datar dengan berbagai sudut



**Gambar 5-20** Faktor-faktor konsentrasi tegangan dalam lenturan untuk batang-batang datar yang berlekuk

an ini sangat dikehendaki dalam disain mesin. Pada pekerjaan bangunan, terutama di mana dipergunakan bahan-bahan yang liat dan gaya-gaya terpakai tidak berfluktuasi, maka distribusi tegangan diabaikan.

Bila daerah irisan penampang balok tidak beraturan sendiri, maka konsentrasi tegangan terjadi juga. Ini menjadi penting sekali bila daerah irisan penampang mempunyai sudut-sudut yang masuk kembali. Misalnya, tegangan lokal yang tinggi terjadi pada titik di mana flens dan plat badan (web)\* dari balok-I bertemu. Untuk memperkecil ini, bentuk-bentuk rol yang komersial mempunyai lengkung sudut (fillet) yang banyak pada semua titik tersebut.

Sebagai tambahan kepada konsentrasi tegangan yang disebabkan oleh perubahan daerah irisan penampang balok, ada lagi efek lain yang penting. Gaya-gaya acapkali terjadi pada daerah yang terbatas dari balok. Selanjutnya, gaya reaksi bekerja hanya secara lokal pada balok yaitu pada titik-titik tumpuan. Dalam pembahasan terdahulu semua gaya-gaya demikian diidealisasikan sebagai gaya-gaya terpusat. Dalam praktek tekanan dukung rata-rata antara batang yang memberikan gaya seperti ini dan balok tersebut dihitung pada titik sambungan gaya tersebut dengan balok. Tekanan atau tegangan dukung ini bekerja tegak lurus terhadap permukaan netral balok dan *tegak lurus terhadap tegangan-tegangan lentur yang dibicarakan dalam bab ini*. Pembahasan yang lebih terperinci mengenai efek gaya demikian menunjukkan bahwa gaya ini mengakibatkan gangguan semua tegangan dalam skala lokal dan tekanan dukung yang biasanya dihitung merupakan pendekatan yang kasar. Tegangan-tegangan yang tegak lurus terhadap tegangan lentur bersifat hampir mendekati seperti yang diperlihatkan dalam Gambar 2-16. Penyelidikan mengenai gangguan yang disebabkan oleh tegangan dukung dalam distribusi tegangan lentur berada di luar jangkauan buku ini.†

\* *Web* adalah bagian tipis vertikal dari balok. Bagian tipis horisontal dari balok disebut *flens*.

† Berdasarkan azas dari St. Venant (Pasal 2-11) pada jarak yang menjauhi gaya-gaya terpusat yang sebanding dengan ukuran-ukuran penampang lintang dari batang tersebut, maka rumus yang dikembangkan dalam buku ini adalah cukup teliti, tetapi rumus yang biasa tidak berlaku untuk balok-balok tebal pendek seperti gigi-gigi dari roda gigi.

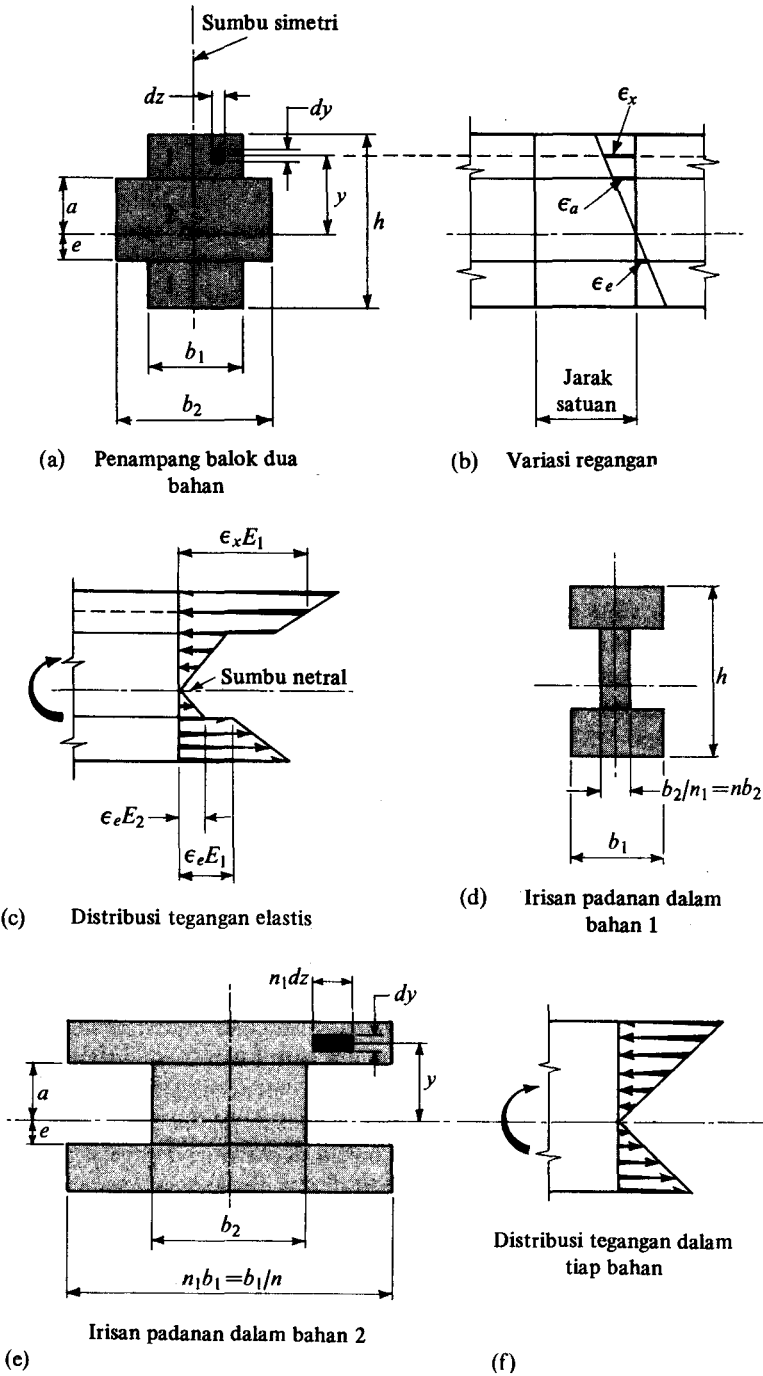
Pembaca haruslah ingat bahwa faktor-faktor konsentrasi-tegangan hanya berlaku pada bahan yang bersifat secara kenyal. Bahan yang bersifat tak kenyal cenderung memperkecil faktor-faktor ini.

### \*5-10 BALOK DUA BAHAN

Sebegitu jauh balok yang ditelaah dianggap terbuat dari semacam bahan yang homogen. Penggunaan-penggunaan penting dari balok yang terbuat dari beberapa macam bahan yang berlainan, kita dapati dalam praktek. Yang terutama biasa kita temui adalah balok yang terdiri dari dua macam bahan. Balok kayu acap kali diperkuat dengan ikatan-ikatan logam, dan balok beton diperkuat dengan batang-batang baja. Teori pokok yang mendasari penelaahan elastis dari balok-balok demikian akan dibahas dalam pasal ini. Perluasan penelaahan ini ke dalam daerah tak elastis akan mengikuti prosedur-prosedur yang dibahas dalam Pasal 5-8. Penyelesaian untuk balok yang bersifat secara tak elastis akan diberikan sesudahnya dengan sebuah contoh.

Tinjaulah sebuah balok yang simetris yang terbuat dari dua macam bahan dengan irisan penampang seperti yang terlihat dalam Gambar 5-21(a). Bahan yang sebelah luar (bahan 1) mempunyai modulus elastis  $E_1$  dan modulus bahan yang di dalam (bahan 2) adalah  $E_2$ . Bila balok yang demikian dihadapkan pada lenturan, maka pengandaian deformasi dasar yang digunakan dalam teori lenturan masih tetap berlaku. Irisan-irisian bidang datar yang tegak lurus terhadap sumbu balok setelah lenturan masih tetap berupa bidang datar. Karena itu regangan haruslah berubah secara linier dari sumbu netral, seperti yang terlihat dalam Gambar 5-21(b). Untuk keadaan yang elastis, tegangan adalah sebanding dengan regangan, dan distribusi tegangan dengan menganggap  $E_1 > E_2$ , terlihat dalam Gambar 5-21(c). Perhatikanlah bahwa pada permukaan sambungan kedua bahan ditunjukkan suatu perubahan dalam intensitas dari tegangan. Meskipun regangan dalam kedua bahan pada permukaan seperti itu adalah sama, tetapi tegangan yang lebih tinggi terjadi pada bahan yang lebih kaku. Kekakuan suatu bahan diukur dengan modulus elastis  $E$ . Keterangan yang terdahulu adalah cukup untuk menyelesaikan setiap balok yang terdiri dari dua (atau lebih) bahan dengan mempergunakan penyelesaian uji-coba yang serupa dengan yang kita bahas dalam Pasal 5-8. Tetapi suatu penyederhanaan yang sungguh-sungguh dari prosedur ini mungkin dapat dilakukan. Dalam menggunakan persamaan  $\Sigma F_x = 0$  untuk menentukan letak sumbu netral dan  $\Sigma M_z = 0$  untuk memperoleh momen perlawanan, hanya besar dan letak gaya perlawanan (bukan tegangan) yang benar yang berarti bagi kita. Kita akan memperkenalkan teknik baru yang terdiri dari pembentukan sebuah irisan dari satu macam bahan di mana gaya-gaya perlawanan adalah sama seperti pada irisan asal. Irisan tersebut di atas dinamakan *daerah irisan penampang padanan atau perubahan* (equivalent or transformed cross sectional area). Setelah balok terbuat dari beberapa bahan disederhanakan menjadi balok padanan dari satu macam bahan, maka rumus lenturan elastis yang biasa dapat kita pergunakan.

Transformasi sebuah irisan dikerjakan dengan mengubah ukuran atau dimensi irisan penampang yang sejajar dengan sumbu netral dalam perbandingan modulus elastis dari bahan-bahan. Umpamanya bila irisan padanan dikehendaki di dalam bahan 1, maka ukuran-ukuran yang sesuai untuk bahan 1 tidak boleh berubah. Ukuran-ukuran horizontal dari bahan 2 berubah dengan perbandingan  $n$  di mana  $n = E_2/E_1$ , dalam Gambar



Gambar 5-21 Balok dari dua bahan

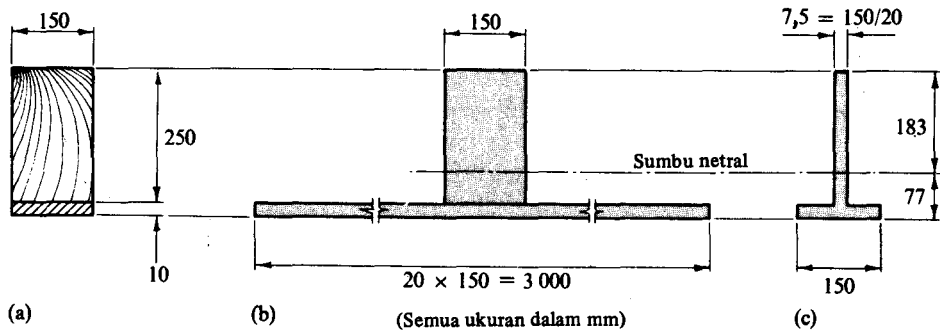
5-21(d). Dipihak lain, irisan transformasi tersebut adalah dari bahan 2, maka ukuran horisontal dari bahan lain berubah dengan suatu perbandingan  $n_1 = E_1/E_2$ , dalam Gambar 5-21(e). Perbandingan  $n_1$  adalah kebalikan perbandingan  $n$ .

Pengesahan transformasi irisan dilihat dengan membandingkan gaya-gaya yang bekerja pada irisan-irisan asli dengan padanan. Gaya dari regangan yang diketahui  $\epsilon_x$  yang bekerja pada daerah elementer  $dz dy$  dalam Gambar 5-21(a) adalah  $\epsilon_x E_1 dz dy$ . Elemen yang sama dari daerah pada Gambar 5-21(e) adalah  $n_1 dz dy$ . Gaya yang bekerja pada elemen ini adalah  $\epsilon_x E_2 n_1 dz dy$ . Tetapi, dari definisi  $n_1$ ,  $E_1 = n_1 E_2$ . Jadi gaya yang bekerja pada kedua elemen adalah sama dan berdasarkan letaknya, keduanya memberikan momen perlawanan yang sama pula.

Pada balok dengan suatu luas transformasi, maka regangan dan tegangan tetap berubah secara linier dari sumbu netralnya tegangan yang dihitung dengan jalan biasa adalah betul untuk bahan di mana transformasi atau pengubahan dari irisan dilakukan. Sedang untuk bahan yang lain maka tegangan yang sedang dihitung haruslah dikalikan dengan pembanding  $n$  atau  $n_1$  dari luas-luas transformasi yang sesungguhnya. Umpamanya, gaya yang bekerja pada  $n_1 dz dy$  dalam Gambar 5-21(e) sebenarnya bekerja pula pada  $dz dy$  dari bahan yang riil.

#### CONTOH 5-9

Tinjaulah sebuah balok campuran dengan ukuran irisan penampang seperti yang terlihat dalam Gambar 5-22(a). Bagian atas dengan ukuran  $150 \times 250$  mm terdiri dari kayu,  $E_w = 10.000$  MPa; sebelah bawah yaitu ambil ukuran  $10 \text{ mm} \times 150 \text{ mm}$  terbuat dari baja,  $E_s = 200.000$  MPa. Bila balok ini dihadapkan kepada momen lentur sebesar  $0,03 \text{ MN}\cdot\text{m}$  terhadap sumbu horisontal, berapakah tegangan maksimum dalam baja dan kayu.



Gambar 5-22

#### PENYELESAIAN

Harga perbandingan modulus elastis  $E_s/E_w = 20$ . Jadi dengan menggunakan irisan kayu yang ditransformasikan, maka lebar dari pelat bawah adalah  $(0,15)(20) = 3 \text{ m}$ . Daerah yang ditransformasikan ini terlihat dalam Gambar 5-22(b). Titik beratnya dan momen

lambam terhadap sumbu titik berat adalah

$$\bar{y} = \frac{150(250)125 + 10(3000)255}{150(250) + 10(3000)} = 183 \text{ mm} = 0,183 \text{ m} \quad (\text{dari atas})$$

$$I_{zz} = \frac{150(250)^3}{12} + (150)250(58)^2 + \frac{(3000)(10)^3}{12} + (10)(3000)(72)^2$$

$$= 478 \times 10^6 \text{ mm}^4 = 478 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

Tegangan maksimum dalam kayu adalah

$$(\sigma_w)_{\max} = \frac{Mc}{I} = \frac{(0,03)(0,183)}{478 \times 10^{-6}} = 11,5 \text{ MPa}$$

Tegangan maksimum dalam baja adalah

$$(\sigma_s)_{\max} = n\sigma_w = 20 \frac{(0,03)(0,077)}{478 \times 10^{-6}} = 96,5 \text{ MPa}$$

#### PENYELESAIAN LAIN

Daerah transformasi dalam hubungan dengan baja dapat pula kita pergunakan untuk menyelesaikan soal di atas. Jadi lebar padanan dari kayu adalah  $b/n = 150/20$  atau 7,5 mm. Daerah luas transformasi ini dapat dilihat dalam Gambar 5-22(c).

$$\bar{y} = \frac{(7,5)250(135) + 150(10)5}{(7,5)250 + 150(10)} = 77 \text{ mm} \quad (\text{dari bawah})$$

$$I_{zz} = \frac{(7,5)(250)^3}{12} + (7,5)250(58)^2 + \frac{150(10)^3}{12} + (150)10(72)^2$$

$$= 23,9 \times 10^6 \text{ mm}^4 = 23,9 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

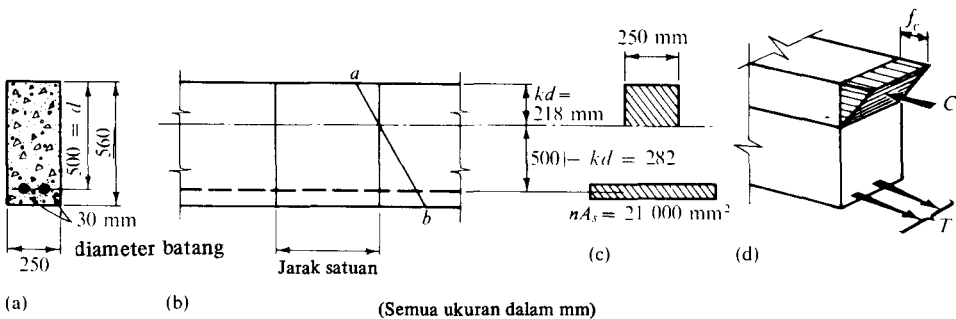
$$(\sigma_s)_{\max} = \frac{(0,03)(0,077)}{23,9 \times 10^{-6}} = 96,5 \text{ MPa}$$

$$(\sigma_w)_{\max} = \frac{\sigma_s}{n} = \left(\frac{1}{20}\right) \frac{(0,03)(0,183)}{23,9 \times 10^{-6}} = 11,5 \text{ MPa}$$

Perhatikanlah bahwa bila irisan transformasi adalah sebuah irisan kayu padanan, maka tegangan dalam potongan kayu yang sesungguhnya dapat dicari langsung. Sebaliknya bila irisan padanan adalah baja, maka tegangan-tegangan dalam baja dapat dicari langsung. Tegangan dalam bahan yang lebih kaku dari bahan irisan transformasi meningkat, hingga diperlukan tegangan yang lebih tinggi lagi untuk memberikan regangan satuan yang sama.

#### CONTOH 5-10

Tentukanlah tegangan maksimum dalam beton dan baja untuk balok beton bertulang dengan irisan penampang yang terlihat dalam Gambar 5-23(a) sekiranya balok tersebut mendapat momen lentur positif sebesar 70 kN·m. Penguatan balok terdiri dari dua



Gambar 5-23

batang baja. Baja-baja ini mempunyai diameter 30 mm dan luas penampang  $700 \text{ mm}^2$ . Anggaplah perbandingan  $E$  untuk baja terhadap  $E$  beton adalah 15; yaitu  $n = 15$ .

#### PENYELESAIAN

Irisan-irisian berbentuk bidang datar akan tetap berupa bidang datar dalam balok beton bertulang. Regangan berubah secara linier dari sumbu netral yaitu seperti garis  $ab$  dalam Gambar 5-23(b). Suatu irisan transformasi dipandang dari segi beton dipergunakan untuk menyelesaikan soal ini. Tetapi beton terlalu lemah dalam tarik hingga tidak ada jaminan bahwa keretakan-keretakan yang kecil tidak terjadi dalam daerah tarik dalam balok. Karena alasan inilah maka tidak ada pilihan bagi beton digunakan untuk melawan gaya tarik. Berdasarkan anggapan ini, maka beton dalam daerah tarik suatu balok hanya berfungsi menahan besi bertulang tersebut tetap berada ditempat.\* Jadi dalam telaah ini beton sebenarnya tidak berperan sama sekali hingga irisan transformasi dapat dianggap berbentuk seperti pada Gambar 5-23(c). Irisan penampang dari beton mempunyai bentuknya sendiri di atas sumbu netral; sedang di bawahnya tidak ada beton yang terlihat. Baja, tentu dapat melawan gaya tarik, jadi kelihatan sebagai daerah beton yang ditransformasikan. Untuk tujuan-tujuan perhitungan, baja tersebut diletakkan sedemikian rupa hingga sumbu netral dan titik beratnya dihubungkan oleh satu dimensi tunggal. Hampir tidak ada perbedaan antara jarak ini dengan jarak yang sesungguhnya dengan berbagai serat baja.

Sedemikian jauh ide sumbu netral telah dipergunakan, letak sumbu tersebut tidaklah diketahui. Tetapi, telah kita ketahui bahwa sumbu ini berimpitan dengan sumbu yang melalui titik berat irisan transformasi. Kita ketahui pula lebih lanjut bahwa momen pertama (atau statis) dari luas pada salah satu pihak dari sumbu titik berat adalah sama dengan momen pertama dari luas pada pihak yang lain. Jadi ambillah  $kd$  sebagai jarak antara atas balok dengan sumbu titik berat sebagai yang terlihat dalam Gambar 5-23(c), di mana  $k$  adalah suatu pembanding yang tidak diketahui† dan  $d$  adalah jarak dari

\* Sebenarnya beton dipergunakan untuk melawan gaya geser dan membuat baja tersebut tahan api.

† Ini sesuai dengan notasi yang biasa dipergunakan dalam buku ini mengenai beton bertulang. Dalam buku ini  $h$  umumnya dipergunakan untuk menyatakan ketinggian atau kedalaman balok.

puncak balok kepada tengah-tengah baja. Berikut ini adalah suatu penguraian aljabar yang baru mengenai penentuan letak sumbu netral, terhadap mana  $I$  dapat dihitung dan tegangan dapat ditentukan sebagai yang diperoleh pada contoh yang lalu.

$$\underbrace{(250)(kd)}_{\text{luas beton}} \underbrace{\left(\frac{kd}{2}\right)}_{\text{lengan}} = \underbrace{21\,000}_{\text{luas baja transformasi}} \underbrace{(500 - kd)}_{\text{lengan}}$$

$$(125)(kd)^2 = 10\,500\,000 - 21\,000(kd)$$

$$(kd)^2 + 168(kd) - 84\,000 = 0$$

Jadi  $kd = 218 \text{ mm}$  dan  $500 - kd = 282 \text{ mm}$

$$I = \frac{(250)(218)^3}{12} + (250)(218)\left(\frac{218}{2}\right)^2 + 0 + 21\,000(282)^2$$

$$= 2,53 \times 10^9 \text{ mm}^4 = 2,53 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$(\sigma_c)_{\max} = \frac{Mc}{I} = \frac{(70)(0,218)}{2,53 \times 10^{-3}} = 6030 \text{ kN/m}^2 = 6,03 \text{ MPa}$$

$$\sigma_s = n \frac{Mc}{I} = \frac{(15)(70)(0,282)}{2,53 \times 10^{-3}} = 117 \text{ MPa}$$

#### PENYELESAIAN LAIN

Setelah  $kd$  dapat ditentukan, sebagai pengganti penghitungan  $I$ , maka prosedur yang diterangkan dari Gambar 5-23(d) dapat dipergunakan. Gaya resultante yang diperoleh dengan tegangan yang bekerja dengan cara "hidrostatika" pada sisi tekan dari balok haruslah diletakkan  $kd/3$  di bawah puncak balok tersebut. Selanjutnya, bila  $b$  adalah lebar balok, maka gaya resultante ini adalah  $C = \frac{1}{2}(\sigma_c)_{\max} b(kd)$  (tegangan rata-rata kali luas). Gaya tarik resultante  $T$  bekerja pada tengah-tengah baja dan adalah sama dengan  $A_s \sigma_s$ , di mana  $A_s$  adalah luas irisan penampang dari baja. Kemudian bila  $jd$  adalah jarak antara  $T$  dan  $C$ , dan karena  $T = C$ , maka momen terpakai  $M$  yang dilawan oleh sebuah kopel adalah sama dengan  $Tjd$  atau  $Cjd$ .

$$jd = d - kd/3 = 500 - (218/3) = 427 \text{ mm}$$

$$M = Cjd = \frac{1}{2} b(kd)(\sigma_c)_{\max}(jd)$$

$$(\sigma_c)_{\max} = \frac{2M}{b(kd)(jd)} = \frac{(2)(70)}{(0,25)(0,218)(0,427)} = 6,02 \text{ MPa}$$

$$M = T(jd) = A_s \sigma_s jd$$

$$\sigma_s = \frac{M}{A_s(jd)} = \frac{70}{(0,0014)(0,427)} = 117 \text{ MPa}$$

Pada hakekatnya kedua metoda di atas memberikan jawaban yang sama. Dalam penggunaan-penggunaan yang praktis metoda yang kedua adalah lebih baik. Oleh sebab baja dan beton mempunyai tegangan ijin yang berbeda, maka balok tersebut dikatakan mempunyai penguatan yang seimbang bila ia didisain sedemikian rupa hingga tegangan masing-masing berada pada tingkat tegangan ijin secara serempak. Perlu di-



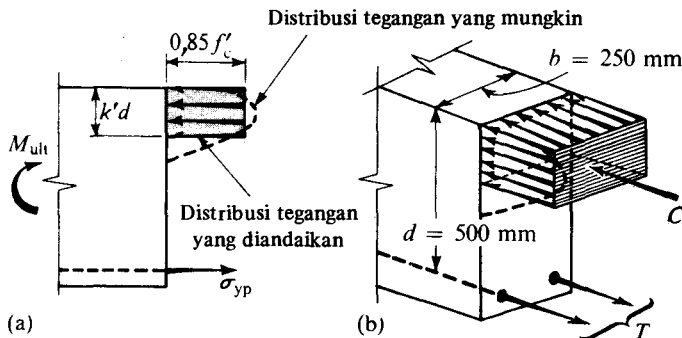
perhatikan bahwa balok yang dibicarakan ini sebenarnya menjadi tidak berharga bila momen lentur bekerja dalam arah berlawanan.

### CONTOH 5-11

Tentukanlah momen ultimat yang memuat kapasitas untuk balok beton bertulang dari contoh yang terdahulu. Anggaplah bahwa penguatan baja terjadi pada 275 MPa dan kekuatan ultimat beton  $f'_c = 20$  MPa.

### PENYELESAIAN

Bila penguatan baja mulai menghasilkan, maka terjadilah deformasi-deformasi yang besar. Ini diambil menjadi kapasitas ultimat dari baja: jadi  $T_{ult} = A_s \sigma_{yp}$ .



Gambar 5-24

Pada momen ultimat, bukti eksperimental menunjukkan bahwa tegangan-tegangan tekan dapat didekati dengan balok tegangan sikuempat yang terlihat dalam Gambar 5-24. Adalah biasa untuk menganggap tegangan rata-rata dalam balok tegangan tekan adalah  $0.85 f'_c$ . Berdasarkan ini, dengan mengingat bahwa  $T_{ult} = C_{ult}$ , kita memperoleh

$$T_{ult} = \sigma_{yp} A_s = 275 \times 10^3 \times 0.0014 = 385 \text{ kN}$$

$$k'd = \frac{C_{ult}}{0.85 f'_c b} = \frac{385}{0.85 \times 20 \times 10^3 \times 0.25} = 0.0906 \text{ m}$$

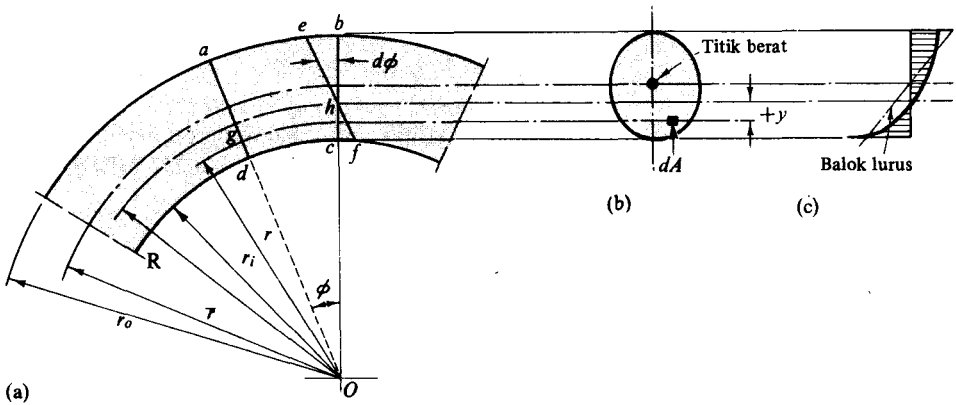
$$M_{ult} = T_{ult} \left( d - \frac{k'd}{2} \right) = 385 \left( 0.50 - \frac{0.0906}{2} \right) = 175 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

### \*5-11 BALOK LENGKUNG

Teori lenturan untuk batang-batang lengkung akan dikembangkan dalam pasal ini. Perhatian kita batasi pada balok yang mempunyai suatu sumbu simetri penampang di mana sumbu ini terletak dalam satu bidang disepanjang balok. Hanya keadaan elastis yang kita perhatikan,\* dengan syarat yang biasa di mana modulus elastis adalah sama antara gaya tarik dan tekan.

\* Untuk penelaahan batang lengkung yang plastis lihat umpamanya H.D. Conway, "Elastic-Plastic Bending of Curved Bars of Constant and Variable Thickness," *Journal of Applied Mechanics*, 27, no. 4 (Des. 1960), 733 - 34.

s = steel = baja; yp = yield point = titik luluh = titik leleh



Gambar 5-25 Batang lengkung yang melentur murni

Tinjau sebuah batang lengkung seperti yang diperlihatkan oleh Gambar-gambar 5-25(a) dan (b). Serat luar berada pada jarak  $r_o$  dari pusat lengkungan  $O$ . Serat pada permukaan sebelah dalam batang berjarak  $r_i$  dari titik  $O$ . Jarak dari  $O$  ke sumbu titik berat adalah  $\bar{r}$ . Pemecahan\* soal ini sekali lagi didasarkan kepada anggapan yang kita kenal: Irisan-irisan tegak lurus pada sumbu balok akan tetap berbentuk bidang datar setelah momen lentur  $M$  berlaku. Hal ini secara diagramatik dinyatakan oleh garis  $ef$  dalam hubungan dengan suatu elemen balok  $abcd$ . Elemen tersebut ditentukan oleh sudut pusat  $\phi$ .

Meskipun pengandaian deformasi dasar untuk balok lengkung adalah sama dengan balok lurus, dan dari hukum Hooke, tegangan normal  $\sigma = E\epsilon$ , tetapi kesukaran masih juga dijumpai. Panjang awal dari serat balok seperti  $gh$  adalah tergantung pada jarak  $r$  dari pusat lengkungan. Jadi meskipun deformasi total dari serat balok (digambarkan oleh sudut kecil  $d\phi$ ) mengikuti suatu hukum linier, tetapi regangan tidaklah demikian. Perpanjangan suatu serat umum  $gh$  adalah  $(R - r)d\phi$ ; di mana  $R$  adalah jarak dari titik  $O$  kepada permukaan netral (yang belum diketahui), sedang panjang awalnya adalah  $r\phi$ . Regangan  $\epsilon$  dari setiap serat tertentu adalah  $(R - r)(d\phi)/r\phi$  dan tegangan normal  $\sigma$  pada elemen luas penampang  $dA$  adalah

$$\sigma = E\epsilon = E \frac{(R - r) d\phi}{r\phi} \quad (5-13)$$

Untuk penggunaan selanjutnya perhatikan pula

$$\frac{\sigma r}{R - r} = \frac{E d\phi}{\phi} \quad (5-14)$$

\* Pemecahan secara pendekatan ini dikembangkan oleh E. Winkler pada tahun 1858. Penyelesaian yang eksak dari soal yang sama dengan metoda-metoda teori matematis dari kekenyalan dilakukan oleh M. Golovin yang dapat memecahkannya pada tahun 1881.

Persamaan 5-13 memberikan tegangan normal yang bekerja pada elemen luas penampang balok lengkung. Letak sumbu netral mengikuti syarat di mana penjumlahan gaya-gaya yang bekerja tegaklurus pada irisan haruslah sama dengan nol, yaitu

$$\sum F_n = 0, \quad \int_A \sigma dA = \int_A \frac{E(R-r) d\phi}{r\phi} dA = 0$$

Tetapi karena  $E$ ,  $R$ ,  $\phi$  dan  $d\phi$  adalah tetap pada setiap irisan suatu balok yang mengalami tegangan, maka besaran-besaran tersebut dapat dikeluarkan dari tanda integral hingga diperoleh penyelesaian untuk  $R$ . Jadi

$$\begin{aligned} \frac{E d\phi}{\phi} \int_A \frac{R-r}{r} dA &= \frac{E d\phi}{\phi} \left[ R \int_A \frac{dA}{r} - \int_A dA \right] = 0 \\ R &= \frac{A}{\int_A dA/r} \end{aligned} \quad (5-15)$$

di mana  $A$  adalah luas penampang balok dan  $R$  adalah letak sumbu netral. Perlu diperhatikan bahwa sumbu netral yang diperoleh tidaklah berimpit dengan sumbu titik berat. Ini berbeda dari keadaan yang diperoleh pada balok-balok elastis yang lurus.

Sekarang karena letak sumbu netral telah dapat diketahui, persamaan distribusi tegangan diperoleh dengan menyamakan momen luar dengan momen perlawanan dalam yang dibangun oleh tegangan yang diberikan oleh Persamaan 5-13. Penjumlahan momen-momen dilakukan sekitar sumbu  $z$  yang tegaklurus terhadap bidang gambar yang diperlihatkan dalam Gambar 5-25(a).

$$\sum M_z = 0, \quad M = \underbrace{\int_A \sigma dA}_{\text{(gaya)}} \underbrace{(R-r)}_{\text{(lengan)}} = \int_A \frac{E(R-r)^2 d\phi}{r\phi} dA$$

Sekali lagi diingatkan bahwa  $E$ ,  $R$ ,  $\phi$  dan  $d\phi$  adalah tetap pada suatu irisan, maka dengan menggunakan Persamaan 5-14 dan melakukan langkah-langkah aljabar yang ditunjukkan, diperoleh yang berikut :

$$\begin{aligned} M &= \frac{E d\phi}{\phi} \int_A \frac{(R-r)^2}{r} dA = \frac{\sigma r}{R-r} \int_A \frac{(R-r)^2}{r} dA \\ &= \frac{\sigma r}{R-r} \int_A \frac{R^2 - Rr - Rr + r^2}{r} dA \\ &= \frac{\sigma r}{R-r} \left[ R^2 \int_A \frac{dA}{r} - R \int_A dA - R \int_A dA + \int_A r dA \right] \end{aligned}$$

Di sini, karena  $R$  adalah suatu tetapan, maka kedua integral yang pertama menjadi nol seperti yang kita lihat dari ungkapan dalam tanda kurung yang muncul tepat sebelum

Persamaan 5-15. Integral yang ketiga adalah  $A$ , dan integral yang terakhir, per definisi, adalah  $\bar{r}A$ . Jadi

$$M = \frac{\sigma r}{R - r}(\bar{r}A - RA)$$

dari mana tegangan normal yang bekerja pada balok lengkung pada jarak  $r$  dari pusat lengkungan adalah

$$\sigma = \frac{M(R - r)}{rA(\bar{r} - R)} \quad (5-16)$$

Bila  $y$  yang positif diukur terhadap pusat lengkungan dari sumbu netral, dan  $\bar{r} - R = e$ , maka Persamaan 5-16 dapat ditulis dalam bentuk yang sangat mirip dengan rumus lenturan untuk balok lurus; yaitu

$$\sigma = \frac{My}{Ae(R - y)} \quad (5-17)$$

Persamaan-persamaan ini menunjukkan bahwa distribusi tegangan dalam batang lengkung mengikuti pola hiperbolik. Tegangan maksimum selalu pada bagian sebelah dalam (cekung) dari balok tersebut. Suatu perbandingan dari hasil ini dengan yang mengikuti rumus untuk balok lurus diperlihatkan pada Gambar 5-25(c). Terutama perhatikanlah bahwa pada balok lengkung, sumbu netral tertarik ke arah pusat lengkungan balok tersebut. Ini akibat tegangan-tegangan yang lebih tinggi yang terbentuk di bawah sumbu netral. Teori yang dikembangkan ini tentu hanya berlaku untuk distribusi tegangan yang elastis dan hanya kepada balok-balok yang melentur murni. Untuk pertimbangan keadaan di mana gaya aksial terdapat pula pada suatu irisan maka lihatlah Pasal 7-2.

#### CONTOH 5-12

Bandingkanlah tegangan-tegangan yang terdapat dalam batang berpenampang sikuempat ukuran 50 mm × 50 mm yang dihadapkan kepada kopel ujung dari 2083 N·m dalam tiga keadaan khusus: (a) balok lurus, (b) balok lengkung terhadap radius 250 mm sepanjang titik berat (yaitu  $\bar{r} = 250$  mm dari Gambar 5-26(a)) dan (c) balok lengkung dengan  $\bar{r} = 75$  mm.

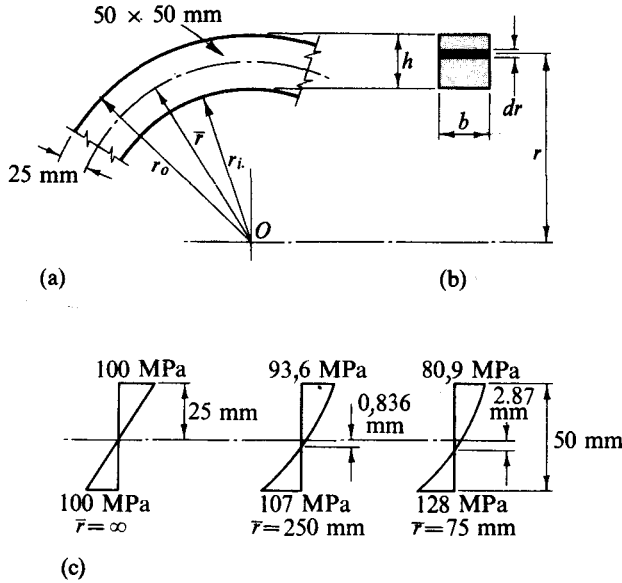
#### PENYELESAIAN

Keadaan (a) langsung mengikuti penggunaan persamaan-persamaan 5-6 dan 5-5 dalam orde itu.

$$S = \frac{bh^2}{6} = \frac{50(50)^2}{6} = 20,83 \times 10^3 \text{ mm}^3 = 20,83 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{S} = \frac{2083}{20,83 \times 10^{-6}} = \pm 100 \times 10^6 \text{ Pa} = \pm 100 \text{ MPa}$$

Hasil ini terlihat dalam Gambar 5-26(c).  $\bar{r} = \infty$  karena batang lurus mempunyai jari-jari lengkungan yang tidak berhingga.



Gambar 5-26

Untuk menyelesaikan bagian-bagian (b) dan (c) maka pertama-tama harus ditentukan letak sumbu netral. Ini diperoleh dalam bentuk yang umum dengan mengintegrasikan Persamaan 5-15. Untuk irisan sikuempat, daerah elementer diambil sebagai  $b \, dr$ , pada Gambar 5-26(b). Integrasi dilakukan antara batas-batas  $r_i$  dan  $r_o$ , masing-masing radius dalam dan luar.

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{A}{\int_A dA/r} = \frac{bh}{\int_{r_i}^{r_o} b \, dr/r} = \frac{h}{\int_{r_i}^{r_o} dr/r} \\
 &= \frac{h}{|\ln r|_{r_i}^{r_o}} = \frac{h}{\ln \left( \frac{r_o}{r_i} \right)} = \frac{h}{2,3026 \log \left( \frac{r_o}{r_i} \right)}
 \end{aligned} \tag{5-18}$$

di mana  $h$  adalah kedalaman dari irisan,  $\ln$  adalah logaritma natural dan  $\log$  adalah logaritma dengan basis 10 (logaritma biasa).

Untuk keadaan (b),  $h = 50 \, \text{mm}$ ,  $\bar{r} = 250 \, \text{mm}$ ,  $r_i = 225 \, \text{mm}$ , dan  $r_o = 275 \, \text{mm}$ . Penyelesaian diperoleh dengan mengevaluasi Persamaan-persamaan 5-18 dan 5-16. Tanda huruf  $i$  berkenaan dengan tegangan normal  $\sigma$  dari serat dalam; sedang tanda huruf  $o$  dengan serat luar.

$$R = \frac{50}{\ln(275/225)} = 249,164 \, \text{mm}$$

$$e = \bar{r} - R = 250 - 249,164 = 0,836 \, \text{mm}$$

$$\begin{aligned}\sigma_i &= \frac{M(R - r_i)}{r_i A(\bar{r} - R)} = \frac{(2083)(0,249\,164 - 0,225)}{(0,225)(0,0025)(0,000\,836)} \\ &= 107 \times 10^6 \text{ Pa} = 107 \text{ MPa} \\ \sigma_o &= \frac{M(R - r_o)}{r_o A(\bar{r} - R)} = \frac{(2083)(0,249\,164 - 0,275)}{(0,275)(0,0025)(0,000\,836)} \\ &= -93,6 \times 10^6 \text{ Pa} = -93,6 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Tanda negatif dari  $\sigma_o$  menunjukkan tegangan tekan. Besaran-besaran ini dan distribusi tegangan yang sesuai dapat dilihat pada Gambar 5-26(c);  $\bar{r} = 250 \text{ mm}$ .

Keadaan (c) dapat dihitung dengan cara yang sama. Di sini  $h = 50 \text{ mm}$ ,  $\bar{r} = 75 \text{ mm}$ ,  $r_i = 50 \text{ mm}$  dan  $r_o = 100 \text{ mm}$ . Hasil-hasil perhitungan dapat dilihat pada Gambar 5-26(c).

$$\begin{aligned}R &= \frac{50}{\ln(100/50)} = \frac{50}{\ln 2} = 72,13 \text{ mm} \\ e &= \bar{r} - R = 75 - 72,13 = 2,87 \text{ mm} \\ \sigma_i &= \frac{(2083)(0,022\,13)}{(0,05)(0,0025)(0,002\,87)} = 128 \times 10^6 \text{ Pa} = 128 \text{ MPa} \\ \sigma_o &= \frac{(2083)(-0,027\,87)}{(0,1)(0,0025)(0,002\,87)} = -80,9 \times 10^6 \text{ Pa} = -80,9 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Beberapa kesimpulan penting, yang pada umumnya adalah benar, dapat dicapai dari contoh di atas. Pertama, *rumus lenturan yang biasa adalah cukup baik untuk balok-balok yang amat melengkung*. Hanya 7 persen kesalahan yang terdapat pada tegangan maksimum yang terjadi dalam keadaan (b) untuk  $\bar{r}/h = 5$ , merupakan suatu kesalahan yang dapat dimaklumi dari kebanyakan pemakaian. Untuk perbandingan  $\bar{r}/h$  yang lebih besar, kesalahan ini berkurang. Begitu lengkungan balok bertambah besar, maka tegangan pada sisi yang cekung dengan cepat bertambah besar pula terhadap rumusan yang diberikan oleh lenturan yang biasa. Bila  $\bar{r}/h = 1,5$  maka kesalahan yang terjadi menjadi 28 persen. Kedua, evaluasi dari integral untuk  $R$  atas daerah luas penampang mungkin menjadi lebih rumit. Akhirnya, penghitungan-penghitungan  $R$  haruslah sangat teliti karena perbedaan antara  $R$  dengan besaran-besaran yang hampir sama secara numerik akan dipergunakan dalam rumus tegangan.

Kedua kesukaran yang terakhir mendorong pengembangan metoda-metoda penyelesaian yang lain. Salah satu metoda tersebut terdiri dari penguraian suku-suku tertentu dari jawaban ke dalam suatu deret,\* sedangkan metoda lainnya adalah membangun jawaban atas basis irisan transformasi khusus. Masih ada lagi pendekatan lain yang terdiri pengerjaan "yang berkebalikan". Balok lengkung dari berbagai penampang, lengkungan, dan momen terpakai telah ditelaah untuk memperoleh tegangan; kemudian besaran-besaran ini dibagi oleh tegangan lentur yang akan terdapat pada balok yang sama, *bila lurus*. Perbandingan-perbandingan ini kemudian disusun dalam tabel.† Tetapi

\* S. Timoshenko, *Strength of Materials* (3rd ed.), Part I, (Princeton, N.J.) D. Van Nostrand, 1955, hal. 369 dan hal. 373.

† Roark, R.J., *Formulas for Stress and Strain*. New York: McGraw-Hill, 1965, Fourth Edition, Tabel VII, halaman 165.

sebaliknya, bila yang diinginkan adalah tegangan dalam balok lengkung, maka diperoleh

$$\sigma = K \frac{Mc}{I} \quad (5-19)$$

di mana koefisien  $K$  diperoleh dari tabel atau grafik dan  $Mc/I$  dapat dihitung seperti pada rumus lenturan yang biasa.

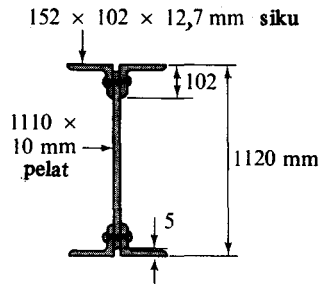
Untuk referensi yang akan datang dapat kita berikan sekarang ungkapan untuk jarak dari pusat lengkungan kepada sumbu netral dari balok melengkung berpenampang lingkaran, yaitu

$$R = \frac{\bar{r} + \sqrt{\bar{r}^2 - c^2}}{2} \quad (5-20)$$

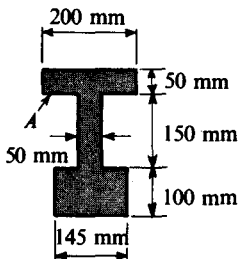
di mana  $\bar{r}$  adalah jarak dari pusat lengkungan ke titik berat dan  $c$  adalah radius daerah penampang lingkaran.

#### SOAL-SOAL UNTUK DISELESAIKAN

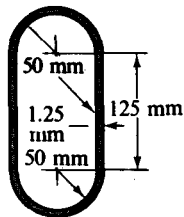
5-1 sampai 5-5. Untuk daerah-daerah luas penampang dengan ukuran-ukuran yang diperlihatkan dalam masing-masing gambar, tentukanlah momen inersia untuk masing-masing irisan terhadap sumbu titik berat horisontal. Sifat-sifat balok flens lebar, kanal dan siku yang terbuat dari baja yang terdapat pada soal-soal 5-3, 5-4 dan 5-5 berturut-turut dapat dilihat pada tabel-tabel 4, 5 dan 7 dari Lampiran. *Jawab:* Soal 5-3:  $4660 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .



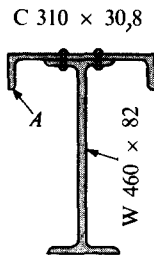
GAMBAR SOAL 5 - 3



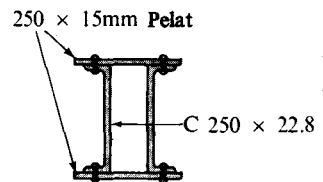
GAMBAR SOAL 5 - 1



GAMBAR  
SOAL 5 - 2



GAMBAR  
SOAL 5 - 4

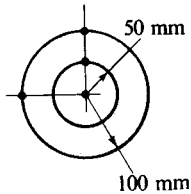


GAMBAR SOAL 5 - 5

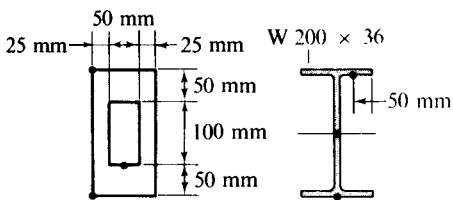
5-6 sampai 5-10. Balok yang ukuran-ukuran irisan penampangnya terlihat dalam gambar-gambar soal yang bersangkutan, masing-masing mendapat momen lentur positif sebesar 54000 N.m yang bekerja terhadap sumbu netral.

Untuk masing-masing keadaan tersebut, tentukanlah tegangan lentur yang bekerja pada masing-masing tiga daerah kecil takberhingga yang dalam gambar diperlihatkan sebagai titik-titik tebal. Sifat-sifat irisan flens lebar baja yang ter-

lihat dalam Gambar Soal 5-8 dapat diperoleh pada Tabel 4 dari Lampiran.

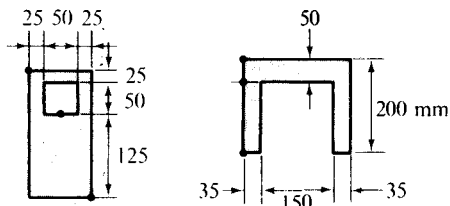


GAMBAR SOAL 5 - 6



GAMBAR  
SOAL 5 - 7

GAMBAR  
SOAL 5 - 8



GAMBAR  
SOAL 5 - 9

GAMBAR  
SOAL 5 - 10

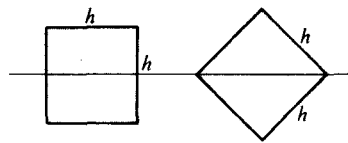
5-11. Turunkanlah modulus irisan yang diberikan dalam Lampiran untuk S 310 x 60,7; W 250 x 167 dan C 310 x 30,8.

5-12. Tentukanlah momen lentur ijin sebuah balok kayu sikuempat yang mempunyai penampang berukuran penuh 50 mm x 100 mm untuk suatu tegangan lentur ijin sebesar 8,4 MPa, (a) bila lenturan terjadi disekitar sumbu netral yang sejajar dengan sisi 50 mm, (b) bila lenturan terjadi sekitar sumbu netral yang sejajar dengan sisi yang 100 m. *Jawab:* (a) 701 N.m.

5-13. Bila momen lentur murni sebesar 30 kN.m mendapat perlawanan dari sebuah irisan

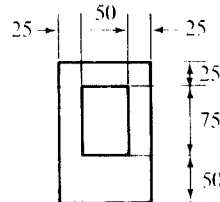
flens lebar tanpa melebihi tegangan 150 MPa, (a) berapakah ukuran irisan yang harus dipergunakan bila momen bekerja sekitar sumbu  $X-X$ , (b) sekitar sumbu  $Y-Y$ ?

5-14. Untuk suatu bahan elastis yang linier, pada tegangan maksimum yang sama untuk batang berpenampang bujursekar dalam dua macam posisi yang diperlihatkan oleh gambar, tentukanlah perbandingan momen lentur. Pelenturan terjadi sekitar sumbu horisontal. *Jawab:*  $\sqrt{2}$ .



GAMBAR SOAL 5 - 14

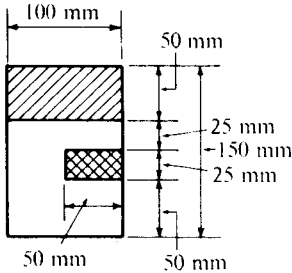
5-15. Onderdil mesin terbuat dari besi cor, dengan irisan seperti yang diperlihatkan oleh gambar, bekerja sebagai sebuah balok yang melawan momen lentur positif. Bila tegangan tarik ijin adalah 20 MPa sedang tegangan tekan ijin adalah 80 Mpa, berapakah besar momen yang dapat dikenakan kepada balok tersebut?



GAMBAR SOAL 5 - 15

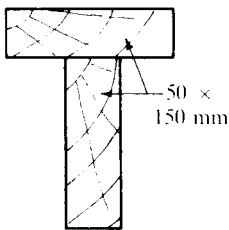
5-16. Sebuah balok yang mempunyai penampang padat sikuempat dengan ukuran-ukuran yang terlihat dalam gambar, dihadapkan kepada suatu momen lentur positif sebesar 16.000 N.m yang bekerja sekitar sumbu horisontal. (a). Hitunglah gaya tekan yang bekerja pada daerah luas yang bergaris dari penampang yang dibentuk oleh tegangan lentur. (b) Hitunglah gaya tarik yang bekerja pada daerah penampang yang bergaris-garis silang.





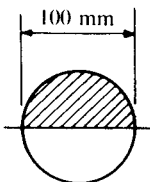
GAMBAR SOAL 5 – 16

5-17. Dua buah papan kayu berukuran lengkap dengan penampang  $50 \text{ mm} \times 150 \text{ mm}$ , direkat menjadi satu membentuk irisan  $T$  seperti yang terlihat dalam gambar. Bila kepada balok tersebut bekerja momen lentur positif sebesar  $3100 \text{ N}\cdot\text{m}$  sekitar sumbu horizontal, (a) tentukanlah tegangan pada serat-serat terjauh ( $I = 53,1 \times 10^6 \text{ mm}^4$ ), (b) hitunglah gaya tekan total yang dibentuk oleh tegangan normal di atas sumbu netral yang disebabkan oleh lenturan balok, (c) tentukanlah gaya total yang disebabkan oleh tegangan lentur tarik pada suatu irisan dan bandingkanlah dengan hasil yang diperoleh pada (b).



GAMBAR SOAL 5 – 17

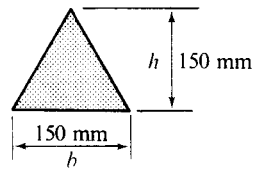
5-18.\* Dengan menggunakan integrasi, tentukanlah gaya yang dibentuk oleh tegangan lentur dan posisinya yang bekerja pada daerah bergaris pada irisan penampang balok yang terlihat da-



GAMBAR SOAL 5 – 18

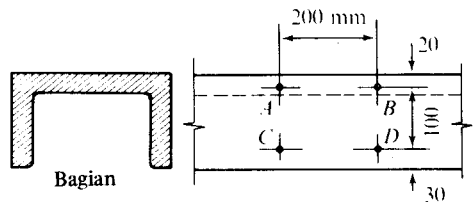
lam gambar bila balok tersebut mendapat momen lentur negatif sebesar  $3500 \text{ N}\cdot\text{m}$  yang bekerja sekitar sumbu horizontal.

\*5-19. Sebuah balok berpenampang segitiga samakaki seperti yang terlihat dalam gambar dihadapkan kepada momen lentur negatif sebesar  $4.000 \text{ N}\cdot\text{m}$  sekitar sumbu horizontal. Buktikanlah dengan menggunakan integrasi bahwa  $I_o = bh^3/36$ . Tentukanlah letak dan besar resultan gaya tarik dan gaya tekan yang bekerja pada suatu irisan.



GAMBAR SOAL 5 – 19

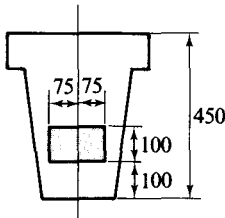
5-20. Sebuah bagian konstruksi terbuat dari besi cor abu-abu yang berbentuk kanal, sebagai yang terlihat dalam gambar, bekerja sebagai balok horizontal dalam sebuah mesin. Bila gaya-gaya vertikal bekerja pada bagian konstruksi ini maka jarak  $AB$  bertambah dengan  $0,020 \text{ mm}$  dan jarak  $CD$  berkurang dengan  $0,180 \text{ mm}$ . Bagaimana sikap momen terpakai tersebut dan berapakah tegangan normal yang terjadi dalam serat-serat yang terjauh?  $E = 100 \text{ GPa}$ .



GAMBAR SOAL 5 – 20

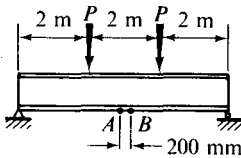
5-21. Sebuah balok baja padat yang ukuran-ukuran penampangnya sebagian terlihat dalam gambar dibebani dalam laboratorium pelenturan murni. Pelenturan tersebut terjadi disekitar sumbu horizontal netral. Pengukuran-pengukuran regangan memperlihatkan bahwa serat-serat atas menyusut sebesar  $0,0003 \text{ m/m}$  secara longitudinal, sedang serat bawah memanjang sebesar  $0,0006 \text{ m/m}$  juga secara longitudinal. Tentukanlah gaya normal total yang

bekerja pada daerah gelap yang ditunjukkan oleh gambar, pada saat pengukuran regangan tengah dilakukan.  $E = 200.000 \text{ MN/m}^2$ . Semua ukuran dalam mm. *Jawab:* 900 kN.



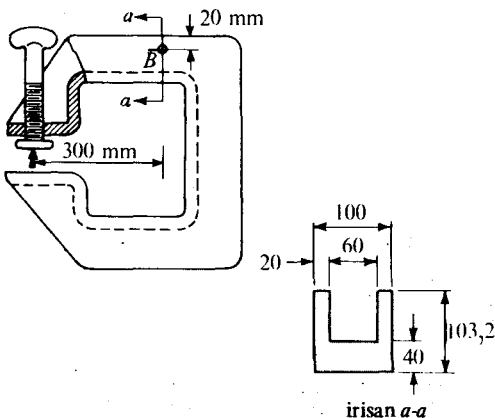
GAMBAR SOAL 5 – 21

5-22. Bila kedua gaya terpusat diberikan kepada balok baja W 460  $\times$  82 seperti yang terlihat dalam gambar, maka suatu pemuaian panjang sebesar 0,12 mm dapat diamati antara titik-titik ukur *A* dan *B*. Berapakah besar gaya-gaya terpakai tersebut?  $E = 200 \text{ GPa}$ .



GAMBAR SOAL 5 – 22

5-23. Bila sekrup dari sebuah pengapit *C* baja yang besar, seperti yang diperlihatkan dalam gambar, dikencangkan ke bawah kepada sebuah benda, maka regangan dalam arah horisontal

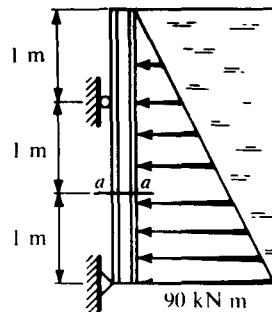
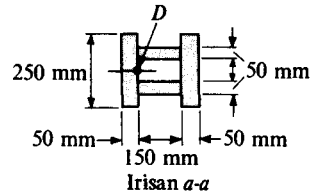


GAMBAR SOAL 5 – 23

akibat pelenturan hanya terukur oleh suatu regangan ukur pada titik *B*. Bila regangan tersebut adalah  $900 \times 10^{-6} \text{ m/m}$ , maka berapakah besar beban pada sekrup yang sesuai dengan harga regangan yang diamati tersebut? Ambillah  $E = 200 \text{ GPa}$ .

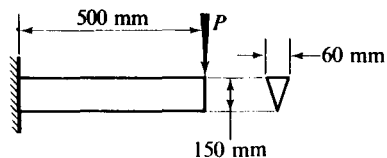
5-24. Pada Contoh 5-4, balikkanlah arah gaya terpusat dan hitunglah tegangan lentur maksimum dalam balok pada ujung yang terpasang bila  $L = 2,5 \text{ m}$ . *Jawab:*  $6,54 \text{ MN/m}^2$ .

5-25. Pada sebuah bendungan kecil, sebuah balok vertikal yang khas mengalami pembebanan hidrostatik sebagai yang terlihat dalam gambar. Tentukanlah tegangan pada titik *D* dari irisan *a-a* akibat momen lentur. *Jawab:* 7,29 MPa.



GAMBAR SOAL 5 – 25

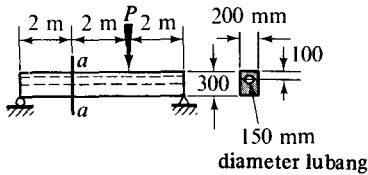
5-26. Hitunglah tegangan lentur maksimum pada sebuah irisan yang letaknya 250 mm dari tumpuan balok kantilever yang berbeban se-



GAMBAR SOAL 5 – 26

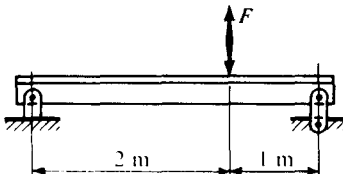
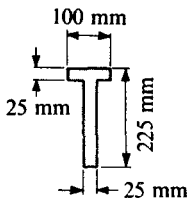
perti yang terlihat dalam gambar. Tunjukkan hasilnya pada suatu elemen terpisah sepanjang balok tersebut. Berat balok tersebut kira-kira 350 N/m panjangnya dan  $P = 450$  N. *Jawab:* 2,18 MPa.

5-27. Pada irisan  $a-a$  dari balok yang dibebani sebagai terlihat dalam gambar, hitunglah: (a) tegangan normal maksimum; (b) tegangan normal di tengah-tengah antara serat-serat atas dan bawah. Berat balok 3 kN/m dan  $P = 10$  kN.



GAMBAR SOAL 5 - 27

5-28. Sebuah balok  $T$  yang diperlihatkan oleh gambar, terbuat dari suatu bahan yang dapat diidealisasikan, mempunyai batas banding tarik sebesar 20.000 kN/m<sup>2</sup> dan batas banding tekan sebesar 40.000 kN/m<sup>2</sup>. Dengan faktor keamanan  $1\frac{1}{2}$  pada proses awal, hitunglah besar gaya terbesar  $F$  yang dapat bekerja pada balok tersebut dengan arah ke bawah maupun ke atas. Dasar jawaban hanya pada perhatian tegangan lentur maksimum oleh gaya  $F$ . *Jawab:* 5,51 kN.

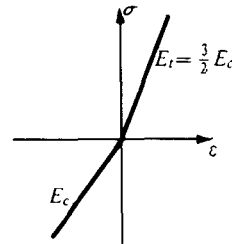


GAMBAR SOAL 5 - 28

5-29. Buktikanlah bahwa tegangan lentur maksimum untuk balok berpenampang sikuempat

adalah  $\sigma_{\max} = (Mc/I)[(2n + 1)/(3n)]$  bila sebagai pengganti hukum Hooke, hubungan tegangan-regangan adalah  $\sigma^n = E\epsilon$ , di mana  $n$  adalah suatu bilangan yang tergantung pada sifat-sifat bahan.

\*5-30. Sebuah balok berpenampang sikuempat, ukuran 150 mm  $\times$  300 mm mengalami momen lentur positif sebesar 240.000 N·m sekitar sumbu "kuat". Bahan balok tersebut adalah anisotropik dan di mana modulus elastisitas tarik adalah  $1\frac{1}{2}$  kali lebih besar dari tekan; lihat gambar. Bila tegangan-tegangan tidak melebihi batas banding, hitunglah tegangan-tegangan tarik dan tekan maksimum dalam balok.



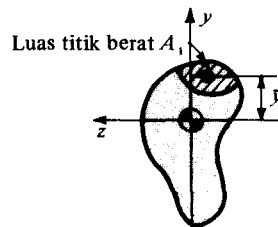
GAMBAR SOAL 5 - 30

5-31. Tinjaulah sebuah balok elastis linier yang mengalami momen lentur  $M$  sekitar salah satu sumbu utamanya untuk mana momen inersia penampang terhadap sumbu tersebut adalah  $I$ . Buktikanlah bahwa untuk balok seperti itu gaya normal  $F$  yang bekerja pada setiap bagian dari daerah penampang  $A_1$  adalah

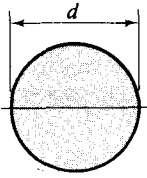
$$F = MQ/I$$

di mana  $Q = \int_{A_1} y dA = \bar{y}A_1$

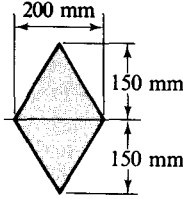
dan  $\bar{y}$  adalah jarak dari sumbu netral penampang kepada titik berat daerah  $A_1$ , seperti yang terlihat dalam gambar.



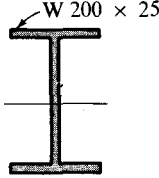
GAMBAR SOAL 5 - 31



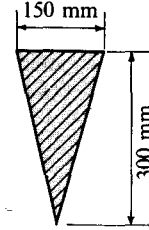
GAMBAR  
SOAL 5 - 32



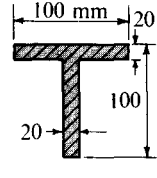
GAMBAR  
SOAL 5 - 33



GAMBAR  
SOAL 5 - 34



GAMBAR  
SOAL 5 - 35



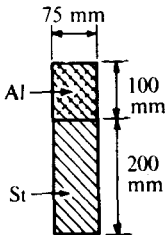
GAMBAR  
SOAL 5 - 36

5-32 sampai 5-36. Hitunglah perbandingan  $M_{ult}/M_{yp}$  untuk balok-balok baja lunak yang melawan lenturan sekitar sumbu-sumbu horizontal dan mempunyai ukuran-ukuran penampang yang terlihat dalam gambar-gambar soal yang bersangkutan. Anggaplah diagram tegangan-regangan ideal seperti yang dipergunakan pada Contoh 5-6. *Jawab: Soal 5-32: 1,7, Soal 5-34: 1,11.*

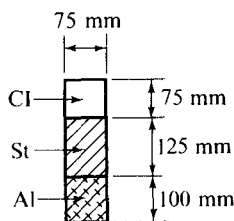
5-37 sampai 5-39. Balok-balok gabungan yang mempunyai ukuran-ukuran penampang yang terlihat dalam gambar-gambar soal yang bersangkutan, masing-masing mengalami momen lentur positif 80 kN.m. Bahan-bahan dipasang

bersama hingga baik-balok tersebut bekerja sebagai satu kesatuan. Tentukanlah tegangan lentur maksimum pada masing-masing bahan.  $E_{St} = 200.000 \text{ MN/m}^2$ ;  $E_{Al} = 70.000 \text{ MN/m}^2$ ;  $E_{Ci} = 105.000 \text{ MN/m}^2$ . (Kunci untuk Soal 5-39; untuk ellips dengan sumbu-sumbu utama  $a$  dan  $b$ ,  $I = \pi ab^3/4$  sekitar sumbu titik berat panjang).

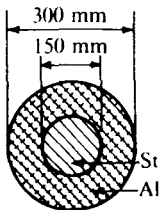
5-40 dan 5-41. Tentukanlah momen lentur ijin sekitar sumbu-sumbu netral horizontal untuk balok-balok gabungan terbuat dari kayu dan baja yang ukuran-ukuran penampangnya terlihat dalam gambar-gambar soal yang bersangkutan. Bahan-bahan dipasang bersama hingga mereka bekerja sebagai satu kesatuan.  $E_{St} = 200 \text{ GPa}$ ;  $E_w = 8,3 \text{ GPa}$ . Tegangan-tegangan lentur ijin adalah  $\sigma_{St} = 140 \text{ Mpa}$  dan  $\sigma_w = 8,3 \text{ MPa}$ .



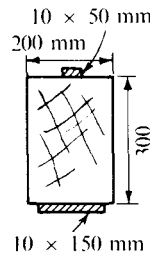
GAMBAR  
SOAL 5 - 37



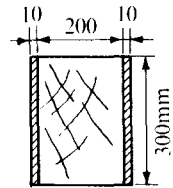
GAMBAR  
SOAL 5 - 38



GAMBAR SOAL 5 - 39

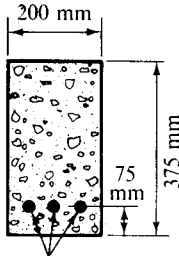


GAMBAR  
SOAL 5 - 40



GAMBAR  
SOAL 5 - 41

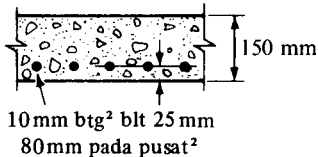
5-42. Sebuah balok beton bertulang yang mempunyai penampang sebagai yang terlihat dalam gambar mengalami momen lentur positif sebesar 11.000 N.m. Tentukanlah tegangan tekan maksimum dalam beton dan tegangan maksimum dalam baja. Anggaplah  $n = 45$ .



batang-batang bulat 3 – 22 mm

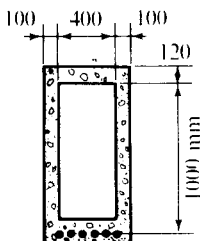
GAMBAR SOAL 5 – 42

5-43. Sebuah papan beton tebal 150 mm diperkuat secara longitudinal dengan batang-batang baja seperti yang terlihat dalam gambar. Tentukanlah momen lentur ijin per satu meter lebar papan ini. Anggaplah  $n = 12$  dan tegangan-tegangan ijin untuk baja dan beton masing-masing adalah  $150 \text{ MN/m}^2$  dan  $8 \text{ MN/m}^2$ .  
Jawab:  $16,3 \text{ kN}\cdot\text{m/m}$ .



GAMBAR SOAL 5 – 43

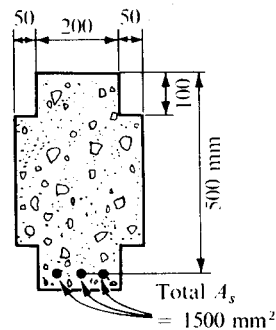
5-44. Sebuah irisan dari balok beton bertulang berongga sikuempat dibuat seperti yang terlihat dalam gambar. Luas baja dalam pengaruh



GAMBAR SOAL 5 – 44

gaya tarik adalah  $3600 \text{ mm}^2$ , dan  $n = 10$ . Bila tegangan tekan maksimum dalam beton akibat pelenturan diketahui adalah  $7 \text{ MN/m}^2$ , berapakah tegangan dalam baja dan berapa momen lentur yang bekerja pada irisan tersebut ?

5-45. Sebuah balok mempunyai penampang seperti yang diperlihatkan dalam gambar, dan diberikan momen lentur positif yang mengakibatkan tegangan tarik dalam baja sebesar  $140 \text{ MN/m}^2$ . Bila  $n = 12$ , berapakah harga momen lentur.



GAMBAR SOAL 5 – 45

5-46. Kerjakan kembali Contoh 5-12 dengan mengganti  $h$  dengan 100 mm. Jawab: (c) +  $48,1 \text{ MN/m}^2$ .

5-47. Turunkanlah Persamaan 5-20.

5-48. Berapakah momen lentur terbesar yang mungkin diberikan kepada sebuah batang lengkung, seperti yang terlihat dalam Gambar 5-25(a), dengan  $\bar{r} = 100 \text{ mm}$ , bila batang tersebut mempunyai daerah penampang lingkaran dengan diameter 60 mm dan tegangan ijin sebesar  $70 \text{ MPa}$  ?



# 6 Tegangan Geser dalam Balok

## 6-1 PENDAHULUAN

Telah diperlihatkan dalam Bab. 4 bahwa dalam suatu persoalan planar ketiga elemen sistem gaya dapat diperlukan pada sebuah irisan balok untuk mempertahankan segmen dalam keseimbangan. Ketiga elemen ini adalah gaya aksial, gaya geser dan momen lentur. Tegangan yang disebabkan oleh gaya aksial telah kita pelajari dalam Bab 1. Dalam Bab 5 hakekat dari tegangan yang disebabkan oleh momen lentur dalam sebuah balok telah pula kita bahas. Kemudian tegangan dalam balok yang disebabkan oleh tegangan geser akan kita pelajari dalam bab ini.

Dalam pembahasan yang lalu mengenai distribusi tegangan dalam sebuah bagian konstruksi, rentetan alasan yang sama telah kita lakukan. Pertama, suatu distribusi regangan diandaikan berlaku untuk irisan; berikutnya, sifat-sifat bahan telah dibawa masuk ke dalam hubungan regangan dengan tegangan; dan akhirnya persamaan-persamaan keseimbangan telah digunakan untuk memantapkan hubungan yang dikehendaki. Tetapi, perkembangan ungkapan yang menghubungkan gaya geser dan daerah luas penampang balok dengan tegangan menempuh jalan yang berbeda. Prosedur yang dilukiskan di atas tidak dapat dilakukan, jadi tidak ada pengandaian sederhana yang dapat kita buat untuk distribusi regangan yang disebabkan oleh gaya geser. Sebagai gantinya, kita gunakan suatu pendekatan tidak langsung. *Distribusi tegangan akibat lenturan, seperti diterangkan dalam bab terdahulu, bersama-sama dengan syarat-syarat keseimbangan, diandaikan dapat menyelesaikan persoalan tegangan geser.*

Pertama-tama adalah penting untuk menetapkan bahwa tegangan geser berhubungan secara **tidak terpisah** dengan *perubahan* momen lentur pada irisan-irisan yang bersebelahan\* pada balok. Jadi bila geseran dan momen lentur terdapat dalam satu irisan

\* Irisan-irisan bersebelahan adalah irisan yang sejajar diambil tegaklurus terhadap sumbu balok yang jarak sesamanya kecil.

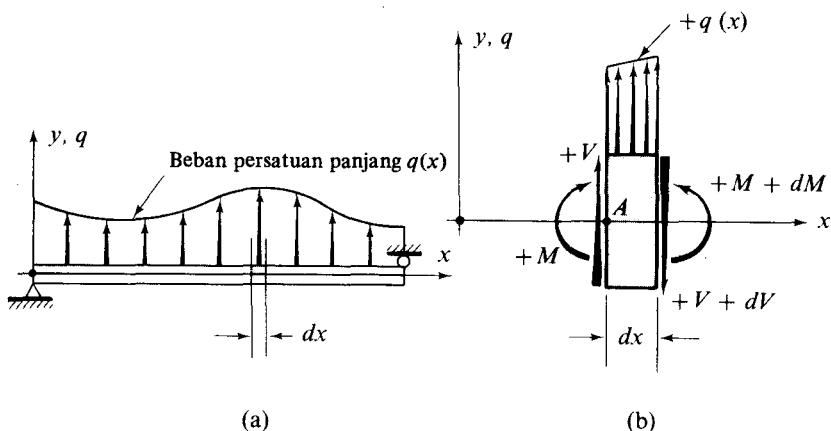
pada balok, maka akan diperlihatkan bahwa suatu momen lentur yang *berlainan* akan terjadi pada irisan yang bersebelahan, meskipun gaya geser masih konstan. Ini akan menuju kepada penetapan tegangan geser pada bidang-bidang membujur khayal melalui batang yang sejajar dengan sumbunya. Akhirnya, karena tegangan geser yang sama terjadi pada bidang-bidang yang saling tegak lurus, maka tegangan geser yang arahnya berimpit dengan gaya geser akan dapat ditentukan.

Dalam bab ini penyelidikan mengenai tegangan akan terbatas pada balok lurus. Penelaahan tegangan geser untuk balok lengkung berada di luar buku ini. Pada permulaan bab ini yang akan kita tinjau hanyalah balok-balok yang dianggap mempunyai penampang simetris sedang gaya-gaya terpakai dianggap pula bekerja dalam bidang-bidang yang mengandung sumbu simetri dan sumbu balok. Suatu ilustrasi tentang distribusi tegangan geser dalam balok elastis-plastis akan kita berikan pula. Untuk tambahan kepada tegangan geser, akan kita tinjau pula soal yang berhubungan dengan syarat-syarat penggabungan untuk mengikat bersama beberapa elemen-elemen longitudinal yang membangun balok-balok tersebut.

## 6-2 HUBUNGAN ANTARA GESER DAN MOMEN LENTUR

Pertama-tama kita haruslah menetapkan lebih dahulu interaksi yang terdapat antara momen lentur dan gaya geser. Kemudian barulah kita menuju kepada penetapan ungkapan untuk tegangan geser tersebut dalam balok.

Tinjaulah suatu elemen sepanjang  $dx$ , isolasikanlah dari balok dengan dua irisan berdampingan yang diambil tegak lurus terhadap sumbu balok. Elemen tersebut diperlihatkan sebagai sebuah benda bebas dalam Gambar 6-1. Pada irisan tersebut gaya-gaya geser dan momen lentur bekerja pada elemen sebagai yang ditunjukkan dalam gambar tersebut. Unsur-unsur sistem gaya ini diperlihatkan dengan *sikap* yang positif (untuk perjanjian tanda lihatlah Gambar-gambar 4-15 dan 4-17). Lebih lanjut karena geser dan momen lentur masing-masing dapat berubah dari irisan yang satu ke irisan yang berikutnya, maka pada permukaan elemen yang sebelah kanan mereka berturut-turut dapat di-



Gambar 6-1 Balok dan sebuah elemen yang dipotong oleh dua irisan berdampingan berjarak  $dx$ .



nyatakan sebagai  $V + dV$  dan  $M + dM$ . Gaya-gaya aksial tidak kita masukkan di sini karena soal yang kita tinjau di sini tidak mengandung gaya-gaya ini.

Beban terdistribusi  $q(x)$  yang bekerja pada balok dan elemen ditinjau *positif* bila bekerja dalam arah *ke atas*. Ukuran-ukuran beban ini adalah gaya per satuan panjang (N/m atau kN/m). Arah positif yang dipilih untuk beban terpakai ini mengakibatkan hubungan diferensial yang positif yang baik digunakan dalam tugas yang menyusul (Bab-bab 10 dan 11). Tetapi, untuk beban-beban yang mengarah ke bawah, seperti berat balok itu sendiri,  $w_0$ , maka beban-beban seperti ini kita nyatakan dengan tanda negatif, yaitu  $q = -w_0$ .

Unsur dari balok yang diperlihatkan dalam Gambar 6-1 haruslah berada dalam keseimbangan. Jadi penjumlahan momen sekitar sumbu yang melalui titik  $A$  yang tegak-lurus terhadap bidang gambar haruslah nol, yaitu  $\Sigma M_A = 0$ . Dengan memperhatikan bahwa dari titik  $A$  lengan gaya yang terdistribusi adalah  $dx/2$ , maka

$$\Sigma M_A = 0 \quad \text{atau} \quad (M + dM) - M - (V + dV) dx + q dx \frac{dx}{2} = 0$$

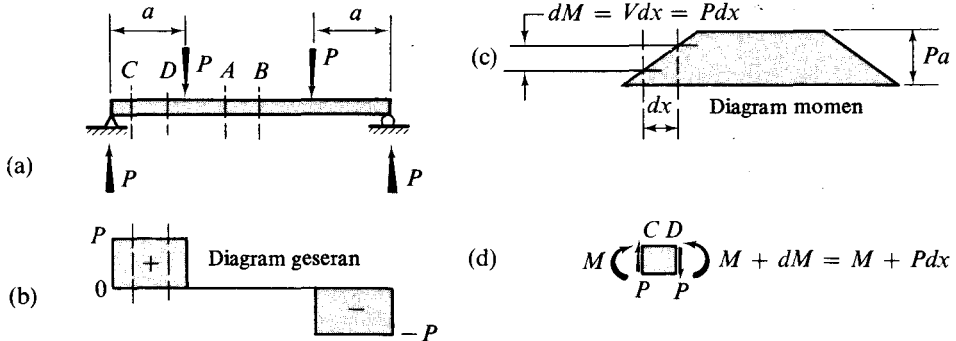
Dengan menyederhanakan dan mengabaikan\* ketakberhinggaan kecil dari tingkat yang lebih tinggi, maka kita dapat mengurangi ini menjadi  $dM - V dx = 0$ . Jadi

$$dM = V dx \quad \text{atau} \quad \frac{dM}{dx} = V \quad (6-1)$$

Persamaan 6-1 berarti bahwa bila suatu geser bekerja pada sebuah irisan, maka akan ada *perbedaan* momen lentur pada irisan yang berdampingan. Jika terdapat geser, maka perbedaan antara momen lentur pada irisan-irisan yang berdampingan adalah sama dengan  $V dx$ . Bila tidak ada geser yang bekerja pada irisan-irisan berdampingan pada balok, *maka tidak akan terjadi perbedaan momen lentur*. Sebaliknya, harga rata-rata perubahan momen lentur di sepanjang balok adalah sama dengan geser. Jadi meskipun dalam bab ini geser diperlakukan sebagai tindakan yang bebas pada sebuah balok, ia berhubungan secara *tidak terpisah* dengan perubahan momen lentur sepanjang panjang balok.

Sebagai ilustrasi dari arti Persamaan 6-1, soal yang telah kita bahas dalam Contoh 4-5 untuk mana diagram geser dan momen lentur ditetapkan, akan kita kerjakan lagi dalam Gambar 6-2. Momen lentur adalah sama pada setiap dua irisan. Seperti  $A$  dan  $B$  yang diambil sembarang pada balok di antara gaya-gaya terpakai  $P$ . Pada irisan-irisan tersebut *tidak ada gaya geser* yang bekerja. Dipihak lain, antara setiap dua irisan seperti  $C$  dan  $D$  yang berada dekat dengan tumpuan, suatu perubahan momen lentur dapat terjadi. Hingga pada irisan-irisan ini ada gaya geser yang bekerja. Gaya-gaya geser ini yang bekerja pada sebuah elemen balok diperlihatkan dalam Gambar 6-2(d). Perhatikanlah bahwa dalam daerah balok ini *perubahan* momen lentur dalam jarak  $dx$  adalah  $P dx$

\* Ini bukan merupakan suatu pendekatan. Jadi, tinjaulah sebuah elemen balok sepanjang  $\Delta x$ , sebagai pengganti  $dx$ . Kemudian semua besaran yang terdapat pada permukaan yang berdampingan akan berubah sebesar  $\Delta$ . Dengan menjumlahkan momen-momen disekitar ujung sebelah kanan dan dengan menyederhanakan hasil-hasilnya,  $\Delta M/\Delta x = V + q(x)\Delta x/2$  dan oleh definisi,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta M/\Delta x \equiv dM/dx = V$ . Beban terpakai  $q(x)$  dapat berubah-ubah sepanjang selang yang ditinjau.

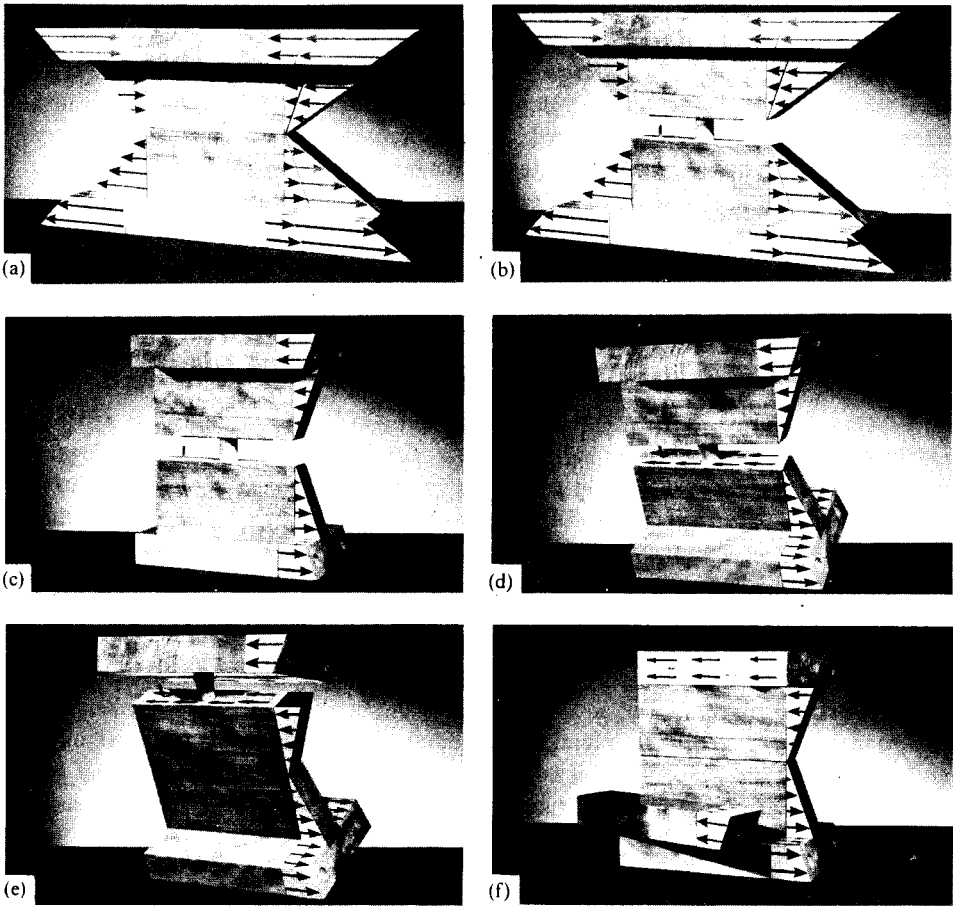


**Gambar 6-2** Diagram hubungan antara geser dan momen lentur untuk pembebanan yang diperlihatkan.

di mana geser  $V$  sama dengan  $P$ . Kecepatan perubahan momen lentur sepanjang balok,  $dM/dx$ , adalah sama dengan gaya geser dan dinyatakan oleh kemiringan diagram momen. Untuk pembahasan yang berikut haruslah dapat kita sadari kemungkinan adanya momen-momen lentur, baik yang sama maupun yang berbeda pada irisan-irisan yang berdampingan pada balok.

Sebelum suatu penelaahan yang terperinci diberikan, suatu pengkajian serangkaian gambar foto dari suatu model (Gambar 6-3) dapat memberikan pertolongan. Model tersebut menggambarkan sebuah segmen dari balok I. Dalam Gambar 6-3(a), sebagai tambahan kepada balok itu sendiri, dapat kita lihat balok-balok yang menirukan distribusi tegangan yang disebabkan oleh momen lentur. Momen yang berada di sebelah kanan dianggap lebih besar dari yang sebelah kiri. Sistem gaya-gaya ini yang berada dalam keseimbangan memberikan gaya geser vertikal  $V$  (tidak terlihat dalam gambar ini) bekerja pula pada segmen balok tersebut. Dengan memisahkan model tersebut sepanjang permukaan netral, kita peroleh dua bagian segmen balok yang terpisah seperti dalam Gambar 6-3(b). Masing-masing bagian-bagian ini lagi-lagi haruslah pula berada dalam keseimbangan.

Bila segmen-segmen atas dan bawah dari Gambar 6-3(b) dihubungkan oleh pasak atau baut dalam balok yang sesungguhnya, maka gaya-gaya aksial pada bagian-bagian atas atau bawah yang disebabkan oleh tegangan-tegangan momen lentur haruslah dijaga dalam keseimbangan oleh suatu gaya pada pasak. Gaya yang harus dilawan tersebut dapat diketahui dengan menjumlahkan gaya-gaya dalam arah aksial yang disebabkan oleh tegangan-tegangan lentur. Dalam melaksanakan perhitungan-perhitungan demikian, kita dapat menggunakan bagian atas atau pun bawah dari segmen balok. Gaya horisontal yang diteruskan oleh pasak adalah gaya yang dibutuhkan untuk mengimbangi gaya bersih yang disebabkan oleh tegangan lentur yang bekerja pada kedua irisan yang berdampingan. Cara yang lain adalah dengan mengurangi tegangan lentur yang sama pada kedua ujung segmen, maka kita dapat pula memperoleh hasil-hasil yang sama. Ini diperlihatkan secara skematis dalam Gambar 6-3(c), di mana dengan menganggap momen lentur adalah nol di sebelah kiri, maka yang perlu diperlihatkan pada sebelah



**Gambar 6-3** Model aliran geser dari balok I. (a) Segmen balok dengan tegangan lentur yang diperlihatkan oleh blok-blok. (b) Gaya geser yang diteruskan oleh pasak. (c) Untuk menentukan gaya pada pasak hanya membutuhkan perubahan momen. (d) Gaya geser dibagi luas potongan menghasilkan tegangan geser. (e) Pemotongan horisontal di bawah flens untuk menentukan tegangan geser. (f) Pemotongan vertikal melalui flens untuk menentukan tegangan geser.

kanan hanyalah tegangan normal yang disebabkan oleh kenaikan momen di dalam segmen.

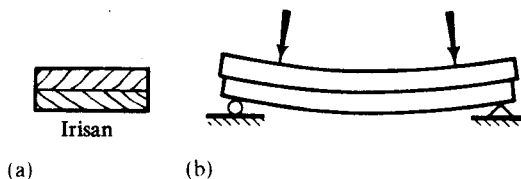
Bila mula-mula balok I ditinjau sebagai sepotong balok yang tidak membutuhkan baut atau pasak, maka suatu bidang khayal dapat dipergunakan untuk memisahkan segmen balok menjadi dua bagian, seperti Gambar 6-3(d). Seperti sebelumnya, kita dapat menentukan gaya bersih yang harus dibentuk dalam daerah potongan untuk mem-

pertahankan keseimbangan. Dengan membagi gaya ini dengan luas potongan horisontal khayal maka akan kita peroleh tegangan geser rata-rata yang bekerja pada bidang ini. Dalam analisa ini sekali lagi adalah berguna untuk bekerja dengan perubahan momen lentur daripada momen total pada irisan-irisan yang di pinggir.

Setelah kita dapatkan tegangan geser pada salah satu bidang (yaitu bidang horisontal dalam Gambar 6-3(d)), maka tegangan geser pada bidang-bidang yang saling tegak-lurus dari elemen kecil takberhingga dapat pula kita ketahui karena tegangan-tegangan tersebut haruslah sama secara numerik. Pendekatan ini menentukan tegangan geser dalam bidang irisan balok yang diambil tegaklurus terhadap sumbunya.

Proses yang kita bahas di atas agak bersifat umum; dua ilustrasi tambahan terhadap pemisahan segmen balok adalah pada Gambar-gambar 6-3(e) dan (f). Pada Gambar 6-3(e) bidang horisontal khayal memisahkan balok tepat di bawah flens. Baik bagian atas maupun bagian bawah dari balok ini dapat kita gunakan untuk menghitung tegangan geser pada potongan. Bidang vertikal khayal yang memotong bagian dari flens terdapat dalam Gambar 6-3(f). Ini membolehkan penghitungan tegangan geser terletak dalam suatu bidang vertikal dalam gambar tersebut.

Sebelum akhirnya kita meneruskan pembentukan persamaan-persamaan untuk menentukan tegangan geser yang berhubungan dengan baut dan balok, maka ada gunanya untuk mencatat sebuah contoh yang dapat diterangkan secara berdasarkan intuisi. Tinjaulah sebuah papan kayu yang diletakkan di atas papan lainnya sebagai yang terlihat dalam Gambar-gambar 6-4(a) dan (b). Bila papan-papan ini bekerja sebagai balok dan tidak saling dihubungkan, maka terjadi pergeseran antara permukaan kedua papan yang bersentuhan. Kecenderungan bergeser ini dapat kita lukiskan dengan meninjau kedua papan yang dibebani seperti yang terlihat dalam Gambar 6-4(b). Karena itu perlu kita menghubungkan papan-papan ini dengan paku atau lem agar mereka dapat bekerja sebagai sebuah balok secara terpadu. Dalam bab yang berikut akan kita turunkan suatu persamaan untuk menentukan interaksi yang dibutuhkan antara bagian-bagian komponen balok untuk menjadikan mereka bekerja sebagai satu kesatuan. Dalam pasal yang menyusul persamaan ini akan dimodifikasikan untuk menghasilkan tegangan geser dalam balok padat semula.



**Gambar 6-4** Papan-papan terpisah tanpa dieratkan sesamanya bila dibebani akan bergeser satu sama lain.

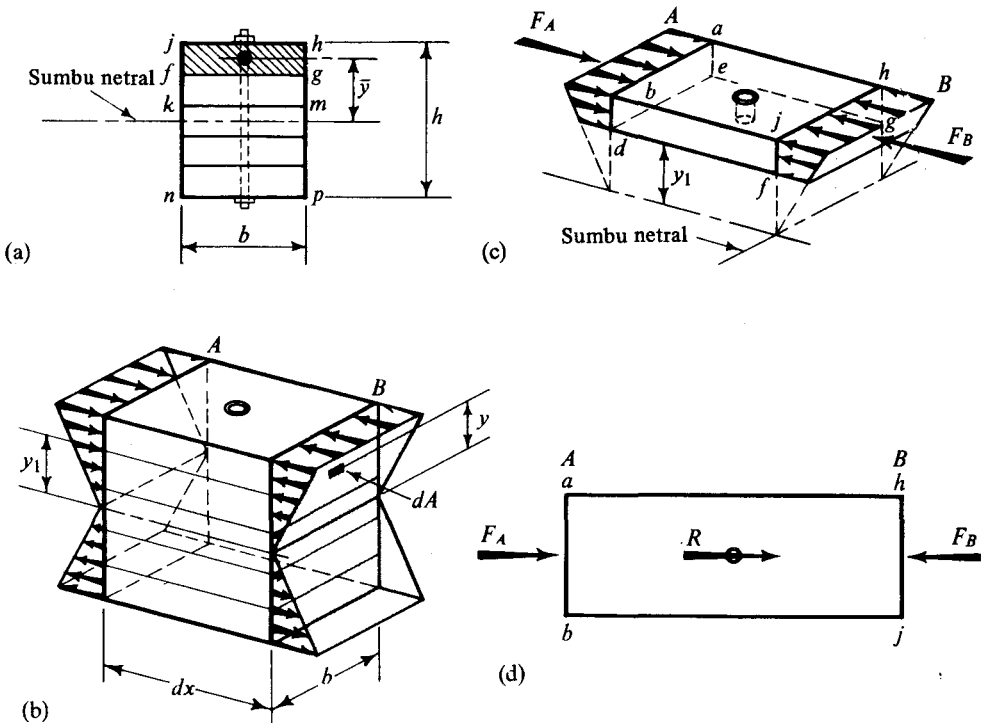
### 6-3 ALIRAN GESER (SHEAR FLOW)

Tinjaulah sebuah balok yang terbuat dari beberapa papan yang kontinu yang penampangnya terlihat dalam Gambar 6-5(a). Untuk kesederhanaan balok tersebut

mempunyai penampang sikuempat, tetapi pembatasan yang demikian tidaklah penting. Untuk membuat balok ini berlaku sebagai anggota yang terpadu, maka diandaikan bahwa papan-papan tersebut dipererat oleh baut-baut vertikal. Sebuah elemen dari balok ini diisolasikan oleh dua irisan yang sejajar, yang mana keduanya tegak lurus pada sumbu balok, diperlihatkan dalam Gambar 6-5(b).

Bila elemen yang terlihat dalam Gambar 6-5(b) dikenakan kepada momen lentur  $+M_A$  pada ujung  $A$  dan  $+M_B$  pada ujung  $B$ , maka terbentuklah tegangan-tegangan lentur yang berlaku tegak lurus terhadap irisan. Tegangan lentur ini berubah secara linier dari sumbu-sumbu netral masing-masing. Tegangan lentur tersebut pada setiap titik berjarak  $y$  dari sumbu netral adalah  $-M_B y/I$  pada ujung  $B$  dan  $-M_A y/I$  pada ujung  $A$ .

Dari elemen balok, Gambar 6-5(b), isolasikanlah papan atas sebagai dalam Gambar 6-5(c). Serat-serat dari papan ini yang paling dekat dengan sumbu netral terletak pada jarak  $y_1$ . Kemudian, karena tegangan kali luas adalah gaya, maka gaya yang bekerja tegak lurus pada ujung-ujung  $A$  dan  $B$  dari papan ini dapat pula ditentukan. Pada ujung  $B$  gaya yang bekerja pada daerah kecil takberhingga  $dA$  pada jarak  $y$  dari sumbu netral adalah  $(-M_B y/I)dA$ . Gaya total yang bekerja pada daerah luas  $fghj$  ( $A_{fghj}$ ) merupakan penjumlahan, atau integral, dari gaya-gaya elementer ini terhadap daerah luas tersebut. Dengan menunjuk gaya total yang bekerja tegak lurus terhadap luas  $fghj$  tersebut di atas dengan  $F_B$  dan dengan mengingat bahwa pada sebuah irisan,  $M_B$  dan  $I$  adalah konstan,



Gambar 6-5 Elemen-elemen untuk menurunkan ungkapan untuk aliran geser dalam balok

kita akan memperoleh hubungan-hubungan yang berikut:

$$F_B = \int_{\text{luas } fghj} -\frac{M_B y}{I} dA = -\frac{M_B}{I} \int_{\text{luas } fghj} y dA = -\frac{M_B Q}{I} \quad (6-2)$$

di mana

$$Q = \int_{\text{luas } fghj} y dA = A_{fghj} \bar{y} \quad (6-3)$$

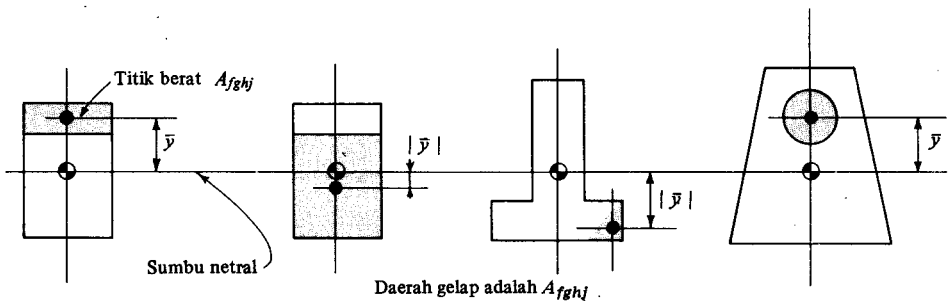
Integral yang menentukan  $Q$  adalah momen pertama atau statis dari luas  $fghj$  terhadap sumbu netral. Menurut definisi  $\bar{y}$  adalah jarak dari sumbu netral ke titik berat  $A_{fghj}$ . \* Gambaran mengenai cara menentukan  $Q$  terdapat dalam Gambar 6-6. Persamaan 6-2 memberikan cara yang lebih baik untuk menghitung gaya longitudinal yang bekerja tegak lurus terhadap setiap bagian yang terpilih dari daerah luas penampang.

Selanjutnya tinjaulah ujung  $A$  dari elemen dalam Gambar 6-5. Kita dapat mengungkapkan gaya total yang bekerja tegak lurus pada luas  $abde$  sebagai

$$F_A = -\frac{M_A}{I} \int_{\text{luas } abde} y dA = -\frac{M_A Q}{I} \quad (6-4)$$

di mana arti dari  $Q$  adalah sama dengan yang terdapat dalam Persamaan 6-2 karena untuk balok prismatis luas seperti  $fghj$  sama dengan luas  $abde$ . Jadi bila momen pada  $A$  dan  $B$  adalah sama, maka akan diperoleh bahwa  $F_A = F_B$ . Sedang baut yang terlihat dalam gambar akan berlaku sebagai sebuah fungsi nominal yang menjaga papan-papan bergabung bersama hingga tidak diperlukan untuk melawan gaya-gaya lain yang diketahui.

Pada pihak lain, bila  $M_A$  tidak sama dengan  $M_B$ , yang selalu terjadi bila terdapat geser dalam irisan yang berdampingan, maka  $F_A$  tidak sama dengan  $F_B$ . Jadi terda-



Gambar 6-6 Cara mendapatkan  $|Q|$

\* Daerah luas  $fghj$  dengan jarak  $\bar{y}$  dari luas tersebut dapat dipergunakan untuk mendapatkan harga  $|Q|$ .

pat gaya dorong (atau tarik) yang lebih besar pada ujung papan yang satu dibandingkan dengan ujung yang lain, artinya terjadi tegangan normal yang berbeda yang bekerja pada kedua sisi irisan tersebut. Jadi bila  $M_A \neq M_B$ , maka keseimbangan gaya-gaya horisontal dalam Gambar 6-5(c) dapat dicapai hanya dengan membangun suatu gaya perlawanan horisontal  $R$  dalam baut. Bila  $M_B > M_A$ , maka  $|F_B| > |F_A|$ , dan  $|F_A| + R = |F_B|$ , Gambar 6-5(d). Gaya  $|F_B| - |F_A| = R$  ini cenderung menggeser baut pada bidang papan  $edfg$ .\* Bila yang kita selidiki gaya geser yang bekerja pada baut pada tingkatan  $km$  (Gambar 6-5(a)), maka kedua papan atas haruslah ditinjau sebagai satu kesatuan.

Bila  $M_A \neq M_B$  dan panjang elemen balok hanyalah  $dx$ , maka momen lentur pada irisan-irisan yang berdampingan akan berubah dengan besar yang kecil takberhingga. Jadi bila momen lentur di  $A$  adalah  $M_A$ , maka momen lentur di  $B$  adalah  $M_B = M_A + dM$ . Demikian pula, dalam jarak sama  $dx$  gaya-gaya longitudinal  $F_A$  dan  $F_B$  berubah dengan gaya kecil takberhingga  $dF$  yaitu:  $|F_B| - |F_A| = dF$ . Dengan memasukkan hubungan-hubungan ini ke dalam ungkapan untuk  $F_B$  dan  $F_A$  yang didapat di atas, dengan mengambil daerah-daerah  $fghj$  dan  $abde$  yang sama luasnya, kita akan memperoleh suatu ungkapan untuk gaya dorong (atau tarik) longitudinal diferensial  $dF$ :

$$dF = |F_B| - |F_A| = \left( \frac{M_A + dM}{I} \right) Q - \left( \frac{M_A}{I} \right) Q = \frac{dM}{I} Q$$

Dalam ungkapan akhir dari  $dF$  momen lentur yang sesungguhnya pada irisan berdampingan ditiadakan. Yang tinggal dalam persamaan tersebut hanyalah perbedaan momen lentur pada irisan berdampingan.

Selain bekerja dengan gaya  $dF$  yang terbentuk dalam suatu jarak  $dx$ , adalah lebih berarti memperoleh gaya yang serupa per satuan panjang balok. Besaran ini diperoleh dengan membagi  $dF$  dengan  $dx$ . Secara fisis besaran ini menyatakan perbedaan antara gaya-gaya  $F_B$  dan  $F_A$  pada sebuah elemen balok dari satuan panjang. Besaran  $dF/dx$  akan dilambangkan oleh  $q$  dan akan disebut sebagai *aliran geser* (shear flow). Karena gaya diukur dalam newton maka aliran geser  $q$  mempunyai satuan newton per meter. Kemudian dengan mengingat kembali bahwa  $dM/dx = V$ , maka kita peroleh ungkapan yang berikut untuk aliran geser dalam balok:

$$q = \frac{dF}{dx} = \frac{dM}{dx} \frac{1}{I} \int_{\text{luas } fghj} y dA = \frac{VA_{fghj} \bar{y}}{I} = \frac{VQ}{I} \quad (6-5)$$

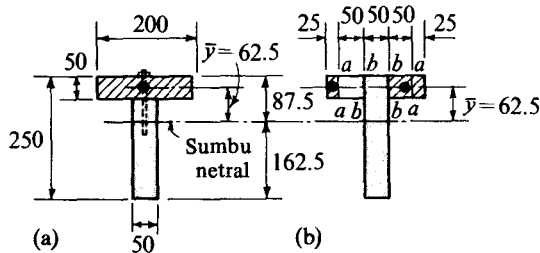
Dalam persamaan ini  $I$  berarti momen inersia dari keseluruhan luas penampang terhadap sumbu netral, seperti berlaku dalam rumus lenturan dari mana momen ini berasal. Gaya geser total pada irisan yang kita pelajari ini dinyatakan oleh  $V$ , sedang integral  $y dA$  yang menentukan  $Q$  meluas hanya kepada satu sisi dari daerah penampang balok pada mana  $q$  sedang diselidiki.

\* Gaya-gaya ( $|F_B| - |F_A|$ ) dan  $R$  tidaklah segaris, tetapi elemen yang terlihat dalam Gambar 6-5(c) adalah dalam keseimbangan. Untuk menghindari keruwetan, maka gaya geser dalam irisan-irisan vertikal dihilangkan dari diagram.

Sebagai tinjauan kembali, perhatikan sekali bahwa Persamaan 6-5 yang diturunkan berdasarkan rumus lenturan elastis, tidak kita temukan suku yang mengenai momen lentur dalam ungkapan akhir dari persamaan tersebut. Ini disebabkan oleh kenyataan bahwa yang kita tinjau hanyalah perubahan momen lentur pada irisan-irisan yang berdampingan, dan besaran yang belakangan ini berhubungan dengan geser  $V$ . Gaya geser  $V$  ini digantikan oleh  $dM/dx$ , dan inilah yang melatar-belakangi asal mula penentuan hubungan-hubungan di atas. Persamaan 6-5 sangat berguna untuk menerangkan sangkut paut yang diperlukan antara unsur-unsur yang membentuk sebuah balok. Ini akan digambarkan dengan beberapa contoh.

#### CONTOH 6-1

Dua papan kayu yang panjang membentuk sebuah irisan T dari balok yang terlihat dalam Gambar 6-7(a). Bila balok ini meneruskan suatu gaya geser tetap sebesar 3000 N, tentukanlah jarak antar paku yang diperlukan antara kedua papan untuk membuat balok berlaku sebagai satu kesatuan. Anggaplah bahwa gaya geser ijin tiap paku adalah sebesar 700 N.



(Semua ukuran dalam mm)

Gambar 6-7

#### PENYELESAIAN

Dalam menghadapi soal-soal demikian si penelaah haruslah bertanya: Bagian mana dari balok yang mempunyai kecenderungan untuk lebih bergeser secara longitudinal dari bagian yang sisa? Maka dibagian inilah dibuat bidang sentuhan antara dua papan; Persamaan 6-5 haruslah dipergunakan untuk menentukan aliran geser dalam bidang ini. Untuk membuat ini, haruslah kita peroleh sumbu netral dari seluruh irisan dan momen inersianya terhadap sumbu netral tersebut. Kemudian begitu  $V$  diketahui dan  $Q$  ditetapkan sebagai momen statis dari daerah luas papan atas terhadap sumbu netral maka  $q$  dapat kita peroleh. Jarak  $y_c$  dari atas sampai sumbu netral adalah

$$y_c = \frac{50(200)25 + 50(200)150}{50(200) + 50(200)} = 87,5 \text{ mm}$$

$$I = \frac{200(50)^3}{12} + (50)200(62,5)^2 + \frac{50(200)^3}{12} + (50)200(62,5)^2$$

$$= 113,5 \times 10^6 \text{ mm}^4 = 113,5 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$Q = A_{fgh} \bar{y} = (50)200(87,5 - 25) = 625 \times 10^3 \text{ mm}^3 = 625 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{(3000)(625 \times 10^{-6})}{113,5 \times 10^{-6}} = 16\,500 \text{ N/m}$$



Jadi gaya sebesar 16.500 N haruslah dipindahkan dari sebuah papan ke papan yang lainnya dalam setiap meter linier sepanjang balok tersebut. Tetapi, dari data yang diberikan, masing-masing paku mampu melawan gaya 700 N, jadi satu paku dapat menahan  $700/(16.500) = 0,043$  meter linier disepanjang balok. Begitu geser tetap konstan pada irisan-irisan yang beruntun dari balok, maka masing-masing paku berjarak 43 mm antara sesamanya. Dalam soal praktis suatu jarak antara 40 mm mungkin dapat dipergunakan.

#### PENYELESAIAN UNTUK PENYUSUNAN PAPAN YANG LAIN

Bila, sebagai pengganti kedua papan di atas, balok dari penampang yang sama dibuat dari lima potong, Gambar 6-7(b), maka kita akan membutuhkan jadwal pemakuan yang berbeda.

Mula-mula kita dapatkan dahulu aliran geser antara salah satu potongan 25 mm × 50 mm dengan keping-keping yang lainnya dari balok, walaupun permukaan persentuhan  $a-a$  adalah vertikal letaknya, maka prosedur yang berikut adalah sama. Gaya dorong atau tarik pada sebuah elemen yang terbentuk dengan cara yang sama adalah:

$$Q = A_{fghj} \bar{y} = (25)50(62,5) = 78 \times 10^3 \text{ mm}^3 = 78 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{(3000)(78 \times 10^{-6})}{113,5 \times 10^{-6}} = 2060 \text{ N/m}$$

Bila paku yang sama seperti sebelum ini dipergunakan untuk menyambung potongan 25 mm × 50 mm dengan potongan 50 mm × 50 mm maka jarak antara paku akan menjadi  $700/(2060) = 0,340$  m. Pemakuan ini berlaku untuk kedua irisan.

Untuk menentukan aliran geser antara potongan vertikal 50 mm × 250 mm dengan salah satu potongan 50 mm × 50 mm, semua luas 75 mm × 50 mm haruslah digunakan untuk menentukan  $Q$ . Ini adalah perbedaan gaya-gaya dorong (atau tarik) pada seluruh daerah ini yang akan menyebabkan gaya tidak seimbang yang harus dipindahkan pada permukaan  $b-b$ :

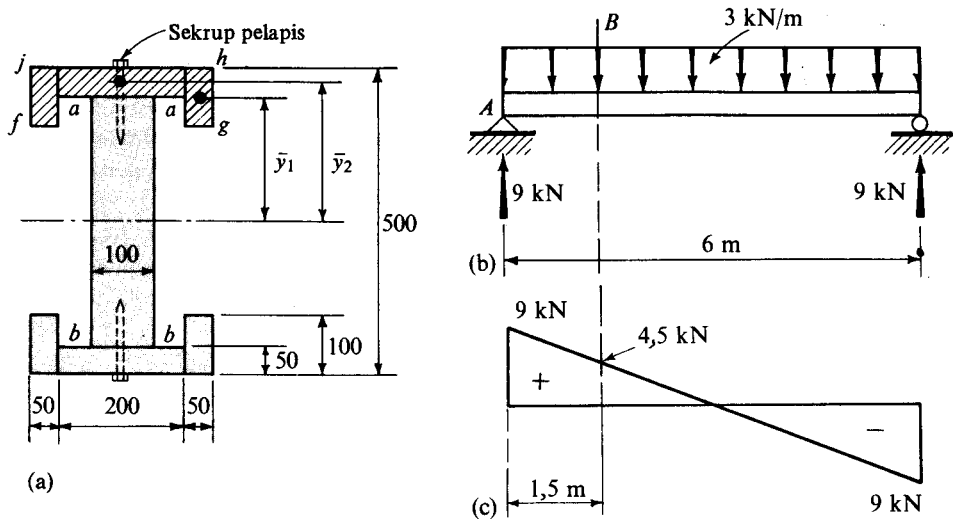
$$Q = A_{fghj} \bar{y} = (75)50(62,5) = 234 \times 10^3 \text{ mm}^3 = 234 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{(3000)(234 \times 10^{-6})}{113,5 \times 10^{-6}} = 6190 \text{ N/m}$$

Paku-paku haruslah diberi jarak antara  $700/6190 = 0,113$  m antara masing-masing paku tersebut, atau dalam praktek pada selang 0,1 m antara paku sepanjang balok dalam kedua irisan  $b-b$ . Paku-paku ini dapat dipasang lebih dahulu, kemudian barulah diletakkan potongan-potongan 25 mm × 50 mm.

#### CONTOH 6-2

Sebuah balok sederhana dengan bentangan sebesar 6 m memuat sebuah beban 3 kN/m termasuk beratnya sendiri. Penampang balok tersebut terbuat dari beberapa potongan kayu untuk seperti yang terlihat dalam Gambar 6-8(a). Tentukanlah jarak antara dari sekrup-sekrup pelapis 10 mm yang diperlihatkan dalam gambar tersebut yang mana perlu untuk mempererat bersama balok ini. Anggaplah bahwa sebuah sekrup pelapis 10 mm, sebagai ditentukan oleh pengujian-pengujian laboratorium, adalah baik untuk



Gambar 6-8 (Semua ukuran dalam mm)

2 kN bila meneruskan beban tegak yang sejajar dengan urat kayu. Untuk semua *irisan*,  $I$  sama dengan  $2,36 \times 10^{-3} \text{ m}^4$ .

#### PENYELESAIAN

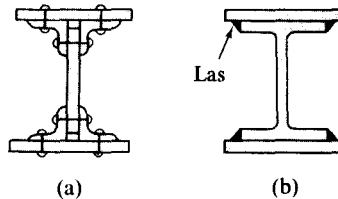
Untuk mendapatkan jarak antara sekrup-sekrup pelapis tersebut, maka haruslah ditentukan lebih dahulu aliran geser yang terdapat pada irisan *a-a*. Pembebanan pada balok tersebut dapat di lihat dalam Gambar 6-8(b). Untuk menunjukkan perubahan geser sepanjang balok tersebut, dibuatlah diagram geser seperti dalam Gambar 6-8(c). Selanjutnya, untuk mempergunakan rumus aliran geser, maka  $\int_{\text{luas } fghj} y \, dA = Q$  haruslah ditentukan lebih dahulu. Ini dapat dilakukan dengan meninjau daerah yang bergaris-garis pada salah satu sisi irisan *a-a* dalam Gambar 6-8(a). Momen statis dari daerah ini adalah lebih baik dihitung dengan mengalikan luas dari kedua potongan 50 mm  $\times$  100 mm dengan jarak antara titik berat keping dengan sumbu netral balok dan menambahkan hasil perkalian ini dengan besaran yang sama untuk potongan 50 mm  $\times$  200 mm. Aliran geser paling besar terdapat pada tumpuan, sehubungan gaya geser vertikal terbesar  $V$  sebesar 9 kN ada di sana :

$$\begin{aligned}
 Q &= A_{fghj} \bar{y} = 2A_1 \bar{y}_1 + A_2 \bar{y}_2 \\
 &= 2(50)100(200) + 50(200)225 = 4,25 \times 10^6 \text{ mm}^3 = 4,25 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \\
 q &= \frac{VQ}{I} = \frac{9(4,25 \times 10^{-3})}{2,36 \times 10^{-3}} = 16,2 \text{ kN/m}
 \end{aligned}$$

Pada tumpuan jarak antara sekrup-sekrup pelapis haruslah  $2/16,2 = 0,123 \text{ m}$ . Jarak antara sekrup-sekrup pelapis ini hanyalah berlaku pada irisan di mana gaya geser  $V$  adalah sama dengan 9 kN. Perhitungan-perhitungan yang sama dengan yang di atas ..

untuk irisan di mana  $V = 4,5 \text{ kN}$ , menghasilkan  $q = 8,1 \text{ kN/m}$ ; dan jarak antara sekrup-sekrup pelapis adalah  $2/8,1 = 0,246 \text{ m}$ . Jadi adalah lebih tepat untuk menentukan penggunaan jarak antara sebesar  $120 \text{ mm}$  antara sekrup-sekrup pelapis  $10 \text{ mm}$  untuk jarak  $1,5 \text{ m}$  dekat kedua tumpuan dan jarak sebesar  $240 \text{ mm}$  antara sekrup-sekrup pelapis yang sama yang terletak ditengah-tengah balok tersebut. Perbaikan yang lebih besar untuk membuat peralihan dari satu jarak dari pengencangan kepada yang lainnya mungkin dikehendaki sekali dalam beberapa soal. Jarak antara sekrup pelapis yang sama dapat digunakan pula pada irisan  $b-b$  seperti pada irisan  $a-a$ .

Dengan cara yang sama dengan yang di atas, dapat pula kita tentukan jarak antar paku keling atau baut dalam balok gabungan yang terbuka dari batang siku dan plat kontinu. Syarat-syarat pengelasan juga ditetapkan serupa. Tegangan geser *nominal* dalam sebuah paku keling ditentukan dengan membagi *gaya* geser total yang diteruskan oleh paku tersebut (aliran geser kali jarak antara paku keling) dengan luas penampang paku. Untuk penelaahan yang terperinci mengenai paku keling, baut dan las, dapat dilihat pada Bab 14.



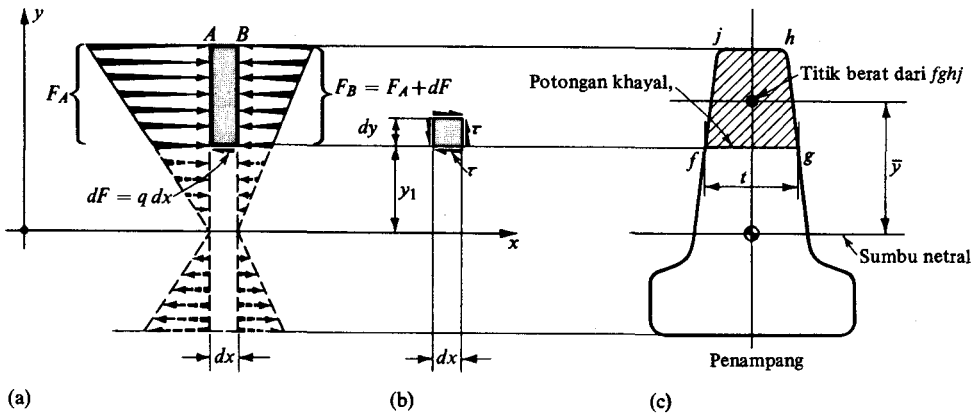
**Gambar 6-9** Irisan balok yang khas terdiri dari bagian-bagian komponen (a) penumpu pelat, (b) balok I yang diperkokoh dengan pelat.

#### 6-4 RUMUS TEGANGAN GESER BALOK

Rumus tegangan geser untuk balok dapat diperoleh dengan memodifikasi rumus aliran geser. Jadi analog dengan prosedur yang lalu, sebuah elemen dari sebuah balok dapat diisolasi antara dua irisan yang berdampingan yang diambil tegak lurus terhadap sumbu balok. Kemudian dengan melalui *irisan khayal yang lainnya* yang melalui elemen ini sejajar dengan sumbu balok, maka kita peroleh suatu elemen baru, sesuai dengan elemen sebuah "papan" yang kita pergunakan dalam penurunan-penurunan rumus yang lalu. Pandangan samping dari elemen yang demikian dapat dilihat dalam Gambar 6-10(a) di mana irisan longitudinal khayal dibuat pada jarak  $y_1$  dari sumbu netral. Daerah penampang balok diperlihatkan dalam Gambar 6-10(c).

Bila gaya-gaya geser terdapat pada irisan-irisan melalui balok, maka momen lentur yang berbeda terjadi pada irisan  $A$  daripada  $B$ . Jadi lebih besar gaya dorong atau tarik yang terbentuk pada satu sisi *sebagian daerah fghj* daripada yang lain, dan seperti sebelumnya, gaya *longitudinal* ini pada jarak  $dx$  adalah

$$dF = \frac{dM}{I} \int_{\text{luas } fghj} y \, dA = \frac{dM}{I} A_{fghj} \bar{y} = \frac{dM}{I} Q$$



Gambar 6-10 Penurunan tegangan geser dalam balok

Dalam sebuah balok *padat* gaya yang melawan  $dF$  dapat terbentuk hanya *dalam bidang* potongan membujur yang diambil sejajar dengan sumbu balok. Karena itu, dengan menganggap bahwa tegangan geser  $\tau$  adalah *terdistribusi secara merata* melalui potongan tersebut dengan lebar  $t$ , maka tegangan geser dalam *bidang longitudinal* tersebut dapat diperoleh dengan membagi  $dF$  dengan luas  $t dx$ . Ini menghasilkan tegangan geser mendatar  $\tau$ . Untuk suatu elemen *kecil takberhingga*, bagaimana pun, tegangan-tegangan geser yang sama secara numerik bekerja pada bidang-bidang yang saling tegak-lurus sesamanya, Gambar 6-10(b). Jadi hubungan yang sama memberikan tegangan-tegangan membujur secara *serempak*, sedang tegangan geser dalam *bidang irisan vertikal pada potongan membujur* adalah\* :

$$\tau = \frac{dF}{dx t} = \frac{dM}{dx} \frac{A_{fghj} \bar{y}}{It}$$

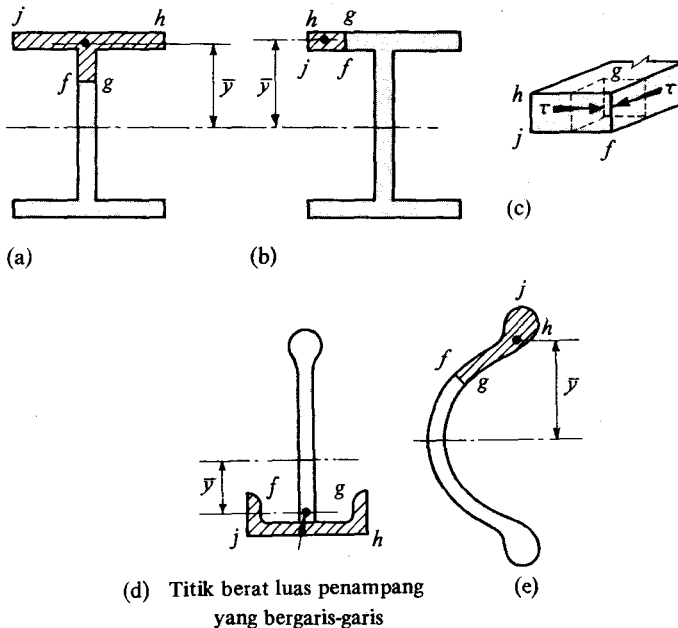
Persamaan ini dapat disederhanakan, karena menurut Persamaan 6-1,  $dM/dx = V$  dan oleh Persamaan 6-5,  $q = VQ/I$ . Jadi :

$$\tau = \frac{VA_{fghj} \bar{y}}{It} = \frac{VQ}{It} = \frac{q}{t} \quad (6-6)$$

\* Munculnya besaran  $\bar{y}$  dalam hubungan ini dapat dijelaskan secara berbeda-beda. Bila geser tersebut terdapat pada irisan yang melalui balok, maka momen pada irisan-irisan yang berdampingan adalah  $M$  dan  $M + dM$ . Harga  $M$  ini tidaklah relevan dalam menentukan tegangan geser. Jadi tidak ada momen yang perlu ditinjau pada satu irisan *bila pada irisan yang berdampingan momen lentur  $dM$  dianggap ada*. Kemudian pada sebagian daerah irisan, seperti daerah yang bergaris-garis dalam Gambar 6-10(c), momen lentur  $dM$  ini akan menimbulkan suatu *tegangan normal rata-rata*  $(dM)\bar{y}/I$  sebagai yang diberikan oleh rumus lenturan. Dalam hubungan yang terakhir  $\bar{y}$  menentukan letak serat yang berada pada jarak *rata-rata* dari sumbu netral dalam daerah sebagian dari irisan. Dengan mengalikan  $(dM)\bar{y}/I$  dengan daerah sebagian dari irisan kita akan memperoleh ungkapan yang sama untuk  $dF$  di atas.

Persamaan 6-6 ini merupakan rumus yang penting untuk tegangan geser dalam balok.\* Ia memberikan tegangan geser *pada* potongan yang membujur. Seperti sebelumnya,  $V$  adalah tegangan geser *total* pada irisan, dan  $I$  adalah momen lembam *seluruh* daerah penampang terhadap sumbu netral. Kedua  $V$  dan  $I$  adalah konstan pada irisan yang melalui balok. Di sini  $Q$  adalah momen statis sekitar sumbu netral daerah *parsial* penampang pada satu sisi dari potongan membujur khayal, dan  $\bar{y}$  adalah jarak antara sumbu netral balok dengan titik berat daerah parsial  $A_{fghj}$ . Akhirnya,  $t$  adalah lebar potongan membujur khayal yang biasanya sama dengan tebal atau lebar bagian konstruksi. Tegangan geser pada potongan-potongan membujur yang berbeda dari balok dianggap mempunyai harga yang berbeda bila harga-harga  $Q$  dan  $t$  dari potongan tersebut berbeda pula.

Kita harus berhati-hati dalam mempersiapkan potongan-potongan membujur tersebut untuk dipergunakan dalam Persamaan 6-6. Pengirisan yang tepat beberapa daerah penampang balok diperlihatkan dalam Gambar-gambar 6-11(a), (b), (d) dan (e). Penggunaan dari bidang-bidang pemotongan yang miring haruslah dihindarkan *kecuali* potongan yang dibuat dengan tebal yang kecil.† Bila sumbu simetri daerah penampang balok adalah vertikal dan terletak pada bidang gaya-gaya terpakai, maka potongan-



(d) Titik berat luas penampang yang bergaris-garis

**Gambar 6-11** Pengirisan yang tepat untuk daerah parsial dari penampang untuk menghitung tegangan geser dalam balok.

\* Rumus ini diturunkan oleh D.I. Jouravsky dalam tahun 1855. Pengembangan ini diilhami oleh pengamatan keretakan horisontal pada kayu yang terpasang pada beberapa jembatan kereta api antara Moskwa dan St. Petersburg.

† Penyelesaian yang teliti dari soal tersebut menunjukkan bahwa potongan-potongan miring yang lebar melalui irisan akan menuju hal yang tidak tetap.

potongan membujur tersebut biasanya dibuat secara horisontal. Dalam hal-hal demikian penyelesaian Persamaan 6-6 memberikan harga-harga yang simultan untuk tegangan-tegangan *horisontal dan vertikal*, sehubungan bidang-bidang tersebut adalah saling tegak-lurus sesamanya. Tegangan vertikal bekerja pada bidang irisan melintang yang terdapat pada balok tersebut. Secara bersama, tegangan-tegangan ini memberikan perlawanan terhadap gaya geser yang terdapat pada irisan yang sama, jadi memenuhi hubungan statika  $\Sigma F_y = 0$ . Berlakunya pernyataan ini untuk hal khusus akan kita buktikan dalam Contoh 6-3.

Hanya untuk batang-batang yang tipis, Persamaan 6-6 boleh dipergunakan untuk menentukan tegangan geser dengan potongan seperti *f-g* dari Gambar 6-11(b). Tegangan-tegangan geser ini berlaku dalam bidang vertikal dan diarahkan tegaklurus pada bidang kertas. Berhadapan dengan tegangan geser secara horisontal. Gambar 6-11(c). Tegangan geser ini berlaku dalam *arah yang sangat berbeda* daripada yang diperoleh dengan membuat irisan horisontal; seperti *f-g* dalam Gambar 6-11(a) dan (d). Karena tegangan-tegangan geser ini tidak mempengaruhi langsung perlawanan dari gaya geser vertikal  $V$ , maka keberartian tegangan-tegangan tersebut akan kita bahas dalam Pasal 6-6.

Penggunaan Persamaan 6-6 untuk daerah penampang balok yang amat penting akan digambarkan dalam contoh-contoh yang berikut.

### CONTOH 6-3

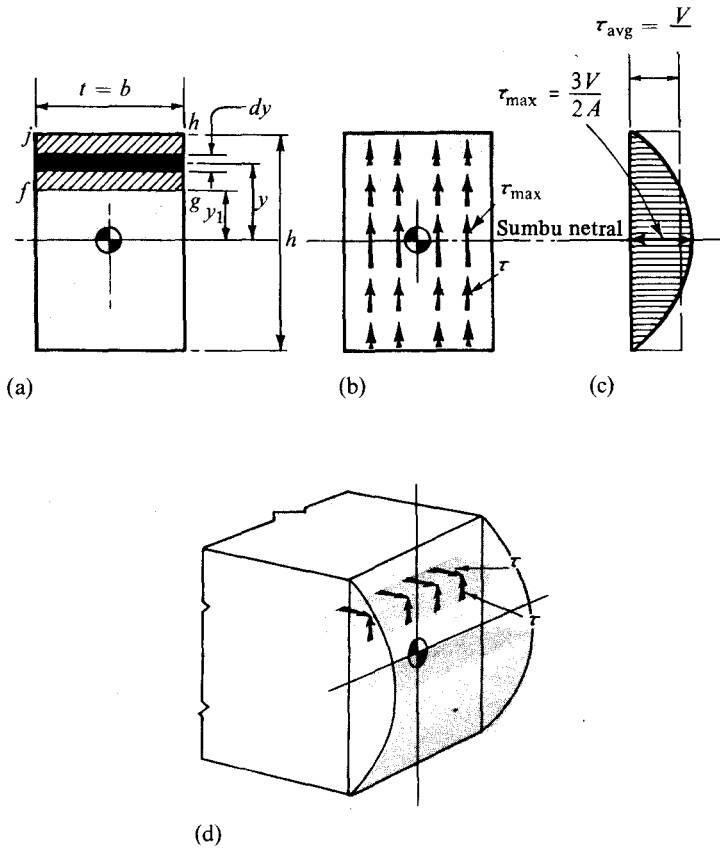
Turunkanlah ungkapan untuk distribusi tegangan geser dalam balok yang berpenampang sikuempat padat yang meneruskan gaya geser vertikal  $V$ .

### PENYELESAIAN

Daerah penampang balok tersebut diperlihatkan dalam Gambar 6-12(a). Sebuah potongan membujur sepanjang balok pada jarak  $y_1$  dari sumbu netral mengisolasi sebagian daerah *fghi* dari penampang. Di sini  $t = b$ . Ambillah daerah kecil takberhingga dari penampang yang luasnya dinyatakan oleh  $b \, dy$ . Dengan menggunakan Persamaan 6-6 maka kita peroleh tegangan geser horisontal *pada tingkat*  $y_1$  dari balok. *Pada* potongan yang sama, gaya geser vertikal yang sama secara numerik, bekerja pula pada *bidang irisan penampang*.

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{VQ}{It} = \frac{V}{It} \int_{\text{luas } fghi} y \, dA = \frac{V}{Ib} \int_{y_1}^{h/2} by \, dy \\ &= \frac{V}{I} \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{y_1}^{h/2} = \frac{V}{2I} \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^2 - y_1^2 \right]\end{aligned}$$

Persamaan ini menunjukkan bahwa dalam balok yang berpenampang sikuempat kedua tegangan geser horisontal dan vertikal berubah secara parabolis. Harga tegangan geser maksimum diperoleh bila  $y_1$  menjadi sama dengan nol. *Dalam bidang irisan penampang*, Gambar 6-12 (b), ini dinyatakan secara diagramatis oleh  $\tau_{\max}$  *pada* sumbu netral balok. Bila jarak dari sumbu netral semakin besar maka tegangan geser berangsur-angsur akan menuju nol. Pada pinggir atas dan bawah balok, yaitu pada  $y_1 = \pm h/2$ ,



Gambar 6-12

tegangan geser tersebut akan lenyap. Harga-harga tegangan geser tersebut pada pelbagai dataran dari balok dapat dinyatakan sebagai parabola dalam Gambar 6-12(c). Pandangan yang isometrik dari balok dengan tegangan-tegangan geser yang horisontal dan vertikal diperlihatkan dalam Gambar 6-12(d).

Untuk memenuhi syarat statika  $\Sigma F_y = 0$ , maka penjumlahan semua tegangan geser vertikal  $\tau$  kali masing-masing luas yang bersangkutan  $dA$  yang terdapat pada sebuah iris-an balok, haruslah sama dengan gaya vertikal  $V$ . Keadaan ini dapat ditunjukkan dengan mengintegrasikan  $\tau dA$  atas seluruh luas penampang balok  $A$  serta menggunakan ungkapan umum  $\tau$  yang diperoleh di atas.

$$\begin{aligned} \int_A \tau dA &= \frac{V}{2I} \int_{-h/2}^{+h/2} \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^2 - y_1^2 \right] b dy_1 = \frac{Vb}{2I} \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^2 y_1 - \left( \frac{y_1^3}{3} \right) \right]_{-h/2}^{+h/2} \\ &= \frac{Vb}{\left( 2 \frac{bh^3}{12} \right)} \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^2 h - \frac{2}{3} \left( \frac{h}{2} \right)^3 \right] = V \end{aligned}$$

Sehubungan penurunan Persamaan 6-6 tidaklah langsung maka pembuktian ini menunjukkan bahwa tegangan geser yang diintegrasikan terhadap daerah irisan sebenarnya adalah sama dengan gaya geser vertikal. Selanjutnya berhubungan diperolehnya persetujuan mengenai tanda, maka hasil ini memperlihatkan bahwa *arah tegangan-tegangan geser pada irisan yang menembus sebuah balok adalah sama dengan arah gaya geser  $V$* . Kenyataan ini dapat dipergunakan untuk menentukan sikap tegangan geser.

Seperti disebutkan di atas, tegangan geser maksimum dalam balok segiempat terjadi pada sumbu netral, dan dalam hal ini ungkapan umum untuk  $\tau_{\max}$  dapat disederhanakan dengan mengambil  $y_1 = 0$ .

$$\tau_{\max} = \frac{Vh^2}{8I} = \frac{Vh^2}{8 \frac{bh^3}{12}} = \frac{3}{2} \frac{V}{bh} = \frac{3}{2} \frac{V}{A} \quad (6-7)$$

di mana  $V$  adalah gaya geser total dan  $A$  adalah *seluruh* luas penampang. Hasil yang sama dapat pula diperoleh secara lebih langsung, jika diperhatikan bahwa untuk membuat  $VQ/(It)$  menjadi maksimum maka  $Q$  haruslah mencapai harga yang paling besar, di mana dalam hal ini harga-harga  $V$ ,  $I$ , dan  $t$  adalah konstan. Dari sifat momen statis dari luas terhadap sumbu titik berat, maka harga  $Q$  yang maksimum diperoleh dengan meninjau separoh daerah penampang sekitar sumbu netral balok. Jadi, secara lain,

$$\tau_{\max} = \frac{VQ}{It} = \frac{V \left( \frac{bh}{2} \right) \left( \frac{h}{4} \right)}{\left( \frac{bh^3}{12} \right) b} = \frac{3}{2} \frac{V}{A} \quad (6-7a)$$

Berhubung balok berpenampang sikuempat sering dipergunakan dalam praktek maka Persamaan 6-7a berguna sekali. Ia banyak sekali dipergunakan dalam disain balok-balok kayu berhubung kekuatan geser kayu pada bidang-bidang yang sejajar dengan urat adalah kecil. Jadi meskipun tegangan-tegangan geser yang sama terdapat pada bidang-bidang yang saling tegaklurus, balok-balok kayu mempunyai kecenderungan untuk menggeser secara longitudinal sepanjang sumbu netral. Perhatikanlah bahwa tegangan geser maksimum adalah  $1\frac{1}{2}$  kali lebih besar dari tegangan geser rata-rata.\*  $V/A$ .

#### CONTOH 6-4

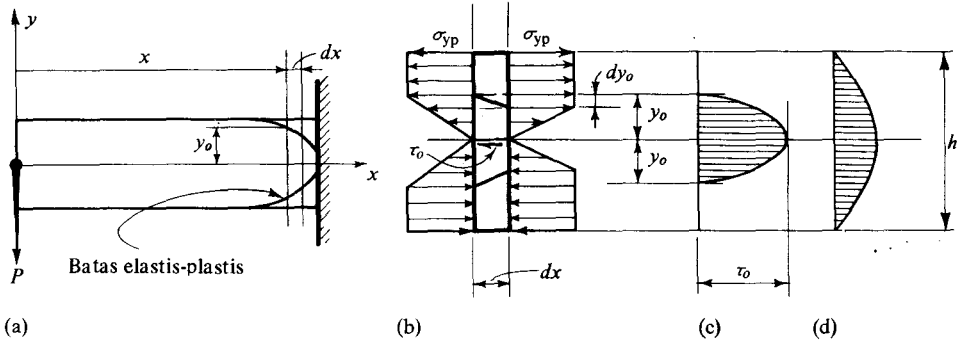
Dengan menggunakan teori elementer, tentukanlah distribusi tegangan geser yang disebabkan oleh gaya geser  $V$  dalam daerah elastis-plastis dari balok sikuempat.

#### PENYELESAIAN

Kedaaan yang terjadi dalam soal tersebut, misalnya, dalam sebuah kantilever berbeban seperti terlihat dalam Gambar 6-13(a). Dalam daerah elastis-plastis, momen lentur luar  $M = -Px$ , di mana menurut Persamaan 5-11, momen perlawanan dalam adalah  $M = M_p - \sigma_y b y_0^2/3$ . Dengan memperhatikan  $y_0$  berubah-ubah terhadap  $x$  dan dengan men-

\* Pemakaian ungkapan  $\tau = V/A$  hanya diperbolehkan untuk paku keling dan baut dan tidak diperbolehkan digunakan dalam disain balok.





**Gambar 6-13** Distribusi tegangan geser dalam balok segiempat elastis-plastis

diferensiasikan persamaan-persamaan di atas, kita dapat menulis kesamaan yang berikut:

$$\frac{dM}{dx} = -P = -\frac{2by_o\sigma_{yp}}{3} \frac{dy_o}{dx}$$

Hubungan ini akan diperlukan kemudian. Mula-mula dengan pengerjaan seperti yang dilakukan pada kasus elastis, tinjaulah keseimbangan sebuah elemen balok sebagai diperlihatkan dalam Gambar 6-13(b). Gaya-gaya membujur yang bekerja pada sebelah kanan dari elemen ini adalah lebih besar dari pada yang sebelah kiri. Dengan memisahkannya pada sumbu netral dan menyamakan gaya pada potongan dengan perbedaan gaya membujur, maka kita peroleh

$$\tau_o dx b = \sigma_{yp} dy_o b/2$$

di mana  $b$  adalah lebar balok. Setelah mengganti  $dy_o/dx$  dari hubungan yang didapatkan sebelumnya dan dengan menghilangkan  $b$ , maka kita peroleh tegangan geser horisontal maksimum  $\tau_o$  :

$$\tau_o = \frac{\sigma_{yp}}{2} \frac{dy_o}{dx} = \frac{3P}{4by_o} = \frac{3}{2} \frac{P}{A_o} \quad (6-8)$$

di mana  $A_o$  adalah luas penampang yang bagian elastis. Distribusi tegangan geser untuk keadaan elastis-plastis diperlihatkan dalam Gambar 6-13(c). Ini dapat diperbandingkan dengan keadaan elastis, seperti yang terlihat dalam Gambar 6-13(d). Berhubung dalam daerah plastis terdapat tegangan-tegangan normal yang sama tapi berlawanan arah, maka tidak akan kita dapati gaya-gaya membujur yang setimbang dan tidak pula terbentuk tegangan-tegangan geser.

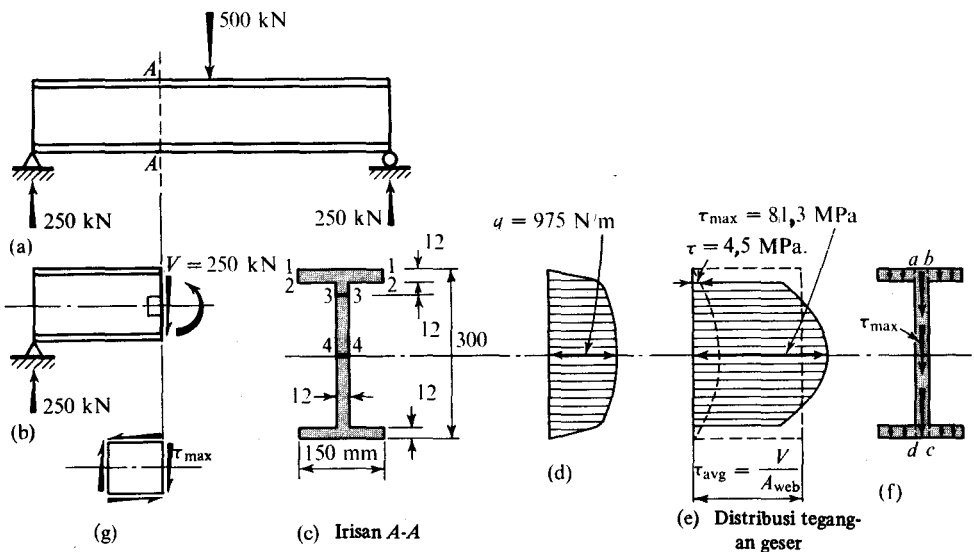
Penyelesaian elementer ini telah diperbaiki pula dengan mempergunakan kriteria

$y_p = \text{yield point} = \text{titik luluh} = \text{titik leleh}$

mengenai hasil yang diakibatkan oleh tindakan yang serempak dari tegangan-tegangan normal dan geser yang dirumuskan secara lebih hati-hati.\*

#### CONTOH 6-5

Sebuah balok I yang dibebani seperti dalam Gambar 6-14(a). Bila keadaan penampang-nya adalah seperti yang diperlihatkan dalam Gambar 6-14(c), tentukanlah tegangan geser pada tingkatan-tingkatan yang ditunjukkan dalam gambar tersebut. Abaikanlah berat balok tersebut.



Gambar 6-14

#### PENYELESAIAN

Diagram benda bebas dari segmen balok terdapat dalam Gambar 6-14(b). Dapat dilihat dari gambar ini bahwa gaya geser vertikal pada setiap irisan adalah 250 kN. Momen lentur tidak masuk secara langsung ke dalam soal yang sekarang. Aliran geser pada berbagai tingkatan dari balok dihitung dalam tabel yang berikut dengan menggunakan Persamaan 6-5. Karena  $\tau = q/t$  (Persamaan 6-6), maka tegangan geser didapatkan dengan membagi aliran geser dengan masing-masing lebar balok yang bersangkutan

$$I = \frac{(150)(300)^3}{12} - \frac{(138)(276)^3}{12} = 95,7 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Dipergunakan dalam Persamaan 6-5 perbandingan  $V/I = 250 \times 10^3 / 95,7 \times 10^6 = 2,61 \times 10^{-3} \text{ N/mm}^4$ .

\* D.C. Drucker, "The Effect of Shear on the Plastic Bending of Beams," *Journal of Applied Mechanics*, 1956, vol. 23, hal. 509–14.

| Level | $A_{fghj}^a$                         | $\bar{y}^b$ | $Q = A_{fghj}\bar{y}$<br>$\times 10^3 \text{ mm}^3$ | $q = VQ/I$ | $t$       | $\tau \text{ [MPa]}$ |
|-------|--------------------------------------|-------------|---|------------|-----------|----------------------|
| 1-1   | 0                                    | 150         | 0   | 0          | 150       | 0                    |
| 2-2   | (12)(150) = 1800                     | 144         | 259,2   | 677        | 150<br>12 | 4,5<br>56,4          |
| 3-3   | (12)(150) = 1800<br>(12)(12) = 144   | 144<br>132  | 259,2<br>19,0                                       | 278,2      | 726       | 12<br>60,5           |
| 4-4   | (12)(150) = 1800<br>(12)(138) = 1656 | 144<br>69   | 259,2<br>114,3                                      | 373,5      | 975       | 12<br>81,3           |

<sup>a</sup>  $A_{fghj}$  adalah daerah parsial penampang di atas tingkatan yang diberikan dalam mm kuadrat.

<sup>b</sup>  $\bar{y}$  adalah jarak dari sumbu netral kepada titik berat daerah parsial dalam mm.

Tanda positif dari  $\tau$  menunjukkan bahwa untuk irisan yang ditinjau, tegangan bekerja ke arah bawah pada permukaan kanan elemen. Sikap tegangan geser yang bekerja pada irisan berimpit dengan sikap gaya geser  $V$ . Untuk alasan ini kaidah tanda yang terlalu dianut acapkali tidak begitu perlu. Yang selalu benar adalah  $\int_A \tau dA$  adalah sama dengan  $V$  dan mempunyai sikap yang sama.

Perhatikanlah bahwa pada tingkatan 2-2 kedua lebar dipergunakan untuk menentukan tegangan geser-satu tepat di atas garis 2-2, sedang yang satu lagi tepat di bawahnya. Lebar 150 mm sesuai dengan hal yang pertama sedang yang 12 mm untuk yang kedua. Titik peralihan ini akan kita bahas dalam artikel yang berikut. Hasil-hasil yang didapatkan, berdasarkan simetri, berlaku pula kepada parohan bawah dari irisan, yang digambarkan dalam Gambar 6-14(d) dan (e). Dengan metoda yang sama dengan yang kita gunakan dalam contoh soal yang terdahulu, maka kita dapat melihat bahwa kurva-kurva dalam Gambar 6-14(e) adalah bagian dari parabola derajad kedua.

Perubahan tegangan geser yang ditunjukkan oleh Gambar 6-14(e) yang diterjemahkan sebagai yang diperlihatkan oleh Gambar 6-14(f). Tegangan geser maksimum terjadi pada sumbu netral; tegangan geser yang terdapat di seluruh badan balok hampir sama besarnya. Tegangan geser yang terjadi dalam flens sangatlah kecil. Untuk alasan inilah maka tegangan geser maksimum dalam suatu balok I sering didekati dengan membagi gaya geser total  $V$  dengan luas penampang badan (luas  $abcd$  dalam Gambar 6-14(f)). Jadi

$$(\tau_{\max})_{\text{pendekatan}} = V/A_{\text{jarangan}} \quad (6-9)$$

Dalam contoh yang diberikan ini memberikan

$$(\tau_{\max})_{\text{pendekatan}} = \frac{250\,000}{(12)(300)} = 69,4 \text{ MPa}$$

Tegangan ini berbeda sekitar 15 persen dari yang kita peroleh dengan rumus yang teliti. Untuk kebanyakan penampang suatu pendekatan yang sangat dekat dengan tegangan geser maksimum yang sesungguhnya dapat diperoleh dengan hanya membagi gaya geser dengan luas badan antara flens-flens. Untuk contoh yang di atas prosedur ini memberikan suatu tegangan sebesar 75,5 MPa yang kesalahannya hanya berada sekitar 7 persen.

Dari hal di atas jelaslah bahwa pembagian gaya geser  $V$  oleh luas penampang balok, untuk mendapatkan tegangan geser, tidaklah diperbolehkan.

Sebuah elemen balok pada sumbu netral terlihat dalam Gambar 6-14(g). Sebagai tambahan kepada tegangan geser, maka tegangan lentur pada tingkatan 3-3 dan 2-2 bekerja pada permukaan elemen yang vertikal dari elemen. Tidak ada tegangan geser dan hanya tegangan lentur yang bekerja pada elemen pada tingkatan 1-1.

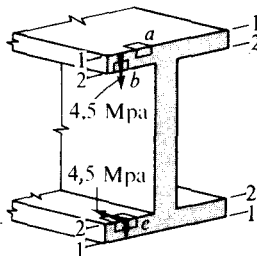
Tegangan geser maksimum didapatkan berada pada sumbu netral seperti pada kedua contoh di atas. Tetapi ini tidak harus selalu terjadi demikian. Misalnya bila sisi daerah penampang tidak saling sejajar, sebagai halnya sebuah irisan segitiga, maka  $\tau$  adalah fungsi dari  $Q$  dan  $t$ , dan tegangan geser maksimum tersebut terjadi di tengah-tengah antara titik puncak dan alas, yang tidak berimpit dengan sumbu netral.

Prosedur yang sama seperti di atas berlaku pula untuk penyelidikan sambungan membujur dalam balok di mana pertemuan antar permukaan tersebut diberi perekat. Pengetahuan mengenai tegangan geser dalam sambungan perekat akan membantu pemilihan kekuatan merekat yang baik. Bila balok yang terbuat dari dua jenis bahan yang diselidiki maka irisan transformasi dapat dipergunakan untuk memperoleh penyelesaian. Dalam balok beton bertulang, beton antara sumbu netral dan baja bertulang, dan juga di atas sumbu netral dianggap memberikan perlawanan terhadap tegangan geser.

#### \*6-5 KETERBATASAN-KETERBATASAN RUMUS TEGANGAN GESER

Rumus tegangan geser untuk balok didasarkan kepada rumus lenturan. Jadi semua pembatasan yang dipaksakan kepada rumus lenturan berlaku pula untuk rumus tegangan geser. Bahan dianggap elastis dengan modulus elastis yang sama antara tarik dan tekan. Teori yang dikembangkan ini hanya berlaku untuk balok lurus. Selanjutnya, terdapat pembatasan-pembatasan tambahan yang tidak tercakup dalam rumus lenturan. Beberapa di antaranya akan kita bahas sekarang.

Tinjaulah sebuah irisan pada balok I yang kita bahas dalam Contoh 6-5. Beberapa hasil pembahasan tersebut diutarakan lagi dalam Gambar 6-15. Tegangan geser yang dihitung semula untuk tingkatan 1-1 berlaku untuk elemen  $a$ . Pada elemen ini tegangan geser vertikal adalah nol. Demikian pula, *tidak* ada tegangan geser yang terdapat *pada* bidang atas balok. Ini disebabkan oleh kenyataan, bahwa permukaan *atas* balok tersebut adalah permukaan *bebas*. Dalam ungkapan matematis, ini berarti bahwa persyaratan

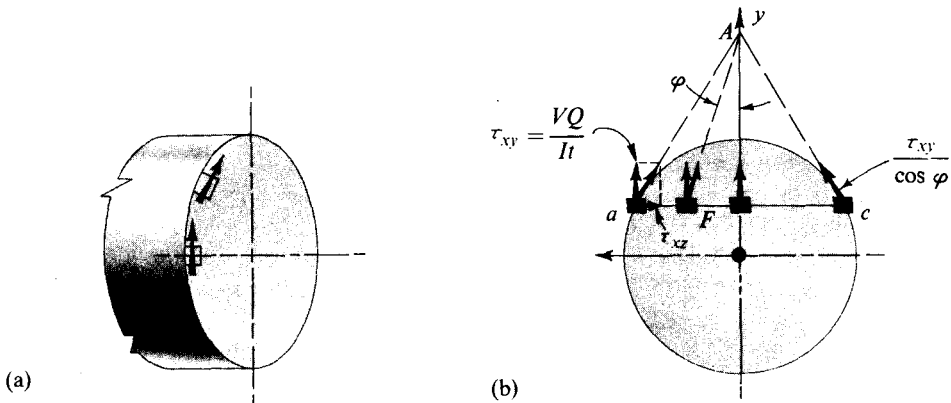


Gambar 6-15 Syarat batas yang tidak dipenuhi oleh elemen-elemen flens pada tingkatan 2-2

pada batas telah dipenuhi. Untuk balok berpenampang sikuempat keadaan pada batas-batas adalah benar.

Situasi yang berbeda akan kita dapati bila tegangan geser yang ditentukan untuk balok I pada tingkatan 2-2 kita teliti dengan cermat. Kita peroleh tegangan geser sebesar 4,5 MPa untuk elemen-elemen seperti  $b$  atau  $c$  yang diperlihatkan dalam gambar. Ini membutuhkan pengaturan tegangan horisontal pada bidang-bidang sebelah dalam dari flens. Tetapi bidang-bidang yang terakhir ini *haruslah bebas* dari tegangan geser karena merupakan *batas-batas bebas* dari balok. Ini membawa suatu pertentangan yang tidak dapat diselesaikan dengan metoda-metoda mekanika teknik. Kita harus menggunakan teknik-teknik teori elastisitas matematis yang lebih tinggi untuk mendapatkan penyelesaian yang tepat.

Untunglah cacat rumus tegangan geser di atas untuk balok tidaklah terlalu gawat. Tegangan geser dalam flens yang kita tinjau adalah kecil.\* Tegangan geser yang berarti terjadi dalam badan (web) dan, untuk semua tujuan yang praktis, dengan tepat diberikan oleh Persamaan 6-6. Kita tidak menemukan kesalahan yang cukup besar dengan menggunakan hubungan-hubungan yang telah kita turunkan dalam bab ini untuk batang-batang yang ber dinding tipis, sedang kebanyakan balok berada dalam kelompok ini. Selanjutnya, seperti disebutkan sebelumnya, penyelesaian untuk tegangan geser untuk balok berpenampang sikuempat adalah memuaskan.



Gambar 6-16 Modifikasi penyelesaian yang berdasarkan rumus tegangan geser untuk memenuhi syarat-syarat batas.

Dalam penggunaan-penggunaan yang praktis poros-poros melingkar acapkali bekerja sebagai balok. Jadi balok yang mempunyai bentuk penampang lingkaran padat merupakan golongan yang penting. Balok-balok ini bukanlah yang "berdinding tipis." Suatu pemeriksaan mengenai syarat-syarat batas untuk batang melingkar, Gambar 6-16(a), membawa kepada kesimpulan bahwa bila terdapat tegangan geser, maka tegangan ini haruslah bekerja sejajar dengan batas. Karena tidak ada tegangan geser tandingan yang muncul pada permukaan bebas dari balok, maka tidak ada komponen tegangan geser

\* Tegangan geser yang lain akan dibahas dalam pasal yang berikut.

yang dapat bekerja tegaklurus terhadap perbatasan. Tetapi menurut Persamaan 6-6, terjadi tegangan geser *vertikal* dari intensitas yang *sama* yang bekerja pada suatu tingkatan seperti *ac* dalam Gambar 6-16(b). Ini tidak cocok dengan syarat-syarat batas untuk elemen *a* dan *c* pada batas, dan jawaban yang ditunjukkan oleh Persamaan 6-6 tidaklah konsisten.† Untunglah, tegangan geser *maksimum* yang terjadi pada sumbu netral memenuhi syarat-syarat batas dan sangat dekat dengan harga yang sesungguhnya (berbeda sekitar 5%).‡

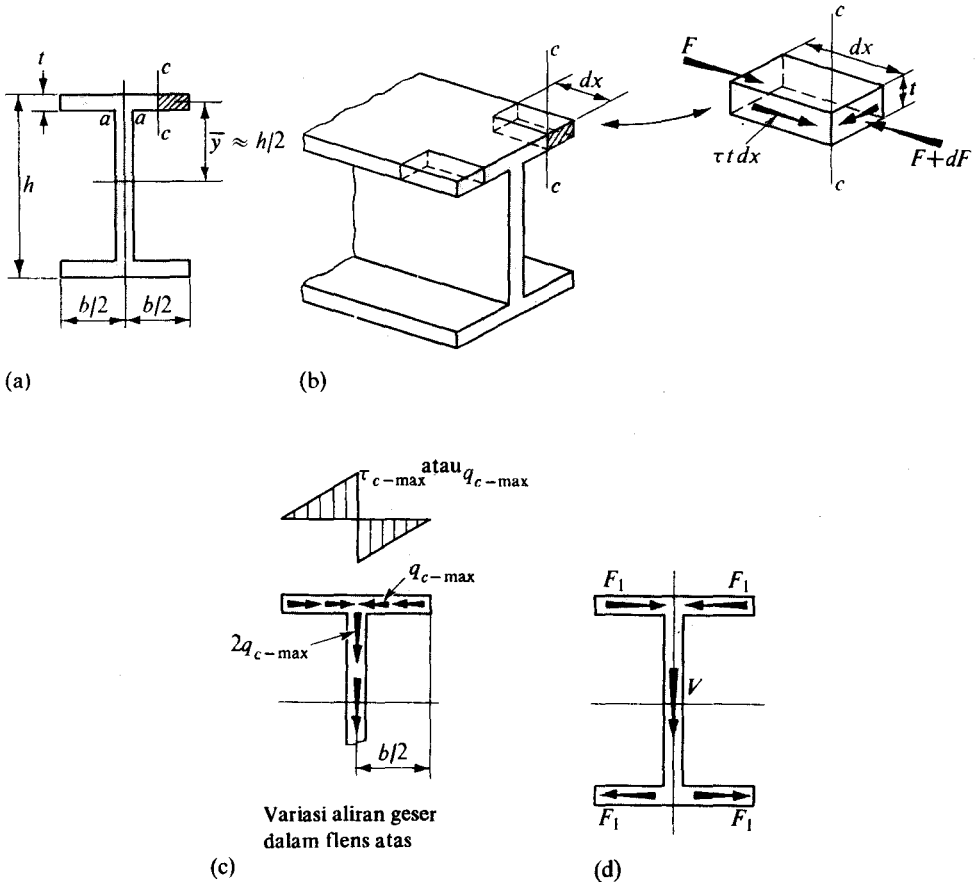
### \*6-6 CATATAN LEBIH LANJUT MENGENAI DISTRIBUSI TEGANGAN GESER

Dalam sebuah balok I adanya tegangan geser yang terletak dalam potongan membujur seperti *c-c* dalam Gambar 6-17(a) telah dinyatakan dalam Pasal 6-4. Tegangan geser ini bekerja tegaklurus terhadap bidang kertas. Besar tegangan geser dapat diperoleh dengan mempergunakan Persamaan 6-6 serta sikap tegangan diambil dengan meninjau momen lentur pada irisan-irisan yang berdampingan pada balok tersebut. Misalnya, bila untuk balok yang terlihat dalam Gambar 6-17(b) momen lentur *positif* menjadi besar ke arah pembaca, maka gaya normal yang lebih besar akan bekerja *lebih dekat* dengan irisan penampang. Untuk elemen-elemen yang diperlihatkan,  $\tau t dx$  atau  $q dx$  haruslah membantu gaya yang lebih kecil yang bekerja pada daerah sebagian dari irisan penampang. Ini menetapkan sikap tegangan geser dalam potongan yang membujur. Tetapi tegangan-tegangan geser yang sama secara numerik terdapat pada bidang-bidang yang saling tegaklurus sesamanya dari suatu elemen *yang kecil takberhingga* dan pada sudut bidang-bidang tersebut tanda arah ujung panah dari tegangan-tegangan geser akan bertemu saling berhadapan atau membelakangi. Jadi sikap tegangan geser dalam bidang irisan penampang dapat pula diketahui.

Besar tegangan geser berubah-ubah untuk potongan-potongan vertikal yang berbeda. Umpamanya, bila potongan *c-c* dalam Gambar 6-17(a) terdapat pada pinggir balok, maka daerah *bergaris* dari penampang balok menjadi nol. Tetapi bila tebal flens adalah tetap, dan potongan *c-c* dibuat makin lama makin mendekati badan, maka daerah bergaris akan bergerak naik dari nol pada kecepatan yang linier. Selanjutnya karena  $\bar{y}$  tetap konstan untuk luas seberapa pun, maka  $Q$  akan bertambah besar pula secara linier dari nol sampai kepada badan. Karena itu, sejak harga-harga  $V$  dan  $I$  adalah konstan pada setiap irisan pada balok, maka aliran geser  $q_c = VQ/I$  mengikuti perubahan yang sama. Bila tebal flens tetap sama, maka tegangan geser  $\tau_c = VQ/Lt$  akan berubah-ubah dengan

† Jawaban yang eksak dari soal ini adalah di luar jangkauan buku ini. Tetapi sebenarnya, suatu pendekatan yang lebih baik terhadap tegangan yang sesungguhnya dapat diperoleh dengan agak sederhana. Pertama-tama dibuat suatu pengandaian bahwa tegangan geser seperti yang diperoleh dari Persamaan 6-6 akan memberikan *komponen* yang sesungguhnya dari tegangan geser yang bekerja dalam *arah vertikal*. Kemudian, karena pada setiap tingkatan tegangan geser pada batas haruslah bekerja menyinggung batas, maka garis aksi tegangan-tegangan geser ini akan saling memotong pada suatu titik seperti *A* dalam Gambar 6-16(b). Jadi kita buat pengandaian kedua di mana semua tegangan geser pada suatu tingkatan yang diketahui bekerja dalam arah yang menuju sebuah titik tunggal seperti titik *A* dalam Gambar 6-16(b). Dari mana kita peroleh tegangan geser pada setiap titik seperti titik *P* menjadi sama dengan  $\tau_{xy}/\cos \phi$ . Sistem yang diperoleh dengan cara di atas adalah konsisten.

‡ A.E.H. Love, *Mathematical Theory of Elasticity* (4th ed.), New York: Dover, 1944, hal. 348.



**Gambar 6-17** Terdapatnya gaya-gaya geser dalam flens balok I yang bekerja tegaklurus pada sumbu simetri

cara yang serupa pula. Perubahan  $q_c$  dan  $\tau_c$  yang sama tersebut berlaku untuk kedua sisi dari sumbu simetri irisan penampang. Tetapi seperti dapat dilihat dari Gambar 6-17(b), besaran-besaran ini dalam bidang irisan penampang bekerja dengan arah yang *berlawanan* antara kedua belah sisi. Perubahan tegangan geser atau aliran geser ini ditemukan dalam Gambar 6-17(c) di mana untuk penyederhanaan web diandaikan tipis sekali.

Sebagaimana biasa dengan semua tegangan, tegangan-tegangan geser yang terlihat dalam Gambar 6-17(c) bila diintegrasikan atas luas di mana tegangan-tegangan bekerja adalah setara dengan satu gaya. Besar gaya horisontal  $F_1$  untuk *setengah flens*. Gambar 6-17(d), adalah sama dengan tegangan geser *rata-rata* dikalikan dengan *setengah dari seluruh luas flens*, yaitu

$$F_1 = \left( \frac{\tau_{c-\max}}{2} \right) \left( \frac{bt}{2} \right) \quad \text{atau} \quad F_1 = \left( \frac{q_{c-\max}}{2} \right) \left( \frac{b}{2} \right)$$

Bila sebuah balok I meneruskan gaya geser vertikal, maka gaya-gaya horisontal ini dapat bekerja dalam flens atas dan bawah. Tetapi karena sifat *simetri* irisan penampang tersebut, maka gaya-gaya yang sama besarnya ini terjadi dalam berpasang-pasangan dengan arah yang *saling berlawanan*, hingga pengaruh gaya-gaya ini menjadi tidak ada sama sekali.

Untuk menentukan aliran geser pada sambungan flens dan badan (yaitu irisan *a-a* dalam Gambar 6-17(a)), *seluruh* luas flens dikalikan dengan  $\bar{y}$  haruslah digunakan untuk menghitung harga  $Q$ . Tetapi karena untuk mendapatkan  $q_{c-\max}$  setengah luas flens dikalikan dengan  $\bar{y}$  yang telah digunakan, maka *penjumlahan kedua arus geser horisontal* yang datang dari sisi yang berlawanan akan memberikan aliran geser *vertikal\** pada irisan *a-a*. Jadi berbicara dengan kiasan, aliran geser horisontal "berputar sebesar  $90^\circ$  dan bergabung menjadi aliran geser vertikal." Kemudian aliran geser pada berbagai potongan horisontal melalui badan dapat ditentukan dengan cara yang telah diterangkan dalam pasal-pasal yang lalu. Selain itu, sebagai perlawanan terhadap gaya geser vertikal  $V$  dalam balok I yang ber dinding tipis terutama terjadi dalam badan, maka ini juga dapat dilihat dalam Gambar 6-17(d). Sifat tegangan geser dan aliran geser *dalam badan* serupa dengan arah gaya geser  $V$ . Perlu diketahui bahwa aliran geser vertikal "terpecah" begitu mencapai flens bawah. Ini digambarkan dalam Gambar 6-17(d) oleh dua gaya  $F_1$  yang merupakan hasil aliran geser horisontal dalam flens.

Gaya geser yang bekerja pada suatu irisan balok I diperlihatkan dalam Gambar 6-17(d) dan untuk keseimbangan, *gaya-gaya vertikal terpakai haruslah bekerja pada titik berat daerah irisan penampang* hingga bertepatan dengan  $V$ . Bila gaya-gaya amat terpakai, maka pada batang tersebut *tidak akan terjadi puntiran*. Ini adalah benar untuk semua irisan yang mempunyai daerah irisan penampang dengan sumbu simetri. Untuk menghindarkan adanya puntiran dalam batang-batang yang demikian, maka gaya-gaya terpakai haruslah bekerja pada bidang simetri dari irisan penampang dan sumbu balok. Balok dengan irisan yang tidak simetris akan kita bahas berikut ini

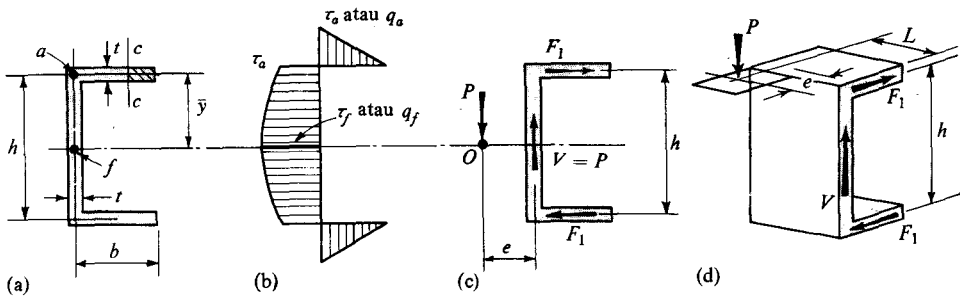
#### \*6-7 PUSAT GESER (SHEAR CENTRE)

Tinjaulah balok yang penampangnya berbentuk saluran atau kanal, Gambar 6-18(a). Dinding kanal ini dianggap tipis sekali hingga semua perhitungan dapat didasarkan pada ukuran dengan *garis tengah* dinding tersebut. Pelenturan kanal ini terjadi sekitar sumbu horisontal dan walaupun penampang ini tidak mempunyai suatu sumbu simetri yang vertikal, kita menganggap bahwa tegangan lentur diberikan oleh rumus lenturan yang biasa. Dengan mengandaikan lagi bahwa kanal ini akan memberikan perlawanan terhadap gaya geser vertikal, maka momen lentur akan berubah dari satu irisan ke irisan yang lain melalui balok tersebut.

Dengan mengambil suatu potongan yang tertentu seperti *c-c* dalam Gambar 6-18(a),  $q$  dan  $\tau$  dapat diperoleh dengan cara yang biasa. Disepanjang kaki kanal yang horisontal, besaran-besaran ini akan berubah secara linier dari pinggir yang bebas, tepat seperti yang terjadi dengan besaran-besaran tersebut pada salah satu sisi flens dalam

\* Pernyataan yang sama tidak dapat dilakukan dengan melihat kepada tegangan geser karena tebal flens bisa berbeda dari badan.





**Gambar 6-18** Penentuan letak pusat geser untuk kanal

balok I. Perubahan  $q$  dan  $\tau$  adalah parabolik disepanjang badan. Perubahan besaran-besaran ini dapat dilihat dalam Gambar 6-18(b) di mana mereka digambarkan sepanjang garis tengah irisan kanal.

Tegangan geser rata-rata  $\tau_a/2$  dikalikan dengan luas flens memberikan gaya  $F_1 = (\tau_a/2)bt$ , dan penjumlahan tegangan geser vertikal atas luas badan adalah gaya geser  $V = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau t dy$ . \* Gaya-gaya geser ini yang bekerja dalam bidang irisan penampang diperlihatkan dalam Gambar 6-18(c) dan menunjukkan bahwa gaya  $V$  dan kopel  $F_1 h$  terbentuk dalam irisan pada kanal tersebut. Secara fisis ada kecenderungan untuk kanal tersebut melintir terhadap sumbu longitudinal. Untuk mencegah pemelintiran dan mempertahankan kemampuan penggunaan distribusi tegangan lentur yang diandaikan semula, maka gaya terpakai luar harus dipergunakan dengan cara seperti *mengimbangi kopel dalam  $F_1 h$* . Umpamanya, tinjaulah segmen sebuah balok kantilever yang diabaikan beratnya, yang terlihat dalam Gambar 6-18(d), terhadap mana gaya vertikal  $P$  bekerja sejajar dengan badan pada jarak  $e$  dari *garis tengah* badan. Untuk menjaga gaya terpakai dalam keadaan seimbang, maka gaya geser  $V$  yang *sama besar dan berlawanan arah* harus dibentuk dalam badan. Demikian juga, *untuk membuat tidak terjadi pemelintiran dalam kanal*, kopel  $Pe$  haruslah sama dengan kopel  $F_1 h$ . Pada irisan yang sama dari kanal, momen lenturan  $PL$  mendapatkan perlawanan dari tegangan lentur *yang biasa* (ini tidak terlihat dalam gambar).

Suatu ungkapan mengenai jarak  $e$  dapat kita peroleh sekarang, yang menentukan letak bidang pada mana gaya  $P$  harus bekerja hingga menyebabkan tidak terjadi pemelintiran dalam saluran. Jadi, dengan mengingat bahwa  $F_1 h = Pe$  dan  $P = V$ ,

$$e = \frac{F_1 h}{P} = \frac{(1/2)\tau_a b t h}{P} = \frac{b t h}{2P} \frac{V Q}{I t} = \frac{b t h}{2P} \frac{V b t (h/2)}{I t} = \frac{b^2 h^2 t}{4I} \quad (6-10)$$

\* Bila tebal kanal berubah-ubah, adalah baik untuk mendapatkan  $F_1$  dan  $V$  dengan menggunakan aliran geser yang bersangkutan, yaitu  $F_1 = (q_a/2)b$  dan  $V = \int_{-h/2}^{+h/2} q dy$ . Karena flens adalah tipis, maka gaya geser vertikal yang dibawakan oleh flens tersebut dapat diabaikan.

Perhatikanlah bahwa jarak  $e$  tidak tergantung pada besar gaya terpakai  $P$ , begitu pula letaknya disepanjang balok. Jarak  $e$  adalah sifat suatu irisan dan diukur disebelah luar dari pusat badan menuju gaya terpakai.

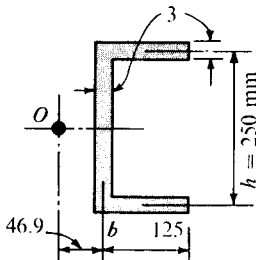
Penyelidikan yang serupa dapat pula dilakukan untuk menentukan letak bidang pada mana gaya-gaya horisontal terpakai harus bekerja agar tidak terjadi pemelintiran dalam kanal. Tetapi untuk saluran yang ditinjau tersebut, berdasarkan simetri, dapat dilihat bahwa bidang ini bersamaan dengan bidang netral dari kasus yang sebelumnya. Perpotongan kedua bidang yang saling tegaklurus ini dengan bidang irisan penampang memberikan suatu titik yang disebut *pusat geser*. Pusat geser tersebut dilambangkan dengan huruf  $O$  dalam Gambar 6-18(c). Pusat geser untuk setiap irisan penampang terletak dalam garis membujur yang sejajar dengan sumbu balok. *Setiap gaya melintang\* yang bekerja melalui pusat gaya mengakibatkan tidak terjadi pemelintiran dalam balok.* Suatu penyelidikan yang terperinci dari soal ini memperlihatkan bahwa bila sebuah batang dengan setiap daerah irisan penampang mengalami pemelintiran, maka pemelintiran tersebut terjadi sekitar pusat geser, yang memang tetap tidak berubah. Untuk alasan inilah kadang-kadang pusat geser disebut pula sebagai *pusat pemelintiran* (centre of twist).

Untuk daerah irisan penampang yang mempunyai satu sumbu simetri, maka pusat geser selalu terletak pada sumbu simetri. Untuk yang mempunyai dua sumbu simetri, pusat geser akan berimpit dengan titik berat daerah irisan penampang. Hal ini adalah benar untuk balok I yang ditinjau dalam pasal yang lalu.

Letak yang eksak dari pusat geser untuk penampang yang tidak simetris dari bahan yang tebal adalah sukar didapatkan dan hanya diketahui untuk beberapa kasus saja. Bila bahan tersebut *tipis*, sebagai telah kita andaikan dalam pembahasan yang terdahulu, maka kita dapat menggunakan selalu prosedur-prosedur yang relatif sederhana untuk menentukan letak pusat geser dari irisan penampang. Metoda yang biasa terdiri dari penentuan gaya-gaya geser, seperti  $F_1$  dan  $V$  di atas, pada suatu irisan dan kemudian mendapatkan letak gaya luar yang diperlukan untuk menjaga gaya-gaya ini berada dalam keseimbangan.

#### CONTOH 6-6

Tentukanlah letak kira-kira pusat geser untuk balok berpenampang kanal seperti terlihat dalam Gambar 6-19.



Gambar 6-19

\* Lihatlah Pasal 7-6 untuk metoda penelaahan gaya-gaya lateral yang tidak terletak dalam bidang yang sejajar dengan salah satu bidang utama dari daerah irisan penampang.

### PENYELESAIAN

Daripada menggunakan Persamaan 6-10 secara langsung, kita dapat membuat beberapa penyederhanaan lanjutan. Momen lembam saluran yang berdinding tipis terhadap sumbu netralnya dapat kita peroleh dengan cukup teliti dengan mengabaikan momen inersia dari flens *terhadap sumbunya sendiri* (hanya!). Ungkapan ini untuk  $I$  dapat dimasukkan ke dalam Persamaan 6-10 dan setelah penyederhanaan, rumus untuk  $e$  dari kanal dapat diperoleh

$$I \approx I_{\text{badan}} + (Ad^2)_{\text{flens}} = \frac{th^3}{12} + 2bt\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{th^3}{12} + \frac{bth^2}{2}$$

$$e = \frac{b^2h^2t}{4I} = \frac{b^2h^2t}{4\left(\frac{bth^2}{2} + \frac{th^3}{12}\right)} = \frac{b}{2 + \frac{h}{3b}} \quad (6-10a)$$

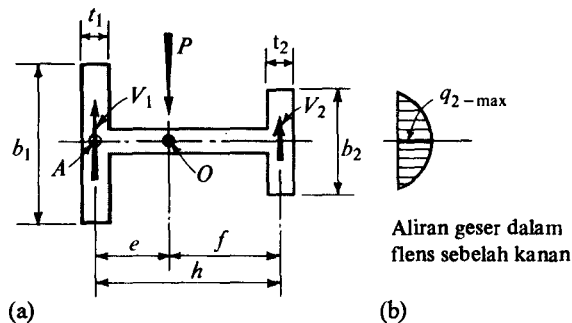
Persamaan 6-10a menunjukkan bahwa bila lebar flens  $b$  sangat besar, maka  $e$  mendekati harga maksimumnya sebesar  $b/2$ . Bila  $h$  sangat besar,  $e$  akan mendekati harga minimum yaitu nol. Yang lainnya,  $e$  dianggap mempunyai harga antara kedua batas ini. Untuk data numerik yang diberikan oleh Persamaan 6-19,

$$e = \frac{125}{2 + \frac{250}{(3)(125)}} = 46,9 \text{ mm}$$

Jadi pusat geser  $O$  adalah  $46,9 - 1,5 = 45,4 \text{ mm}$  dari permukaan vertikal luar kanal. Jawaban tersebut tidak akan lebih baik bila Persamaan 6-10 digunakan dalam perhitungan.

### CONTOH 6-7

Tentukanlah kira-kira letak pusat geser untuk penampang balok I yang terlihat dalam Gambar 6-20(a). Perhatikan bahwa kedua flens tidaklah sama.



Gambar 6-20

### PENYELESAIAN

Irisan penampang ini mempunyai sebuah sumbu simetri horisontal, dan pusat geser yang terletak padanya; di mana tepatnya pusat geser tersebut terletak masih harus di-

jawab. Gaya terpakai  $P$  mengakibatkan tegangan-tegangan lentur dan geser yang berarti *hanya dalam flens*, sedang pengaruh badan terhadap perlawanan gaya terpakai  $P$  boleh dikatakan tidak ada.

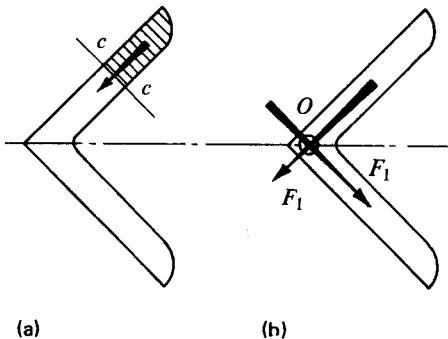
Ambillah gaya geser yang dilawan oleh flens balok sebelah kiri  $V_1$ , sedang flens sebelah kanan adalah  $V_2$ . Untuk keseimbangan,  $V_1 + V_2 = P$ . Demikian pula, untuk menghilangkan pemelintiran dari irisan, maka  $\Sigma M_A = 0$ ,  $Pe = V_2 h$  (atau  $Pf = V_1 h$ ). Jadi hanya  $V_2$  yang masih harus ditentukan untuk menyelesaikan soal tersebut. Ini dapat dilakukan dengan memperhatikan bahwa flens sebelah kanan sesungguhnya adalah balok sikuempat biasa. Tegangan geser (atau aliran geser) dalam balok seperti ini terdistribusi secara parabolis, lihat Gambar 6-20(b), dan oleh karena luas suatu parabola adalah dua pertiga alas kali tinggi maksimum, maka  $V_2 = \frac{2}{3} b_2 (q_2)_{\max}$ . Tetapi oleh karena gaya geser total  $V = P$ , maka oleh Persamaan 6-5  $(q_2)_{\max} = VQ/I = PQ/I$ , di mana  $Q$  adalah momen statis dari *flens kanan tengahan atas* dan  $I$  adalah momen lembam seluruh irisan. Jadi

$$Pe = V_2 h = \frac{2}{3} b_2 (q_2)_{\max} h = \frac{2}{3} \frac{h b_2 P Q}{I}$$

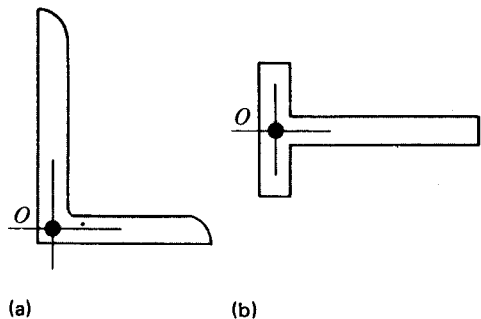
$$e = \frac{2 h b_2}{3 I} Q = \frac{2 h b_2}{3 I} \frac{b_2 t_2}{2} \frac{b_2}{4} = \frac{h}{I} \frac{t_2 b_2^3}{12} = \frac{h I_2}{I} \quad (6-11)$$

di mana  $I_2$  adalah momen lembam *flens sebelah kanan* terhadap sumbu netral. Dengan cara yang sama dapat pula dibuktikan bahwa  $f = h I_1 / I$ , di mana  $I_1$  berlaku pada *flens sebelah kiri*. Bila badan dari balok tipis, seperti mula-mula kita anggap, maka  $I \approx I_1 + I_2$  dan  $e + f = h$ , seperti yang kita harapkan.

Suatu penelaahan yang serupa membawa kepada kesimpulan bahwa pusat geser untuk sebuah siku yang simetris terletak pada perpotongan garis tengah dari kakinya seperti yang terlihat dalam Gambar-gambar 6-21(a) dan (b). Ini disebabkan oleh aliran geser pada setiap irisan, seperti  $c-c$ , berarah sepanjang garis tengah dari kaki. Aliran geser ini menghasilkan dua gaya yang identik  $F_1$  dalam kaki-kaki. Komponen vertikal dari gaya-gaya ini sama dengan gaya geser terpakai vertikal yang melalui  $O$ . Suatu keadaan yang analog didapati juga untuk setiap sudut atau irisan berbentuk T seperti yang ter-



Gambar 6-21 Pusat geser untuk siku simetris (sama kaki) yang terletak pada titik  $O$ .



Gambar 6-22 Pusat geser untuk penampang yang terlihat yang terletak pada titik  $O$ .

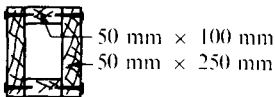
lihat dalam Gambar-gambar 6-22(a) dan (b). Letak dari pusat geser untuk berbagai batang penting sekali untuk penggunaan-penggunaan pesawat terbang.\*

### SOAL-SOAL UNTUK DISELESAIKAN

6-1. Dengan menganggap bahwa sebuah bagian konstruksi yang terdiri dari lima buah papan kayu  $50 \times 150$  mm yang utuh digabung bersama dengan baut, seperti terlihat dalam pandangan irisan penampang dalam Gambar 6-5(a), buktikanlah bahwa  $A_{fghj}\bar{y}_1 = A_{fgpn}\bar{y}_2$ , di mana  $\bar{y}_1$  adalah jarak dari titik berat seluruh luas kepada titik berat luas  $A_{fghj}$ , dan  $\bar{y}_2$  adalah jarak yang sama untuk luas  $A_{fgpn}$ .

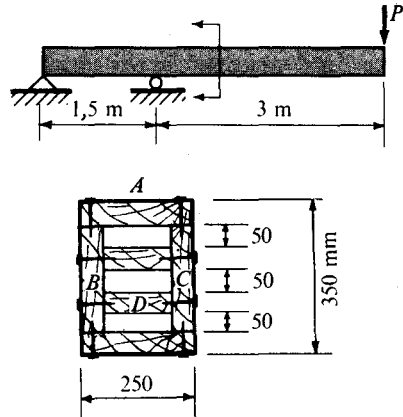
6-2. Sebuah kantilever yang panjangnya 3 m dibuat dari lima buah papan kayu  $50 \times 150$  mm berukuran utuh. Irisan penampangnya sama dengan yang kita lihat dalam Gambar 6-5(a). Papan-papan tersebut ditempelkan sesamanya dengan baut vertikal berdiameter 20 mm yang diberi jarak sebesar 120 mm antara baut-baut yang berdekatan. Balok ini membawa beban yang terdistribusi merata termasuk beratnya sendiri, sebesar  $3,0$  kN/m. Hitunglah tegangan geser dalam baut yang terletak  $1,5$  m dari tumpuan. Buatlah penyelidikan ini pada keempat bidang pertemuan papan-papan tersebut.

6-3. Sebuah balok kayu berongga dibuat dari papan-papan ukuran utuh seperti yang terlihat dalam gambar. Pada irisan yang ditinjau, gaya geser vertikal total dalam balok menjadi sebesar  $4640$  N dan momen lentur sebesar  $70$  N.m. Pemakuan harus dilakukan dengan paku-paku yang baik untuk masing-masing geser sebesar  $250$  N. Berapakah seharusnya jarak antara masing-masing paku? *Jawab:*  $50$  mm.



GAMBAR SOAL 6 - 3

6-4. Sebuah balok kayu panjangnya  $4,5$  m, menggantung sepanjang  $3$  m dan membawa suatu gaya terpusat  $P = 3945$  N pada ujungnya (lihat gambar). Balok tersebut terbuat dari papan setebal  $50$  mm berukuran utuh yang dipaku sesamanya dengan paku yang mempunyai perlawanan geser masing-masing sebesar  $400$  N. Momen lembam seluruh irisan penampang adalah kira-kira  $740 \times 10^6$  mm<sup>4</sup>. (a) Berapakah seharusnya jarak longitudinal antara paku-paku yang menghubungkan papan  $A$  dengan papan-papan  $B$  dan  $C$  dalam daerah gaya geser tinggi? (b) Untuk daerah yang sama, berapakah seharusnya jarak longitudinal antara paku-paku yang menghubungkan papan  $D$  dengan papan-papan  $B$  dan  $C$ ? Dalam perhitungan abaikanlah berat balok tersebut. *Jawab:* (a)  $40$  mm, (b)  $200$  mm.

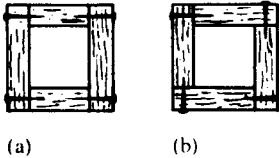


GAMBAR SOAL 6 - 4

6-5. Sebuah balok kotak ukuran  $250$  mm bujur-sangkar terbuat dari 4 buah keping kayu setebal  $50$  mm. Dua disain yang mungkin untuk ditinjau seperti yang terlihat dalam gambar. Selanjutnya, disain yang diperlihatkan dalam

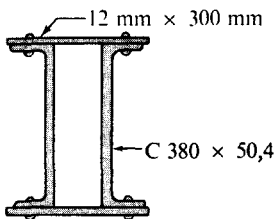
\* Untuk perincian lebih lanjut, lihatlah E.F. Bruhn, *Analysis and Design of Flight Vehicle Structures*, Cincinnati, Ohio: Tri-State, 1965. Lihat juga, P. Kuhn, *Stresses in Aircraft and Shell Structures*, New York: McGraw-Hill, 1956.

gambar (a) dapat diputar  $90^\circ$  dalam penggunaan. (a) Pilihlah disain yang membutuhkan pemakuan yang sedikit untuk meneruskan gaya geser, (b) Bila gaya geser yang harus diteruskan oleh anggota ini adalah 3020 N, berapakah seharusnya jarak paku untuk disain yang terbaik? Pemakuan harus dilakukan dengan paku yang baik untuk geser yang masing-masing sebesar 240 N. *Jawab:* (b) 60 mm.



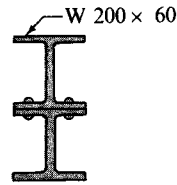
SOAL GAMBAR 6 - 5

6-6. Sebuah balok dibuat dari dua buah saluran dan dua buah pelat tutup seperti yang terlihat dalam gambar. Bila pada irisan yang diselidiki bagian konstruksi ini mengantarkan gaya geser vertikal sebesar 650 kN dan momen sebesar 50 kN·m, berapakah jarak antara paku-paku keling 22 mm yang terdapat pada masing-masing baris? Anggaplah bahwa sebuah paku keling 22 mm adalah baik untuk geser 36,2 kN. *Jawab:*  $I = 540 \times 10^6 \text{ mm}^4$ ; 85 mm.



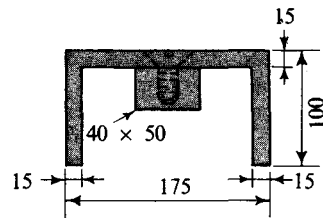
GAMBAR SOAL 6 - 6

6-7. Dua buah balok W 200 x 60 cukup dirapatkan bersama dengan dua baris paku keling, seperti yang terlihat dalam gambar, untuk membentuk kedua balok berlaku sebagai satu kesatuan. Pada irisan yang ditinjau, gaya geser vertikal total adalah 180 kN dan momen lentur 3600 N·m. Dengan menggunakan paku keling 22 mm, yang mana dalam geser tunggal adalah baik masing-masing untuk 30 kN, tentukanlah jarak yang baik antar paku-paku tersebut.



GAMBAR SOAL 6 - 7

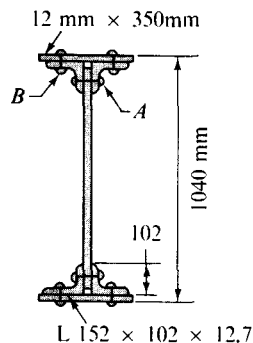
6-8. Sebuah batang sikuempat 40 mm x 50 mm dipasang pada irisan berbentuk saluran dengan sekrup mesin 10 mm pada 150 mm ditengah-tengah seperti yang diperlihatkan dalam gambar. Bila irisan tersebut meneruskan gaya geser vertikal sebesar 20 kN, (a) tentukanlah tegangan geser dalam sekrup mesin; (b) tentukanlah tegangan geser pada sambungan horisontal antara badan dengan flens; (c) hitunglah tegangan geser maksimum.



(Semua ukuran dalam mm)

GAMBAR SOAL 6 - 8

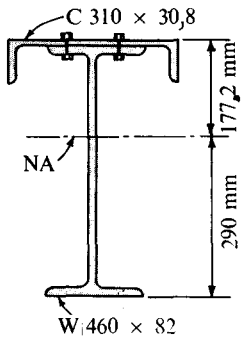
6-9. Sebuah penopang pelat terbuat dari dua buah plat tutup 350 mm x 12 mm, empat buah siku 152 x 102 x 12,7 mm, dan sebuah plat badan 1000 x 10 mm seperti yang terlihat dalam gambar. Bila pada irisan yang ditinjau diteruskan gaya geser vertikal total sebesar 650 kN,



GAMBAR SOAL 6 - 9

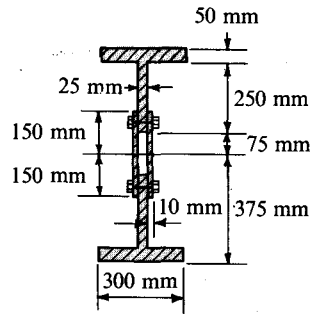
berapakah seharusnya jarak-jarak antar paku keling pada *A* dan *B*? Momen lembam penopang sekitar sumbu netral *I* adalah  $5922 \times 10^6 \text{ mm}^4$ . Anggaplah paku-paku keling berdiameter 22 mm dan perhatikanlah bahwa sebuah paku keling adalah baik untuk 30 kN dalam geser tunggal, 59 kN dalam geser ganda, dan 50 kN dalam bantalan pada pelat 10 mm. *Jawab*: Jarak antar paku keling *A* adalah 89 mm.

**6-10.** Sebuah balok yang ditopang secara sederhana, penampangnya terdiri dari sebuah C 310  $\times$  30,8 dan sebuah W 460  $\times$  82 yang diperkuat bersama oleh baut-baut berdiameter 20 mm yang berjarak antara secara longitudinal sebesar 150 mm dalam masing-masing baris seperti yang terlihat dalam gambar. Bila balok ini dibebani dengan gaya terpusat ke bawah dari 500 kN di tengah-tengah bentangan, berapakah tegangan geser dalam baut? Abaikanlah berat balok tersebut. Momen lembam *I* dari seluruh batang terhadap sumbu netral adalah  $510 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .



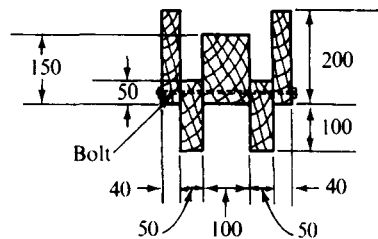
GAMBAR SOAL 6 – 10

**6-11.** Sebuah penopang flens-T dipergunakan untuk menumpu beban 900 kN di tengah-tengah bentang sederhana sepanjang 7 m. Ukuran-ukuran penopang tersebut diberikan dalam gambar dalam pandangan irisan penampang. Bila paku-paku keling berdiameter 22 mm mempunyai jarak antara 125 mm secara longitudinal, berapakah tegangan geser yang akan terbentuk dalam paku-paku keling oleh pembebanan terpakai? Momen lembam dari penopang sekitar sumbu netral adalah kira-kira  $4300 \times 10^6 \text{ mm}^4$ . *Jawab*: 112 MPa.



GAMBAR SOAL 6 – 11

**\*6-12.** Sebuah balok terbuat dari lima buah kayu yang terpisah dibaut bersama, seperti yang terlihat dalam gambar dalam pandangan irisan penampang. Baut-baut tersebut masing-masing mempunyai penampang seluas  $320 \text{ mm}^2$  dan diberi jarak antara secara longitudinal sebesar 150 mm. Bila bentangan balok ini panjangnya 2,5 m dan menumpu sebuah beban sebesar 18 kN/m termasuk beratnya sendiri, berapakah tegangan geser maksimum yang terbentuk dalam baut? Momen lembam irisan balok adalah  $243 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .

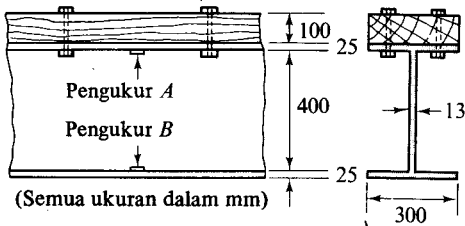


(Semua ukuran dalam mm)

GAMBAR SOAL 6 – 12

**\*6-13.** Sebuah balok gabungan yang ditopang secara sederhana membawa sebuah beban terbagi rata di atas sebuah bentangan sepanjang 10 meter, terbuat dari sebuah kayu  $100 \times 300 \text{ mm}$  yang dihubungkan dengan baut kepada flens atas sebuah balok baja seperti yang terlihat dalam gambar (semua ukuran dalam gambar adalah dalam mm). Pengukur regangan yang diletakkan di tengah-tengah bentangan pada permukaan flens baja sebelah dalam menunjukkan harga-harga regangan sebagai berikut: Peng-

ukur regangan  $A$ :  $\epsilon = -420 \times 10^{-6}$ ; Pengukur regangan  $B$ :  $\epsilon = +700 \times 10^{-6}$ . (a) Hitunglah gaya total yang bekerja pada irisan kayu ini. (b) Bila baut-baut tersebut diletakkan dua-dua dalam satu baris secara seragam dengan selang antara 600 mm, berapakah gaya geser rata-rata yang dibawa oleh masing-masing baut? Anggaplah masing-masing baut menyumbang secara bersamaan terhadap perlawanan gaya total. Ambillah  $E_{\text{baja}} = 200.000 \text{ MN/m}^2$ , dan  $E_{\text{kayu}} = 10.000 \text{ MN/m}^2$ . *Jawab*: 118 kN.



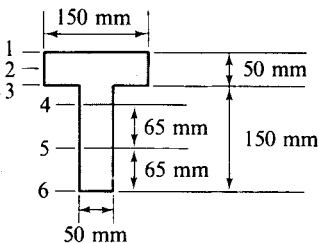
GAMBAR SOAL 6 – 13

6-14. Bila tegangan geser ijin untuk Douglas Fir adalah  $700 \text{ kN/m}^2$ , tentukanlah kemampuan balok yang berpenampang utuh  $50 \times 100 \text{ mm}$  untuk melawan gaya geser vertikal bila diletakkan dengan ukuran vertikal 100 mm; bila diletakkan dengan ukuran vertikal 50 mm.

6-15. Buktikanlah bahwa rumus yang analog dengan Persamaan 6-7 untuk balok yang berpenampang lingkaran padat dengan luas  $A$ , adalah  $\tau_{\text{max}} = \frac{4}{3} V/A$ .

6-16. Buktikanlah bahwa rumus yang analog dengan Persamaan 6-7 untuk tabung-tabung melingkar berdinding tipis yang bekerja sebagai balok yang luas total penampangnya  $A$  adalah  $\tau_{\text{max}} = 2 V/A$ .

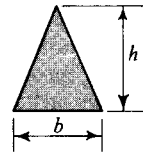
6-17. Sebuah balok besi cor berpenampang T terlihat dalam gambar ( $I = 53,1 \times 10^6 \text{ mm}^4$ ).



GAMBAR SOAL 6 – 17

Bila balok ini meneruskan gaya geser vertikal 240 kN, hitunglah tegangan geser pada tingkatan-tingkatan yang ditunjukkan. Buatlah hasil mengenai plot yang serupa dengan yang diperlihatkan dalam Gambar 6-14(e).

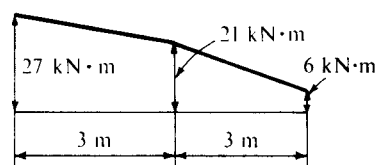
6-18. Sebuah balok mempunyai daerah irisan penampang dalam bentuk segitiga sama kaki di mana alas  $b$  adalah sama dengan setengah tingginya  $h$ . (a) Dengan menggunakan kalkulus dan rumus penelaahan tegangan konvensional, tentukanlah letak tegangan geser maksimum yang disebabkan oleh gaya geser vertikal  $V$ . Buatlah sketsa mengenai kelakuan dalam mana tegangan geser berubah sepanjang irisan. (b) Bila  $b = 80 \text{ mm}$ ,  $h = 160 \text{ mm}$ , dan  $\tau_{\text{max}}$  terbatas pada  $800 \text{ kN/m}^2$ , berapakah gaya geser vertikal maksimum  $V$  yang dapat dimuat oleh irisan ini? *Jawab*: (a)  $h/2$ .



GAMBAR SOAL 6 – 18

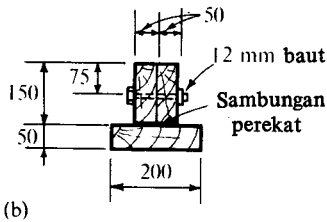
6-19. Sebuah balok berpenampang segitiga samakaki dengan alas  $b = 150 \text{ mm}$  dan tinggi  $h = 450 \text{ mm}$  mengalami gaya geser sebesar 27000 N pada sebuah irisan. Tentukanlah tegangan geser horizontal pada sumbu netral dan tengah-tengah tinggi. Setelah menentukan beberapa titik tambahan, perlihatkanlah hasilnya pada plot yang serupa dengan yang dari Gambar 6-12(c). (*Petunjuk*: lihatlah Soal 6-18). *Jawab*:  $\tau_{\text{max}} = 1,2 \text{ MPa}$ .

6-20. Sebuah balok dibebani sedemikian rupa hingga diagram momen untuknya berubah-ubah seperti yang terlihat dalam gambar. (a) Hitunglah gaya geser longitudinal maksimum dalam baut berdiameter 12 mm yang berjarak antara 300 mm. (b) Hitunglah tegangan geser maksimum dalam sambungan perekat.



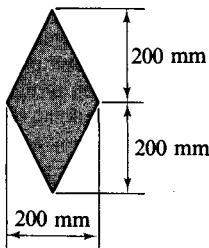
(a) Diagram momen





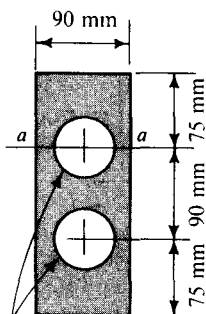
GAMBAR SOAL 6 – 20

6-21. Sebuah balok berpenampang belah ketupat terlihat dalam gambar. Anggaplah bahwa balok ini meneruskan gaya geser vertikal sebesar 5000 N, dan selidikilah tegangan geser pada tingkatan pada jarak 50 mm mulai dari titik puncak. Buatlah hasil-hasil ini pada plot yang serupa dengan yang terlihat dalam Gambar 6-12(c).



GAMBAR SOAL 6 – 21

6-22. Sebuah balok besi cor mempunyai ukuran irisan penampang seperti yang terlihat dalam gambar. Bila tegangan-tegangan ijin adalah 50 MPa dalam tarik, 205 MPa dalam tekan,

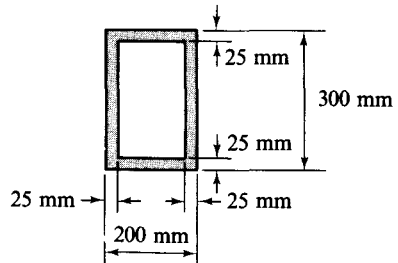


Lubang-lubang diam 50 mm

GAMBAR SOAL 6 – 22

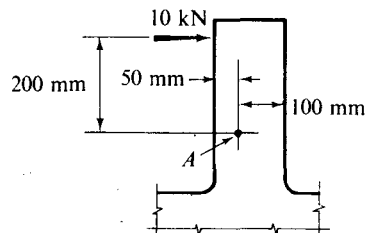
dan 55 MPa dalam geser, berapakah gaya geser ijin maksimum dan momen lentur ijin maksimum dari balok ini? Tinjau hanya pembebanan vertikal balok dan batasilah perhitungan-perhitungan pada lubang sampai irisan a-a. *Jawab:* 417 kN, 39,6 kN·m.

6-23. Sebuah irisan kotak yang mempunyai ukuran seperti yang diperlihatkan dalam gambar dipergunakan untuk balok di atas tumpuan yang sederhana. Dalam daerah tertentu sepanjang balok terdapat momen yang berubah secara linier dari 4000 N·m sepanjang sumbu balok. Berapakah tegangan geser maksimum pada irisan dalam daerah ini?



GAMBAR SOAL 6 – 23

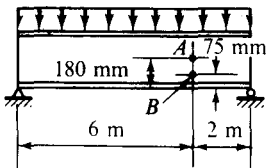
6-24. Sebuah braket mesin mempunyai penampang sikuempat dari 40 × 150 mm dihadapkan kepada gaya terpakai secara terpusat horisontal sebesar 10 kN seperti yang terlihat dalam gambar. Tentukanlah tegangan-tegangan geser yang bekerja pada elemen-elemen kecil takberhingga yang terletak pada garis tegak lurus pada bidang kertas di titik A. Tunjukkanlah hasil-hasilnya pada elemen yang terisolasi. Karena elemen ini dihadapkan pula kepada momen lentur, tanpa menghitung tegangan ini, tentukanlah tegangan normal dari sikap yang tepat yang bekerja pada elemen tersebut. *Jawab:* 2,22 MN/m<sup>2</sup>.



GAMBAR SOAL 6 – 24

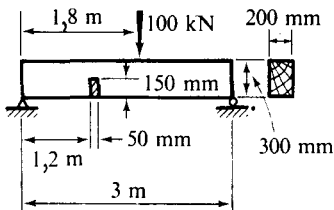
6-25. Tentukanlah tegangan geser maksimum pada irisan  $A-A$  untuk braket mesin dalam Contoh 5-5. Perhatikanlah hasil-hasilnya pada elemen kecil takberhingga yang ditarik dekat benda bebas dari braket tersebut. Apakah tegangan lentur bekerja juga pada elemen ini?

6-26. Sebuah balok  $W\ 360 \times 125$  menumpu beban yang didistribusikan secara merata dari  $60\text{ kN/m}$ , termasuk beratnya sendiri seperti yang terlihat dalam gambar. Dengan menggunakan Persamaan 6-6, tentukanlah tegangan-tegangan geser yang bekerja pada elemen di titik-titik  $A$  dan  $B$ . Perhatikanlah sikap besaran-besaran yang dihitung pada elemen-elemen kecil takberhingga. Bila tegangan lentur bekerja pula pada elemen-elemen ini, tanpa perhitungan-perhitungan tambahan, tunjukkanlah tegangan normal dari sikap yang tepat yang bekerja pada elemen-elemen tersebut.



GAMBAR SOAL 6 - 26

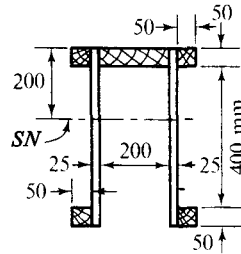
\*6-27. Sebuah balok padat berpenampang  $200 \times 300\text{ mm}$  dibebani seperti yang terlihat dalam gambar. Dari balok ini isolasikanlah sebuah segmen  $50 \times 150 \times 200\text{ mm}$  yang terlihat sebagai daerah bergaris-garis dalam gambar. Kemudian pada diagram benda bebas dari segmen ini tunjukkanlah letak, besar dan sikap semua gaya-gaya resultante yang bekerja padanya yang disebabkan oleh tegangan-tegangan lentur dan geser. Abaikanlah berat balok tersebut.



GAMBAR SOAL 6 - 27

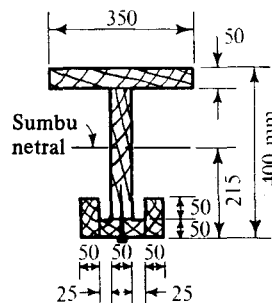
6-28. Sebuah penopang yang dibuat dari kayu lapis mempunyai ukuran-ukuran penampang se-

perti yang terlihat dalam gambar. Semua sambungan longitudinal direkat. Pada irisan yang kritis penopang ini haruslah melawan gaya geser vertikal total dari  $15\text{ kN}$ . Tentukanlah mutu dari perekat yang dibutuhkan dengan menyebutkan kapasitasnya untuk melawan tegangan geser dikendalikan oleh sambungan kritis. Untuk irisan sepenuhnya  $I_{SN} = 1425 \times 10^6\text{ mm}^4$ .



GAMBAR SOAL 6 - 28

6-29. Sebuah balok kayu bentuk-I dibuat dengan flens bawah yang sempit oleh karena pembatasan ruang, seperti yang terlihat dalam gambar. Flens bawah ini diperkuat terhadap badan oleh paku-paku yang berjarak antara  $40\text{ mm}$  secara longitudinal, sedangkan papan-papan yang vertikal pada flens bawah direkat ditempat. Tentukanlah tegangan dalam sambungan-sambungan rekat dan gaya yang dibawa oleh masing-masing paku dalam sambungan berpaku bila balok tersebut dihadapkan kepada gaya geser vertikal dari  $25\text{ kN}$ . Momen inersia untuk sepuh irisan sekitar sumbu netral adalah  $1030 \times 10^6\text{ mm}^4$ .

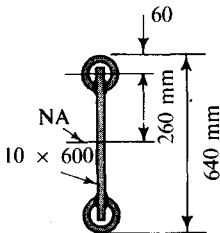


GAMBAR SOAL 6 - 29

\*6-30. Sebuah balok kantilever baja terbuat dari dua buah struktur berbentuk  $T$  yang dilas sesamanya sebagai yang terlihat dalam gambar.

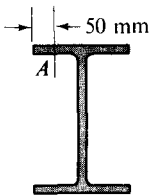


6-34. Sebuah balok dibuat dengan membuat celah pada pipa-pipa baja berdiameter 100 mm secara longitudinal (memanjang) dan kemudian dilas secara hati-hati kepada pelat badan  $600 \times 10$  mm seperti yang terlihat dalam gambar. Momen inersia  $I$  dari irisan gabungan tersebut terhadap sumbu netral adalah  $463 \times 10^6 \text{ mm}^4$ . Bila pada irisan tertentu balok ini meneruskan gaya geser vertikal dari 180 kN, tentukanlah tegangan geser dalam pipa dan di dalam pelat badan pada tingkatan 260 mm di atas sumbu netral.



GAMBAR SOAL 6 – 34

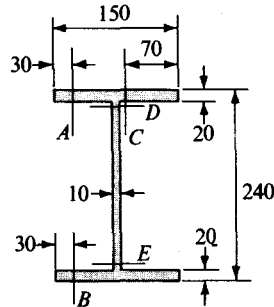
6-35. Tentukanlah tegangan geser sepanjang irisan  $A$  yang terlihat dalam gambar untuk balok W 250  $\times$  31 yang melawan gaya geser vertikal 90 kN dan momen lentur 3,5 kN.m.



GAMBAR SOAL 6 – 35

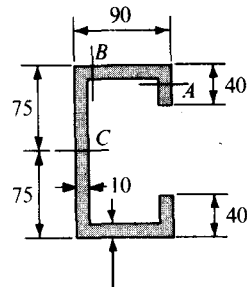
\*6-36. Sebuah balok yang mempunyai penampang dengan ukuran-ukuran yang diperlihatkan dalam gambar berada dalam daerah di mana terdapat gaya geser konstan dan vertikal positif sebesar 100 kN. (a) Hitunglah aliran geser  $q$  yang bekerja pada masing-masing dari lima irisan yang ditunjukkan dalam gambar. (b) Dengan menganggap suatu momen lentur positif sebesar 27000 N.m pada sebuah irisan dan momen yang lebih besar pada irisan yang berdampingan yang berjarak 10 mm jauhnya, tarikhlah sketsa-sketsa isometrik masing-masing segmen balok yang dipindahkan oleh irisan-irisan yang berjarak 10

mm antara sesamanya dan kelima irisan ( $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , dan  $E$ ) yang terlihat dalam gambar, sedang pada sketsa-sketsa tersebut tunjukkanlah semua gaya-gaya yang bekerja pada segmen. Abaikanlah tegangan geser vertikal dalam flens. Semua ukuran dalam mm.



GAMBAR SOAL 6 – 36

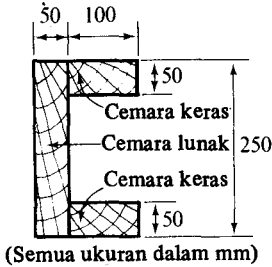
6-37. Sebuah balok yang mempunyai penampang dengan ukuran-ukuran seperti yang diperlihatkan dalam gambar mengantarkan suatu gaya geser vertikal  $V = 30$  kN yang bekerja melalui pusat geser. Tentukanlah tegangan-tegangan geser pada irisan-irisan  $A$ ,  $B$ , dan  $C$ . Momen inersia  $I$  sekitar sumbu netral adalah  $12,2 \times 10^6 \text{ mm}^4$ . Tebal diseluruh bahan adalah 10 mm.



GAMBAR SOAL 6 – 37

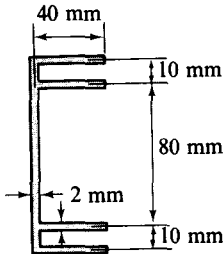
6-38. Sebuah balok kantilever yang panjangnya 1,2 m dibangun dari dua macam papan pohon cemara direkat sesamanya seperti yang terlihat dalam gambar. Suatu gaya terpusat ke atas dari 4000 N harus diberikan kepada balok ini dengan cara yang sedemikian rupa hingga tidak menyebabkan terjadinya tegangan-tegangan

puntiran. Dimanakah harusnya gaya tersebut dipergunakan? Anggaplah bahwa papan-papan yang kita tinjau tersebut adalah tipis. Untuk papan cemara yang keras  $E = 10.000 \text{ MN/m}^2$ ; untuk cemara yang lunak  $E = 7000 \text{ MN/m}^2$ . (Petunjuk: transformasikan irisan tersebut ke dalam irisan padanan dari satu macam bahan).



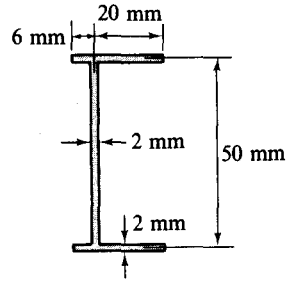
GAMBAR SOAL 6 – 38

\*6-39 sampai 6-42. Tentukanlah letak pusat geser untuk balok-balok yang mempunyai penampang dengan ukuran-ukuran yang terlihat

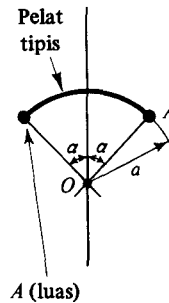


GAMBAR SOAL 6 – 39

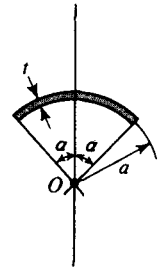
dalam gambar-gambar yang bersangkutan. Dalam Soal 6-41 anggaplah bahwa daerah penampang dari pelat dapat diabaikan terhadap daerah penampang  $A$  dari flens. *Jawab: Soal 6-41:  $e = (\alpha/\sin \alpha)a$  dari 0. Soal 6-42:  $I = a^3 t (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)$  dan  $e = 2a[(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)/(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)]$ .*



GAMBAR SOAL 6 – 40



GAMBAR  
SOAL 6 – 41



GAMBAR  
SOAL 6 – 42

The first of these is the fact that the majority of the specimens of the *Canis* group which have been described from the Pleistocene of Europe and Asia are of the *Canis* type, and that the majority of the specimens of the *Canis* group which have been described from the Pleistocene of North America are of the *Canis* type.

The second of these is the fact that the majority of the specimens of the *Canis* group which have been described from the Pleistocene of Europe and Asia are of the *Canis* type, and that the majority of the specimens of the *Canis* group which have been described from the Pleistocene of North America are of the *Canis* type.

The third of these is the fact that the majority of the specimens of the *Canis* group which have been described from the Pleistocene of Europe and Asia are of the *Canis* type, and that the majority of the specimens of the *Canis* group which have been described from the Pleistocene of North America are of the *Canis* type.

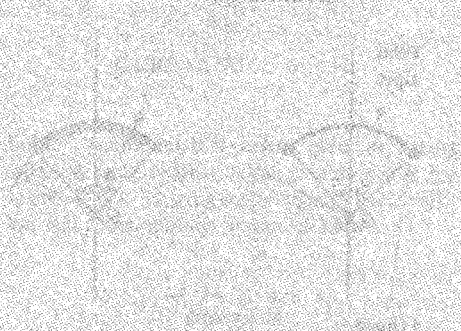


FIG. 1. *Canis lupus*. Lateral and frontal views of the skull.

The fourth of these is the fact that the majority of the specimens of the *Canis* group which have been described from the Pleistocene of Europe and Asia are of the *Canis* type, and that the majority of the specimens of the *Canis* group which have been described from the Pleistocene of North America are of the *Canis* type.

The fifth of these is the fact that the majority of the specimens of the *Canis* group which have been described from the Pleistocene of Europe and Asia are of the *Canis* type, and that the majority of the specimens of the *Canis* group which have been described from the Pleistocene of North America are of the *Canis* type.

The sixth of these is the fact that the majority of the specimens of the *Canis* group which have been described from the Pleistocene of Europe and Asia are of the *Canis* type, and that the majority of the specimens of the *Canis* group which have been described from the Pleistocene of North America are of the *Canis* type.

The seventh of these is the fact that the majority of the specimens of the *Canis* group which have been described from the Pleistocene of Europe and Asia are of the *Canis* type, and that the majority of the specimens of the *Canis* group which have been described from the Pleistocene of North America are of the *Canis* type.



FIG. 2. *Canis lupus*. Lateral view of the skull.

# 7 Tegangan Majemuk

## 7.1 PENDAHULUAN

Semua rumus-rumus dasar yang dipergunakan dalam buku ini untuk analisis tegangan benda-benda yang berdeformasi telah kita peroleh dalam bab-bab yang lalu. Rumus-rumus ini diperoleh dari pengandaian bahwa hanya sebuah elemen tunggal saja dari suatu sistem gaya yang bekerja pada sebuah irisan batang. Untuk bahan-bahan yang kenyal linier, maka rumus-rumus ini dapat diringkaskan sebagai berikut:

### 1. Tegangan normal

(a) disebabkan oleh gaya aksial

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (1-1)$$

(b) disebabkan oleh lenturan • batang lurus

$$\sigma = -\frac{My}{I} \quad (5-1a)$$

• batang lengkung  
simetris

$$\sigma = \frac{My}{Ae(R - y)} \quad (5-17)$$

### 2. Tegangan geser

(a) disebabkan oleh puntiran • poros melingkar

$$\tau = \frac{T\rho}{I_p} \quad (3-3a)$$

• poros sikuempat

$$\tau_{\max} = \frac{T}{\alpha bc^2} \quad (3-13)$$

• tabung dinding  
tipis tertutup

$$\tau = \frac{T}{2(A)t} \quad (3-14, 3-15)$$

(b) disebabkan oleh gaya geser dalam balok

$$\tau = \frac{VQ}{It} \quad (6-6)$$

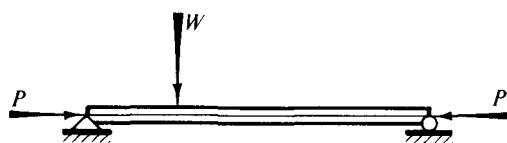
Dalam kasus-kasus bahan yang tak-elastis, bagaimana pun, keraguan yang besar serta kerumitan hubungan-hubungan dasar mengharuskan setiap masing-masing kasus ditelaah dengan menggunakan pengandaian kinematika dasar bersama dengan hubungan tegangan-regangan yang sesuai dan persamaan keseimbangan.

Perhatian akan kita arahkan kepada persoalan-persoalan di mana beberapa batang suatu sistem gaya dapat bekerja bersama pada sebuah irisan batang yang dimaksudkan untuk memenuhi syarat-syarat keseimbangan. Persoalan umum dari analisa tegangan timbul bila gaya aksial, momen lentur, puntiran (torsi) dan gaya geser terjadi secara bersamaan pada sebuah irisan dari batang itu. Tetapi bab ini akan mengikuti sasaran yang lebih terbatas. Mula-mula akan kita bahas azas superposisi beserta pembatasannya dan demikian pula tegangan normal dan timbul bersama oleh gaya aksial dan momen lentur. Ini disusul pula dengan pembicaraan mengenai masalah-masalah pembebanan yang eksentris dan lenturan yang tak simetris. Kemudian kita bahas pula tegangan geser akibat torsi dan gaya geser langsung yang bekerja simultan. Akhirnya, pada penghujung bab ini kita akan meninjau pula suatu topik khusus yaitu mengenai pegas ulir lilitan rapat.

## 7-2 SUPERPOSISI DAN BATASAN-BATASANNYA

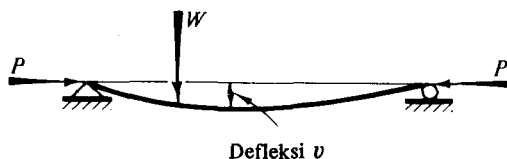
Analisa tegangan dasar yang dikembangkan dalam buku ini sebegitu jauh berharga sama sekali untuk batang yang berdeformasi kecil. Keadaan-keadaan yang seperti ini yang terjadi pada batang-batang yang fleksibel, Gambar 7-1, akan kita tinjau dalam Bab 13. Superposisi atau penjumlahan beberapa gaya terpakai yang terpisah tidaklah berlaku bila umpamanya, defleksi mengubah banyak momen lentur yang dihitung berdasarkan batang yang tidak berdeformasi. Dalam Gambar 7-1(b), akibat defleksi  $v$ , terbentuklah suatu momen lentur tambahan  $Pv$ . Dalam banyak persoalan, pengaruh deformasi terhadap tegangan adalah kecil hingga dapat diabaikan. Ini akan kita jadikan pengandaian dalam bab ini.

Dalam batang di mana keseluruhan deformasi adalah kecil dalam pengertian yang telah kita bicarakan di atas, diperbolehkan melakukan superposisi dari pengaruh-penga-



(a)

**Gambar 7-1** Defleksi dalam balok yang dimampatkan secara aksial yang menyebabkan bertambahnya momen lentur



(b)

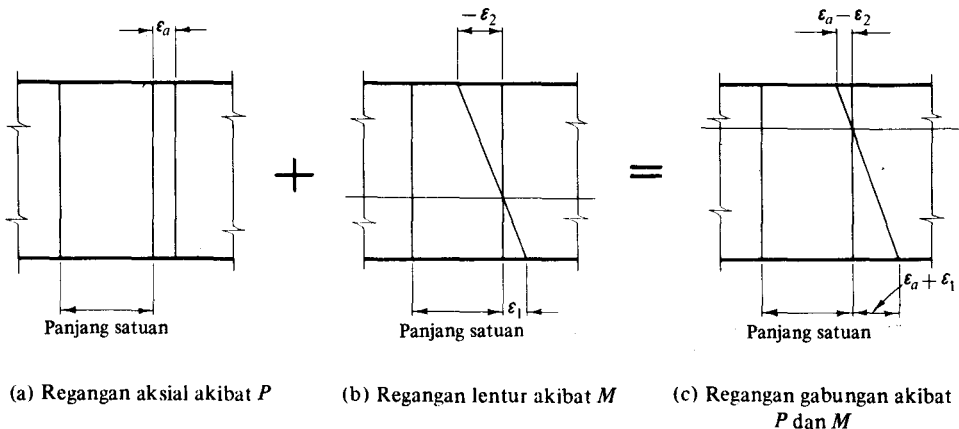


ruh gaya terpakai yang terpisah. Dalam peninjauan ini lebih mendasar bila yang kita superposisikan adalah regangan daripada tegangan karena memungkinkan kita bekerja untuk kedua kasus kenyal dan tak kenyal.

Untuk sebuah batang yang secara bersamaan memperoleh gaya aksial  $P$  dan momen lentur  $M$ , maka superposisi regangan diperlihatkan secara skematis dalam Gambar 7-2. Untuk lebih menjelaskannya, regangan-regangan tersebut digambarkan secara sangat berlebihan dari yang sebenarnya. Disebabkan oleh gaya aksial  $P$  maka irisan bidang yang tegak lurus pada sumbu balok bergerak sepanjang balok dan sejajar dengan balok itu sendiri, Gambar 7-2(a). Dan disebabkan oleh momen  $M$  yang bekerja terhadap salah satu sumbu utama maka irisan bidang akan berputar, Gambar 7-2(b). Superposisi regangan yang disebabkan oleh  $P$  dan  $M$  akan menggerakkan irisan bidang secara aksial serta memutarkannya seperti yang terlihat dalam Gambar 7-2(c). Perhatikanlah bahwa bila gaya aksial  $P$  mengakibatkan regangan yang lebih besar dari yang disebabkan oleh  $M$ , maka gabungan regangan yang disebabkan oleh  $P$  dan  $M$  tidak akan mengubah tanda besaran-besaran dalam batang tersebut.

Sebagai tambahan kepada momen tersebut yang menyebabkan perputaran irisan bidang seperti yang terlihat dalam Gambar 7-2, momen lain yang bekerja sekitar sumbu utama yang lain, yaitu sumbu vertikal pada diagram, dapat pula kita gunakan. Momen yang kedua ini memutar irisan bidang sekitar sumbu vertikal. Regangan aksial yang digabungkan dengan regangan-regangan yang disebabkan oleh perputaran irisan bidang sekitar kedua sumbu utama merupakan keadaan yang paling umum dalam batang yang melentur karena dibebani secara aksial.

Dengan menambahkan pengandaian kinematika dasar di atas dengan hubungan tegangan-regangan dan syarat-syarat keseimbangan, kita dapat memecahkan persoalan baik yang elastis maupun tak elastis. Kecuali untuk keadaan irisan simetris, hanya persoalan elastis linier yang akan kita tinjau di sini. Keadaan yang lebih umum mengenai sifat tak elastis, meskipun mudah diselesaikan dengan jenis analisis yang sama, tidaklah praktis untuk dikerjakan dengan prosedur-prosedur yang kita bahas di atas. Pem-



Gambar 7-2 Regangan gabungan

bahasan mengenai tegangan geser gabungan akan kita batasi pula kepada kasus yang kenyal linier.

Pada masalah elastis linier, suatu hubungan yang linier terjadi antara tegangan dan regangan. Karena itu, tidak seperti masalah tak elastis, tidak hanya regangan, tetapi tegangan dapat pula disuperposisikan. Ini bukan berarti bahwa bila pada elemen yang sama dan untuk sistem koordinat yang sama dua kumpulan tegangan diketahui, maka penjumlahan aljabar komponen-komponen tegangan adalah mungkin, serupa yang berlaku dengan komponen-komponen vektor. Adalah penting untuk diperhatikan, bahwa *superposisi dari tegangan hanyalah berlaku dalam soal-soal yang elastis di mana deformasi yang terjadi adalah kecil.*

Berikut ini adalah empat contoh yang menggambarkan penyelesaian distribusi tegangan dalam batang yang simetris yang memperoleh pembebanan aksial dan momen lentur. Penyelesaian untuk masalah elastis-plastis akan diberikan dalam contoh yang ketiga dari kelompok ini.

#### CONTOH 7-1

Sebuah batang  $50 \times 75$  mm yang panjangnya 1,5 m yang beratnya diabaikan diberi beban seperti yang terlihat dalam Gambar 7-3(a). Tentukanlah tegangan-tegangan tarik dan tekan maksimum yang bekerja tegaklurus terhadap irisan pada balok, yaitu, dapatkanlah tegangan normal majemuk maksimum. Anggaplah tanggapan bahan adalah elastis.

#### PENYELESAIAN

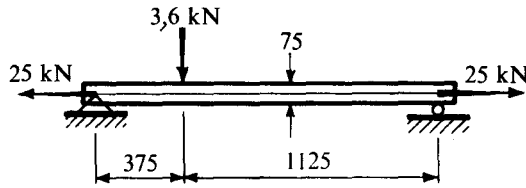
Untuk mempergunakan metoda superposisi, maka soal ini diselesaikan dengan membaginya ke dalam dua bagian. Dalam Gambar 7-3(b) batang tersebut terlihat hanya memperoleh gaya aksial, sedang dalam Gambar 7-3(c) batang yang sama hanya memperoleh gaya transversal. Untuk gaya aksial, tegangan normal yang melalui panjang batang adalah

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{25}{(0,05)(0,075)} = 6,67 \times 10^3 \text{ kN/m}^2 = 6,67 \text{ MPa} \quad (\text{tarik})$$

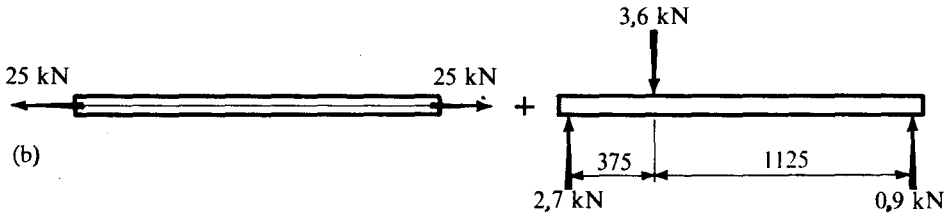
Hasil ini ditunjukkan dalam Gambar 7-3(d). Tegangan normal yang disebabkan oleh gaya transversal tergantung kepada besarnya momen lentur, dan momen lentur maksimum terdapat pada gaya terpakai. Karena reaksi pada tumpuan sebelah kiri adalah 2,7 kN, maka  $M_{\max} = (2,7)(0,375) = 1,013 \text{ kN}\cdot\text{m}$ . Dari rumus lenturan, diperoleh tegangan maksimum pada serat yang paling jauh yang disebabkan oleh momen ini yaitu

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{6M}{bh^2} = \pm 21,6 \times 10^3 \text{ kN/m}^2 = \pm 21,6 \text{ MPa}$$

Tegangan-tegangan ini bekerja tegaklurus pada irisan balok tersebut dan mengecil secara linier menuju sumbu netral sebagai yang terlihat dalam Gambar 7-3(e). Kemudian untuk memperoleh tegangan majemuk untuk setiap elemen khusus, maka tegangan-tegangan lentur harus ditambahkan secara aljabar kepada tegangan tarik langsung. Jadi, seperti

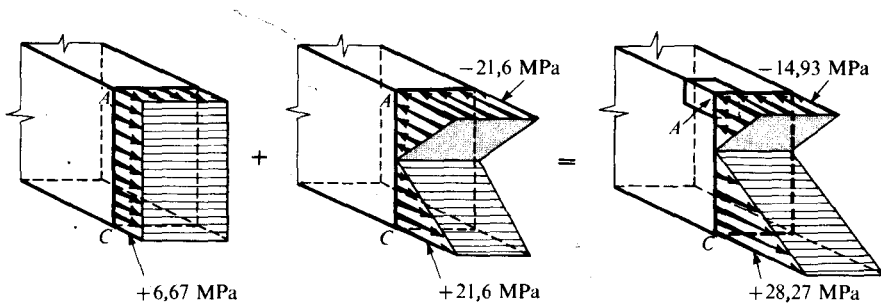


(a)

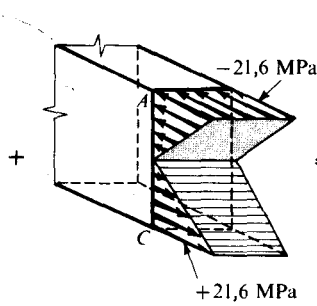


(b)

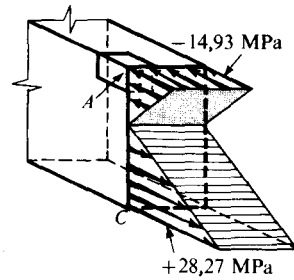
(c)



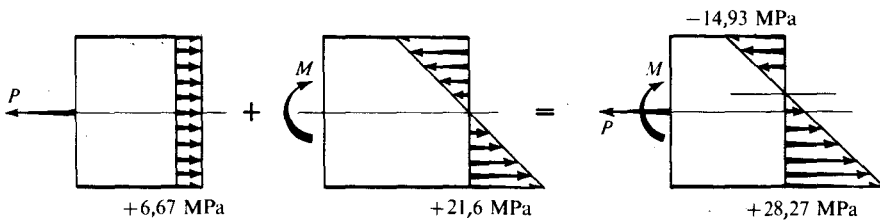
(d)



(e)



(f)



(g)

Gambar 7-3 (Semua ukuran dalam mm)

dapat dilihat dari Gambar 7-3(f), pada titik  $A$  tegangan normal resultante adalah 14,93 MPa dalam tekan dan pada titik  $C$  adalah 28,27 MPa dalam tarik.

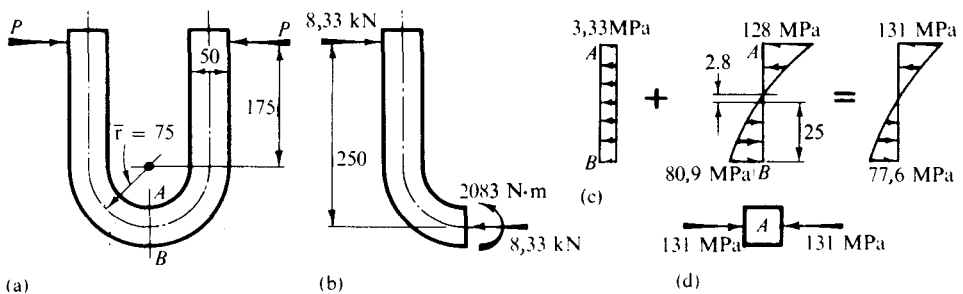
Pandangan samping vektor-vektor tegangan yang biasa digambar terdapat dalam Gambar 7-3(g). Meskipun dalam soal ini gaya aksial yang diberikan lebih besar dari gaya transversal, tetapi lenturan mengakibatkan tegangan lebih tinggi. Tetapi pembaca diharapkan untuk tidak memperhatikan batang-batang yang tipis, terutama batang yang mengalami tekan dalam keterangan yang sama (lihat Gambar 7-1(b)).

Perhatikanlah bahwa dalam hasil akhir, garis tegangan nol yang terletak pada titik berat irisan untuk lenturan, bergerak ke atas. Perhatikan pula bahwa tegangan lokal yang disebabkan oleh gaya terpusat yang bekerja tegaklurus pada permukaan atas balok tidak pula kita tinjau. Umumnya tegangan-tegangan ini diperlakukan secara bebas sebagai tegangan dukung lokal.

Distribusi tegangan yang diperlihatkan oleh Gambar-gambar 7-3(f) dan (g) akan dapat berubah bila umpamanya, mengganti gaya tarik aksial sebesar 25 kN pada ujung-ujung, dengan gaya-gaya tekan dari besar yang sama yang bekerja pada batang tersebut. Tegangan tarik maksimum dapat pula diperkecil dari 28,27 MPa menjadi 14,93 MPa, yang kita inginkan dari dalam sebuah balok yang terbuat dari bahan yang tarikannya lemah dan memuat sebuah beban transversal (transverse load). Pendapat ini dimanfaatkan dalam konstruksi pra-tegangan. Tiang penarik yang terbuat dari batang baja berkekuatan tinggi atau kabel yang dipasang melalui sebuah balok dengan tambatan pada ujung-ujungnya dipergunakan untuk memberikan pra-tekan kepada balok-balok beton. Gaya-gaya terpakai buatan tersebut mencegah pembentukan tegangan tarik. Pra-tegangan telah pula digunakan dalam kerangka-kerangka mobil balap.

### CONTOH 7-2

Sebuah batang kenyal  $50 \times 50$  mm yang dibengkokkan menjadi bentuk U seperti dalam Gambar 7-4(a) memperoleh dua gaya  $P$  yang berlawanan arah masing-masing sebesar 8,33 kN. Tentukanlah tegangan normal maksimum yang terjadi pada irisan  $A-B$ .



Gambar 7-4 (Semua ukuran dalam mm)

### PENYELESAIAN

Irisan yang kita selidiki tersebut terdapat dalam daerah batang yang melengkung, tetapi

ini tidak menimbulkan perbedaan prosedur yang pokok. Pertama-tama, sebuah segmen batang diambil sebagai sebuah benda bebas, seperti yang terlihat dalam Gambar 7-4(b). Pada irisan  $A-B$  gaya aksial bekerja pada titik berat irisan, sedang momen lentur yang perlu untuk mempertahankan keseimbangan dapat pula ditentukan. Kemudian masing-masing elemen dari sistem gaya tersebut kita tinjau secara terpisah. Tegangan yang disebabkan oleh gaya aksial adalah

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{8,33}{0,05(0,05)} = 3,33 \times 10^3 \text{ kPa} = 3,33 \text{ MPa} \quad (\text{tekan})$$

dan diperlihatkan secara diagramatis dalam sketsa pertama dalam Gambar 7-4(c). Tegangan normal yang disebabkan oleh momen lentur dapat diperoleh dengan mempergunakan Persamaan 5-16. Tetapi untuk batang ini, lengkung menjadi radius sebesar 75 mm memberikan jawaban yang sudah diketahui dari Contoh 5-12. Distribusi tegangan yang sesuai dengan keadaan ini diperlihatkan dalam sketsa kedua dari Gambar 7-4(c). Dengan menjumlahkan atau melakukan superposisi hasil-hasil kedua penyelesaian ini, maka akan kita peroleh distribusi tegangan majemuk. Ini diperlihatkan dalam sketsa ketiga dari Gambar 7-4(c). Tegangan maksimum terjadi di titik  $A$  dan merupakan suatu tegangan tekan dari 131 MPa. Sebuah elemen yang terisolasi untuk titik  $A$  diperlihatkan dalam Gambar 7-4(d). Tegangan geser tidak terdapat pada irisan  $A-B$  karena tidak ada gaya geser yang diperlukan untuk mempertahankan keseimbangan segmen yang terlihat dalam Gambar 7-4(b). Tegangan yang disebabkan oleh gaya aksial relatif tidak penting hingga dapat dihapuskan.

Soal-soal yang serupa dengan yang di atas biasanya terdapat dalam disain mesin-mesin. Pengait, pengapit  $C$ , kerangka mesin tekan pelobang, dan seterusnya melukiskan pelbagai keadaan pada mana metoda-metoda analisa terdahulu harus digunakan.

### \*CONTOH 7-3

Tinjaulah sebuah balok elastis-plastis sikuempat yang dilenturkan sekitar sumbu horizontal yang secara bersamaan dikenakan suatu gaya tarik aksial. Tentukanlah besar gaya aksial dan momen yang berhubungan dengan distribusi tegangan yang terlihat dalam Gambar-gambar 7-5(a), (b) dan (e).

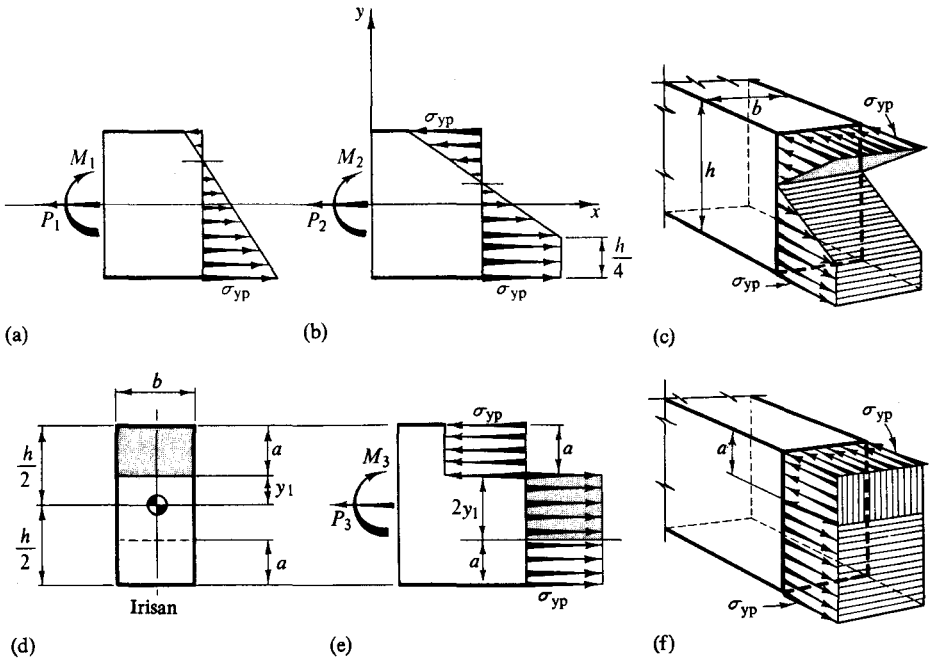
### PENYELESAIAN

Distribusi tegangan yang terlihat dalam Gambar 7-5(a) sesuai dengan pembatasan kasus elastis, di mana tegangan maksimum berada pada titik pelenturan yang akan terjadi. Untuk ini kita dapat menggunakan superposisi dari tegangan. Jadi

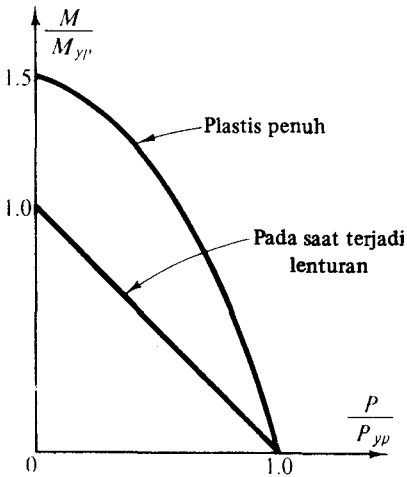
$$\sigma_{\max} = \sigma_{yp} = \frac{P_1}{A} + \frac{M_1 c}{I} \quad (7-1)$$

Gaya  $P$  pada pelenturan dapat didefinisikan sebagai  $P_{yp} = A\sigma_{yp}$ ; dari Persamaan 5-5 momen pada pelenturan adalah  $M_{yp} = (I/c)\sigma_{yp}$ . Dengan membagi Persamaan 7-1 dengan  $\sigma_{yp}$  dan dengan menggunakan hubungan yang terdapat antara  $P_{yp}$  dan  $M_{yp}$  maka kita memperoleh

$yp = \text{yield point} = \text{titik luluh} = \text{titik leleh}$



**Gambar 7-5** Gabungan tegangan-tegangan aksial dan lentur: (a) distribusi tegangan elastis; (b) dan (c) distribusi tegangan elastis-plastis; (e) dan (f) distribusi tegangan plastis penuh.



**Gambar 7-6** Kurva interaksi untuk  $P$  dan  $M$  untuk batang berpenampang sikuempat.

$$\frac{P_1}{P_{yp}} + \frac{M_1}{M_{yp}} = 1 \quad (7-2)$$

$yp$  = yield point = titik luluh = titik leleh

Persamaan ini menentukan hubungan antara  $P_1$  dan  $M_1$  sehingga tegangan maksimum tepat sama dengan  $\sigma_{yp}$ . Plot dari persamaan ini yang sesuai dengan keadaan lenturan yang dihasilkan dapat dilihat dalam Gambar 7-6. Plot mengenai hubungan seperti ini disebut *kurva interaksi*.

Distribusi tegangan yang diperlihatkan dalam Gambar-gambar 7-5(b) dan (c) terjadi setelah pelenturan dilakukan seperempat balok sebelah bawah. Dengan memperoleh distribusi tegangan ini, kita dapat menentukan secara langsung besarnya  $P$  dan  $M$  dari syarat-syarat keseimbangan. Bila sebaliknya, yang kita ketahui adalah  $P$  dan  $M$  sedang superposisi tidak berlaku di sini, maka proses yang tidak praktis akan dibutuhkan untuk menentukan distribusi tegangan.

Untuk tegangan-tegangan yang diberikan dalam Gambar-gambar 7-5(b) dan (c), kita dengan mudah dapat menggunakan Persamaan-persamaan 5-7 dan 5-8 yang dikembangkan untuk balok melentur secara tak elastis, kecuali yang dalam Persamaan 5-7 di mana jumlah tegangan normal haruslah sama dengan gaya aksial  $P$ . Perhatikanlah bahwa dalam daerah elastis tegangan tersebut dapat dinyatakan secara aljabar sebagai  $\sigma = (\sigma_{yp}/3) - [8\sigma_{yp}y/(3h)]$  dan bahwa dalam daerah plastis  $\sigma = \sigma_{yp}$ , hingga kita memperoleh

$$P_2 = \int_A \sigma dA = \int_{-h/4}^{+h/2} \frac{\sigma_{yp}}{3} \left(1 - \frac{8y}{h}\right) b dy + \int_{-h/2}^{-h/4} \sigma_{yp} b dy = \sigma_{yp} \frac{bh}{4}$$

$$M_2 = - \int_A \sigma y dA = - \int_{-h/4}^{+h/2} \frac{\sigma_{yp}}{3} \left(1 - \frac{8y}{h}\right) y b dy - \int_{-h/2}^{-h/4} \sigma_{yp} y b dy$$

$$= \frac{3}{16} \sigma_{yp} b h^2$$

Perhatikanlah bahwa gaya aksial yang diperoleh di atas benar-benar sama dengan gaya yang bekerja pada daerah plastis dari irisan. Momen  $M_2$  lebih besar dari  $M_{yp} = \sigma_{yp} b h^2 / 6$  dan lebih kecil dari  $M_{ult} = M_p = \sigma_{yp} b h^2 / 4$  (lihat Persamaan 5-9).

Gaya aksial dan momen yang sesuai untuk keadaan plastis penuh yang terlihat dalam Gambar-gambar 7-5(e) dan (f) adalah sederhana untuk menerangkannya. Seperti dapat dilihat dari Persamaan 7-5(e) gaya aksial tersebut dibentuk oleh  $\sigma_{yp}$  yang bekerja pada luas  $2y_1 b$ . Disebabkan oleh sifat simetri, tegangan-tegangan ini memberikan sumbu-bangan kepada momen. Gaya-gaya yang bekerja pada daerah-daerah atas dan bawah  $ab = [(h/2) - y_1] b$ , lihat Gambar 7-5(d), akan membentuk sebuah kopel dengan lengan momen  $h - a = (h/2) + y_1$ . Karena itu

$$P_3 = 2y_1 b \sigma_{yp} \quad \text{atau} \quad y_1 = P_3 / (2b \sigma_{yp})$$

dan

$$M_3 = ab \sigma_{yp} (h - a) = \sigma_{yp} b \left( \frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) = M_p - \sigma_{yp} b y_1^2$$

$$= \frac{3M_{yp}}{2} - \frac{P_3^2}{4b\sigma_{yp}}$$

Kemudian dengan membaginya dengan  $M_p = 3 M_{yp} / 2 = \sigma_{yp} b h^2 / 4$  dan dengan penyederhanaan, kita memperoleh

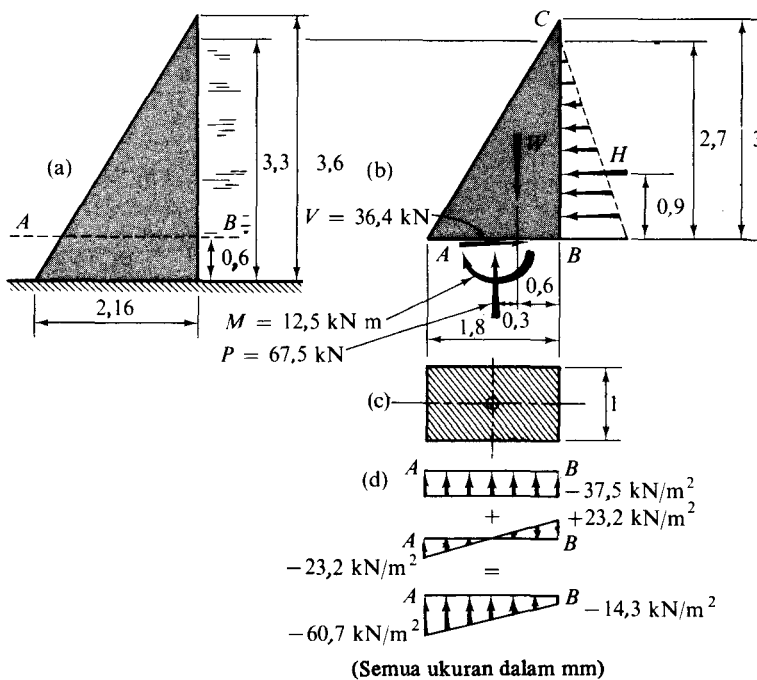
$$\frac{2M_3}{3M_{yp}} + \left( \frac{P_3}{P_{yp}} \right)^2 = 1 \quad (7-3)$$

yp = yield point = titik luluh = titik leleh

Ini merupakan persamaan umum untuk kurva interaksi untuk  $P$  dan  $M$  yang diperlukan untuk mencapai syarat plastis penuh dalam batang bersikuempat (lihat Gambar 7-6). Tidak seperti pada keadaan yang elastis, maka hubungan yang di atas adalah tak linier.

#### CONTOH 7-4

Sebuah bendungan kecil yang penampangnya berbentuk segitiga seperti yang terlihat dalam Gambar 7-7(a) terbuat dari beton, yang beratnya kira-kira  $2550 \text{ kg/m}^3$ . Tentukanlah distribusi tegangan normal pada irisan  $A-B$  bila air yang terdapat di belakang bendungan mencapai permukaan yang ditunjukkan dalam gambar tersebut. Untuk tujuan penghitungan, tinjaulah satu meter linier bendungan dalam arah yang tegak lurus terhadap bidang kertas sebagai sebuah balok yang terisolasi. Pergunakanlah satuan-satuan meter dan kilonewton.



Gambar 7-7

#### PENYELESAIAN

Buatlah irisan pada ketinggian yang dibutuhkan\* dan isolasikanlah satu bagian dari benda tersebut seperti yang terlihat dalam Gambar 7-7(b). Tekanan hidrostatik yang

\* Irisan ini dibuat secara horisontal. Ini menyimpang dari ketaatan kita yang tinggi terhadap metoda pengirisan yang kita bahas semula. Sumbu bendungan tersebut membagi dua sudut  $ACB$ , dan menurut prosedur yang kita bahas semula irisan tersebut haruslah dibuat tegak lurus terhadap sumbu ini. Tetapi dalam analisa struktur pertukangan kayu biasanya kita mengambil irisan yang horisontal. Ini mengikuti analogi irisan pada dataran tanah yang horisontal.



bekerja pada permukaan bendungan sebelah hulu yang vertikal menimbulkan gaya horizontal  $H$ . Gaya ini sama dengan tekanan *rata-rata* yang bekerja pada bendungan dikalikan dengan luas daerah yang tersentuh. Karena tekanan berubah secara linier dari permukaan air, maka gaya ini bekerja pada 0,9 m di atas ketinggian  $A-B$ . Berat jenis air sungai dianggap sebesar  $1019 \text{ kg/m}^3$ .

Berat "balok"  $W$ , yang merupakan berat irisan bendungan satu meter, adalah sama dengan volume beton di atas ketinggian  $A-B$  dikalikan dengan berat jenis beton. Resultante gaya berat ini bekerja pada titik berat volume beton di atas yaitu, 0,6 m dari permukaan hulu bendungan. Gambar denah irisan  $A-B$  diperlihatkan dalam Gambar 7-7(c). Titik berat dan sumbu netral dari *daerah irisan penampang ini* terletak di tengah-tengah antara permukaan-permukaan hulu dan hilir dari bendungan. Jadi diagram benda bebas yang biasa untuk segmen balok tersebut dapat disempurnakan seperti yang terlihat dalam Gambar 7-7(b), di mana ditunjukkan gaya "aksial", gaya geser dan momen lentur. Persoalan untuk menentukan tegangan normal majemuk pada irisan  $A-B$  dapat diselesaikan kemudian dengan menggunakan Persamaan-persamaan 1-1 dan 5-1 di mana hasilnya disuperposisikan. Pengolahan ini dapat dilihat dalam Gambar 7-7(d).

$$H = V = \left[\left(\frac{1}{2}\right)(2,7)(10)\right](2,7)1 = 36,4 \text{ kN}$$

$$W = P = \left[\left(\frac{1}{2}\right)(1,8)(3)1\right]25 = 67,5 \text{ kN}$$

$$M = H(0,9) - W(0,3) = (36,4)(0,9) - (67,5)(0,3) = 12,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\begin{aligned} \sigma_B &= -\frac{W}{A} + \frac{Mc}{I} = -\frac{67,5}{(1,8)(1)} + \frac{(12,5)(0,9)}{(1,8)^3/12} = -37,5 + 23,2 \\ &= -14,3 \text{ kN/m}^2 \quad (\text{tekan}) \end{aligned}$$

$$\sigma_A = -\frac{W}{A} - \frac{Mc}{I} = -37,5 - 23,2 = -60,7 \text{ kN/m}^2 \quad (\text{tekan})$$

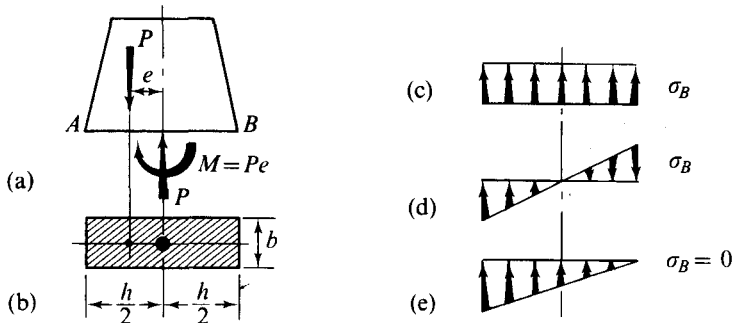
Tegangan normal yang disebabkan oleh lenturan berubah secara linier dari sumbu netral irisan penampang pada  $A-B$ . Bila tegangan-tegangan ini disuperposisikan dalam tegangan seragam yang disebabkan oleh gaya  $P$ , maka distribusi tegangan akhir terlihat dalam hasil-hasil Gambar 7-7(d). Coba perhatikan bahwa dalam keadaan yang khusus ini semua tegangan normal pada irisan  $A-B$  adalah tekan, dan tidak ada garis tegangan nol yang terdapat dalam irisan yang kita pelajari ini. Tegangan geser terjadi pula pada ketinggian  $A-B$  ini, walaupun analisisnya tidak kita singgung di sini.

Hasil-hasil yang kita peroleh di atas tidaklah eksak karena luas irisan penampang horisontal dari bendungan berubah dengan cepat. Persamaan-persamaan 1-1 dan 5-1 hanya berlaku untuk batang prismatik. Tegangan normal pada permukaan sebelah hilir dari bendungan tidak memenuhi syarat-syarat batas, sehubungan tegangan ini bekerja secara vertikal di mana permukaan hilir tersebut adalah miring. Selanjutnya, bendungan adalah balok yang agak *pendek* hingga suatu analisa yang berdasarkan rumus-rumus yang biasa merupakan suatu pendekatan. Suatu analisa tegangan geser yang berdasarkan Persamaan 6-6 akan menuju kepada hasil-hasil yang salah.\*

\* Untuk perincian lebih lanjut lihatlah S. Timoshenko, and J.N. Goodier, *Theory of Elasticity* (3rd ed.), New York: McGraw-Hill, 1970, halaman 51 dan 109.

**\*7-3 CATATAN MENGENAI MASALAH-MASALAH YANG MELIBATKAN GAYA-GAYA AKSIAL DAN MOMEN-MOMEN LENTUR: MASALAH BENDUNGAN**

Dalam contoh di atas semua tegangan normal pada irisan  $A-B$  yang kita peroleh merupakan tekan. Ini dihasilkan dari harga-harga tertentu dari gaya aksial dan momen lentur, sedang suatu keadaan yang berlainan dapat pula dengan mudah timbul. Umpamanya bila dasar bendungan menjadi lebih sempit, maka berat bendungan tersebut menjadi berkurang, sementara momen lentur yang disebabkan oleh tekanan air akan tetap sama. Tegangan majemuk dalam keadaan demikian dapat merupakan tegangan *tarik* pada permukaan sebelah hulu. Tetapi beberapa bahan, seperti beton, khususnya lemah melawan tegangan tarik. Kenyataan ini menuju kepada masalah yang praktis penting: Berapakah seharusnya perbandingan ukuran sebuah bendungan atau dermaga beton sehingga tidak terjadi gaya tarik dalam bahan tersebut bila terdapat gaya pada struktur tersebut?



**Gambar 7-8** Menetapkan letak gaya  $P$  yang menyebabkan tegangan nol di titik  $B$ .

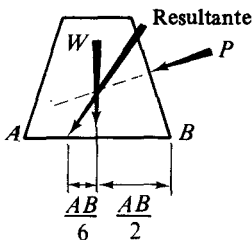
Dalam menjawab pertanyaan tersebut, tinjaulah sebuah segmen dari sebuah batang di atas irisan  $A-B$  yang terlihat dalam Gambar 7-8(a). Daerah irisan penampang pada  $A-B$  dianggap berbentuk sikuempat seperti yang terlihat dalam Gambar 7-8(b). Ambillah resultante semua gaya terpakai yang bekerja atas irisan  $A-B$  merupakan suatu gaya vertikal, dan misalkan gaya ini bekerja pada jarak  $e$  dari titik berat daerah penampang  $A-B$ . Kemudian untuk mempertahankan keadaan segmen ini dalam keseimbangan, maka pada irisan  $A-B$  harus ada gaya aksial  $P$  dan momen lentur  $Pe$ , seperti pada Gambar 7-8(a). Tegangan yang disebabkan oleh gaya aksial adalah  $\sigma = P/A = P/(bh)$ , sementara tegangan maksimum yang disebabkan oleh lenturan adalah  $\sigma_{\max} = Mc/I = M/S = 6Pe/(bh^2)$ , di mana  $bh^2/6$  adalah modulus irisan penampang *sikuempat*. Distribusi tegangan yang lengkap atas irisan  $A-B$  yang sesuai dengan kedua efek ini berturut-turut diperlihatkan dalam Gambar-gambar 7-8(c) dan 7-8(d).

Untuk memenuhi keadaan yang kita inginkan di mana tegangan di titik  $B$  adalah nol, maka

$$\sigma_B = -\frac{P}{bh} + \frac{6Pe}{bh^2} = 0 \quad \text{atau} \quad e = \frac{h}{6}$$

yang berarti bahwa bila gaya  $P$  bekerja pada jarak  $h/6$  dari sumbu titik berat dari penampang, maka tegangan di titik  $B$  adalah nol. Distribusi tegangan normal majemuk atas seluruh irisan menjadi berbentuk "segitiga" seperti yang terlihat dalam Gambar 7-8(e). Bila gaya  $P$  dilakukan lebih dekat kepada titik berat irisan tersebut, maka momen lentur yang lebih kecil akan terbentuk pada irisan  $A-B$  dan akan terdapat beberapa tegangan tekan di titik  $B$ . Alasan yang sama dapat pula kita ulangi untuk gaya yang bekerja pada sebelah kanan sumbu titik berat. Jadi suatu aturan yang praktis, yang banyak digunakan oleh perencana-perencana bangunan tembok, dapat dirumuskan menjadi: *Bila resultante semua gaya vertikal bekerja dalam bagian sepertiga di tengah-tengah irisan penampang sikuempat, maka tidak ada tegangan tarik yang terjadi dalam bahan pada irisan tersebut.* Dapat kita pahami bahwa gaya resultante tersebut bekerja dalam bidang vertikal yang mengandung salah satu sumbu simetri daerah penampang sikuempat.

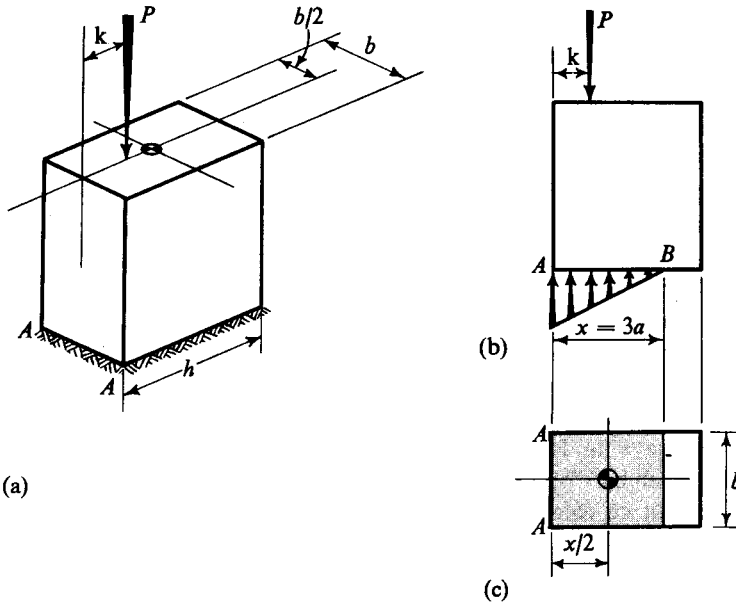
Pembahasan yang lalu dapat kita buat menjadi berlaku umum dimaksudkan untuk mempergunakannya kepada setiap sistem gaya planar yang bekerja pada sebuah batang. Resultante gaya-gaya ini dapat dibuat memotong bidang irisan penampang seperti yang terlihat dalam Gambar 7-9. Resultante ini pada titik perpotongannya *dengan* irisan dapat kita uraikan ke dalam komponen-komponen horisontal dan vertikal. Bila komponen vertikal dari resultante memenuhi syarat-syarat soal yang lalu, maka gaya tarik tidak akan terbentuk pada titik  $B$ , sedang komponen-komponen resultante yang horisontal hanya menimbulkan tegangan geser saja. Jadi aturan "sepertiga tengah" yang lebih umum dapat kita nyatakan sebagai berikut: tidak akan terdapat gaya tarik pada irisan sebuah batang berpenampang *sikuempat* bila resultante gaya-gaya pada irisan ini *berpotongan* dengan salah satu sumbu simetri irisan tersebut dalam daerah sepertiga bagian yang di tengah.



Gambar 7-9 Diperlihatkan gaya resultante yang bekerja pada kedudukannya yang paling kiri hingga menyebabkan tidak terdapat gaya tarik di  $B$ .

#### \*7.4 BATASAN KHUSUS: MASALAH CEROBONG

Kadang-kadang adalah tidak mungkin mencapai keadaan di mana gaya resultante dapat melalui "sepertiga tengah" penampang sikuempat seperti yang kita bahas dalam pasal yang lalu. Bagaimanapun, tidak ada tegangan tarik yang dapat diteruskan dalam sejumlah irisan yang terdapat pada sebuah bagian atau diantara kedua buah bagian konstruksi. Misalnya tidak ada tegangan tarik yang dapat terbentuk pada permukaan pertemuan pondasi beton sebuah cerobong yang tinggi dengan tanah. Di lain pihak, resultante suatu gaya horisontal yang disebabkan oleh tiupan angin pada cerobong tersebut dan gaya vertikal yang disebabkan oleh berat cerobong itu sendiri akan lewat di luar daerah "sepertiga tengah" dari pondasi *sikuempat* tersebut. Di bawah keadaan-



**Gambar 7-10** Distribusi tegangan antara dua permukaan yang tidak sanggup meneruskan gaya tarik.

keadaan seperti ini metoda analisis yang kita bahas dalam pasal yang lalu haruslah diperbaharui lagi.

Tinjauilah sebuah batang sikuempat yang beratnya diabaikan, seperti pada Gambar 7-10(a), di mana di luar daerah "sepertiga tengah", suatu gaya vertikal  $P$  dikerjakan pada jarak  $k$  dari salah satu permukaan sisi dan ditengah-tengah sisi batang yang berukuran  $b$ . Selanjutnya andaikanlah bahwa tidak ada tegangan pada permukaan sentuhan antara blok dan pondasi ke arah sebelah kanan titik  $B$  seperti diperlihatkan dalam Gambar 7-10(b). Jadi dianggap bahwa hanya bagian  $AB$  dari pondasi, dengan panjang  $x$  dan lebar  $b$  yang efektif dapat melawan gaya terpakai  $P$ . Ini sesuai dengan daerah gelap yang terlihat dalam Gambar 7-10(c). Dengan anggapan itu tegangan disepanjang garis  $B-B$  adalah nol. Jadi persamaan yang berikut untuk tegangan di titik  $B$  dapat ditulis

$$\sigma_B = -\frac{P}{xb} + P\left(\frac{x}{2} - k\right)\frac{6}{bx^2} = 0$$

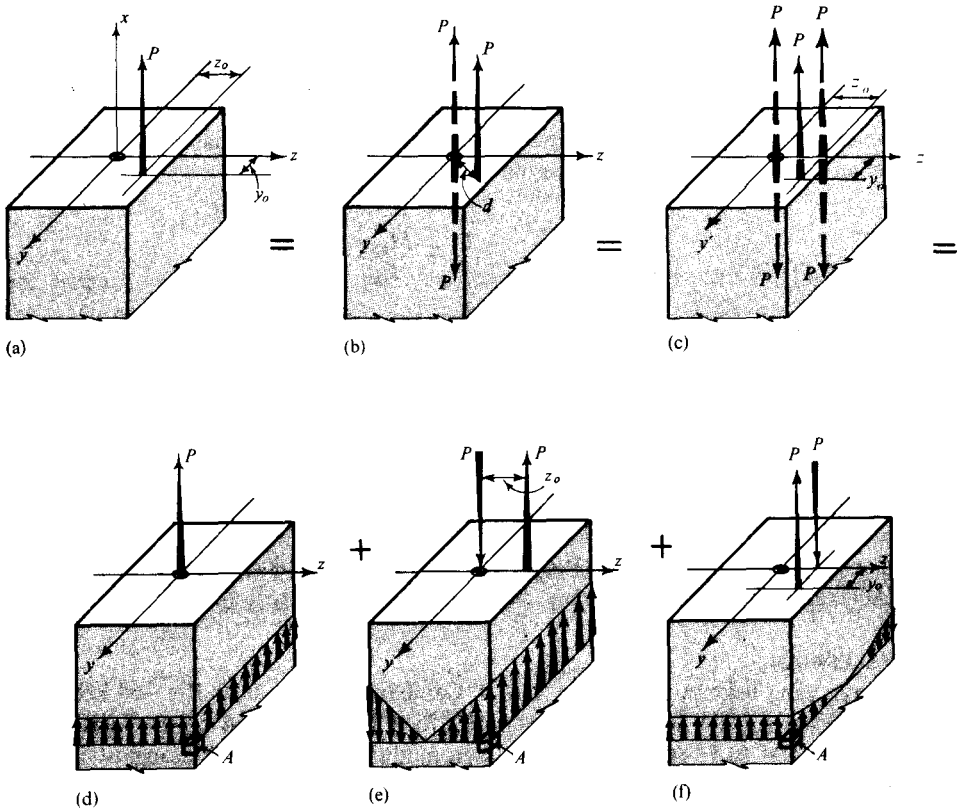
di mana  $(x/2) - k$  adalah eksentrisitas (eccentricity) gaya terpakai terhadap sumbu titik berat daerah sentuhan garis silang, dan  $bx^2/6$  adalah modulus irisannya. Dari pemecahan untuk  $x$ , diperoleh bahwa  $x = 3k$ , dan distribusi tekanan akan terbentuk "segitiga" seperti yang terlihat dalam Gambar 7-10(b) (mengapa?). Begitu  $k$  menurun, maka intensitas tekanan pada garis  $A-A$  akan naik; bila  $k = 0$ , maka balok akan menjadi tidak stabil.

Uraian yang sama dapat pula berlaku pada persoalan di mana sejumlah gaya yang bekerja pada sebuah batang dengan daerah sentuhan dalam berbagai bentuk. Persoalan

tersebut penting untuk perencanaan pondasi. Tetapi karena tanah tidak pernah bersifat kenyal sempurna sedang pemecahan didasarkan kepada sejumlah idealisasi, maka persoalan di atas bersifat kira-kira saja.

### 7-5 GAYA YANG DILAKUKAN PADA BATANG PRISMATIK YANG SEJAJAR DENGAN SUMBUNYA

Sebegitu jauh tegangan majemuk yang kita tinjau disebabkan oleh gaya aksial dan momen lentur yang bekerja terhadap sumbu yang tegak lurus pada bidang simetri penampang. Prosedur yang sama dapat pula digunakan dalam keadaan analogi di mana daerah penampang tidak simetris, asal saja momen lentur bekerja terhadap *sumbu utama* penampang (Pasal 5-7).



**Gambar 7-11** Penguraian sebuah soal menjadi tiga buah soal, masing-masing dapat diselesaikan dengan metoda-metoda yang telah dibahas sebelumnya.

Kadangkala keadaan yang timbul adalah apabila momen lentur tidak bekerja sebagaimana halnya di atas. Misalnya, tinjaulah kasus balok sikuempat yang beratnya diabaikan, Gambar 7-11(a), di mana suatu gaya  $P$  bekerja sejajar dengan sumbu batang tersebut, yang diberikan secara eksentris kepada sumbu titik berat batang tersebut.

Sumbu-sumbu  $y$  dan  $z$  yang terlihat dalam Gambar 7-11 merupakan sumbu-sumbu simetri penampang balok tersebut,\* dan letak gaya  $P$  ditentukan oleh koordinat-koordinat  $y_0$  dan  $z_0$ . Dengan menggunakan dua gaya  $P$  yang sama besar tetapi berlawanan arah pada titik berat, seperti yang terlihat dalam Gambar 7-11(b), maka masalah tersebut berubah menjadi suatu gaya aksial  $P$  dan suatu momen lentur  $Pd$  dalam bidang gaya terpakai  $P$  dan sumbu dari batang. Tetapi momen lentur ini tidak bekerja dalam bidang salah satu sumbu-sumbu utama, dan tidak ada rumus yang memadai yang dapat diturunkan dalam buku ini untuk keadaan pembebanan semacam ini. Jadi dua gaya tambahan yang sama tapi berlawanan arah sebesar  $P$  diperkenalkan kepada sebuah titik pada sumbu  $z$  pada jarak  $z_0$  dari titik berat irisan. Sekarang lima gaya akan terlihat dalam Gambar 7-11(c) yang masih menyatakan persoalan semula ditinjau dari segi statika. Tetapi soal yang setara ini sekarang lebih baik dipecah menjadi tiga buah soal yang terpisah-pisah seperti yang ditunjukkan dalam Gambar-gambar 7-11(d), (e) dan (f) di mana secara berturut-turut terlihat gaya aksial  $P$ , momen lentur  $M_{yy} = +Pz_0$  yang bekerja terhadap sumbu  $y$ ,† dan momen lentur  $M_{zz} = -Py_0$  yang bekerja terhadap sumbu  $z$ . Rumus-rumus tegangan aksial dan lentur yang biasa berlaku pula untuk kasus ini, sedang tegangan normal majemuk pada titik  $(y, z)$  dari penampang batang yang berbeban secara eksentris dapat diperoleh dengan superposisi. Jadi

$$\sigma_x = \pm \frac{P}{A} \mp \frac{M_{zz}y}{I_{zz}} \pm \frac{M_{yy}z}{I_{yy}} \quad (7-4)$$

di mana  $A$  adalah luas penampang batang, dan  $I_{zz}$  dan  $I_{yy}$  adalah momen inersia daerah penampang terhadap masing-masing sumbu utama. Dalam Persamaan 7-4 tanda-tanda positif sesuai dengan tegangan tarik dan tanda-tanda negatif untuk tegangan desak.

#### CONTOH 7-5

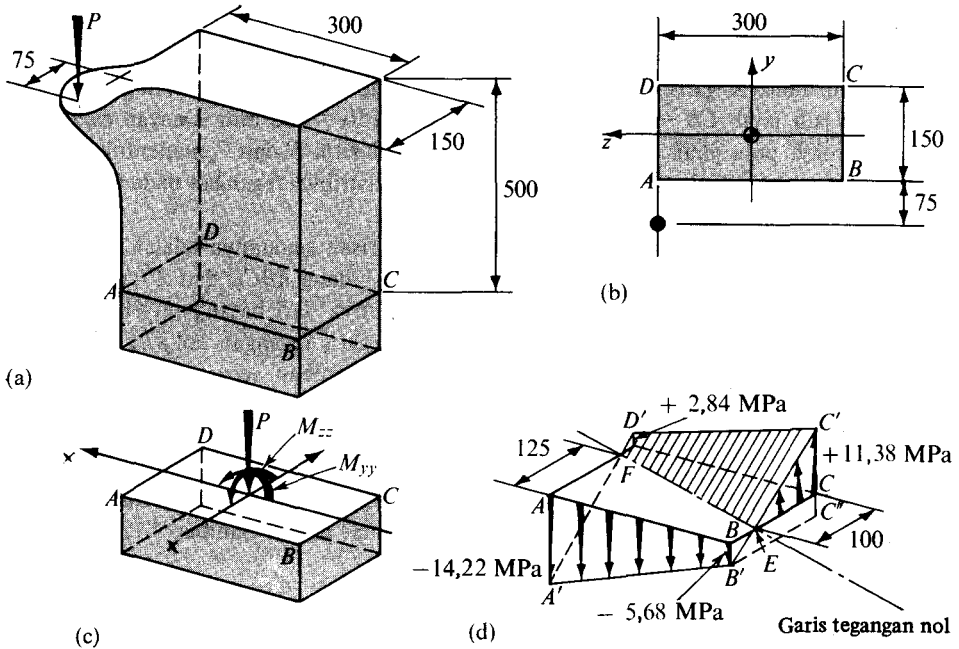
Tentukanlah distribusi tegangan pada irisan  $ABCD$  untuk balok yang terlihat dalam Gambar 7-12(a) bila  $P = 64$  kN. Pada irisan yang sama, tentukanlah letak garis tegangan nol. Abaikanlah berat balok.

#### PENYELESAIAN

Gaya-gaya yang bekerja pada irisan  $ABCD$ , Gambar 7-12(c), adalah  $P = -64$  kN,  $M_{yy} = -64(0,15) = -9,6$  kN·m, dan  $M_{zz} = -64(0,075 + 0,075) = -9,6$  kN·m. Luas penampang balok  $A = (0,15)(0,3) = 0,045$  m<sup>2</sup>, dan modulus irisan yang bersangkutan adalah  $S_{zz} = (0,3)(0,15)^2/6 = 1,125 \times 10^{-3}$  m<sup>3</sup> dan  $S_{yy} = (0,15)(0,3)^2/6 = 2,25 \times 10^{-3}$  m<sup>3</sup>

\* Untuk penampang yang tidak simetris sumbu-sumbu ini haruslah sumbu-sumbu utama.

† Momen diambil positif bila mengambil sikap cenderung menuju arah putaran jarum jam dalam arah positif sumbu tersebut.



Gambar 7-12 (Semua ukuran dalam mm)

Jadi dengan menggunakan hubungan yang setara dengan Persamaan 7-4 kita memperoleh tegangan normal majemuk untuk elemen-elemen sudut :

$$\sigma = \frac{P}{A} \mp \frac{M_{zz}}{S_{zz}} \pm \frac{M_{yy}}{S_{yy}} = -\frac{64}{45 \times 10^{-3}} \pm \frac{9,6}{1,125 \times 10^{-3}} \mp \frac{9,6}{2,25 \times 10^{-3}}$$

$$= (-1,42 \pm 8,53 \mp 4,27)10^3$$

Di sini satuan-satuan tegangan adalah kilonewton per meter kuadrat atau kilopaskal. Sikap dari gaya-gaya tersebut diperlihatkan dalam Gambar 7-12(c) menerangkan tanda-tanda tegangan. Karena itu bila tanda huruf tegangan menandakan letaknya, maka tegangan normal sudut adalah :

$$\sigma_A = (-1,42 - 8,53 - 4,27)10^3 = -14\,220 \text{ kPa} = -14,22 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B = (-1,42 - 8,53 + 4,27)10^3 = -5680 \text{ kPa} = -5,68 \text{ MPa}$$

$$\sigma_C = (-1,42 + 8,53 + 4,27)10^3 = +11\,380 \text{ kPa} = +11,38 \text{ MPa}$$

$$\sigma_D = (-1,42 + 8,53 - 4,27)10^3 = +2840 \text{ kPa} = +2,84 \text{ MPa}$$

Semua tegangan ini terlihat dalam Gambar 7-12(d). Ujung-ujung keempat vektor tegangan ini pada titik-titik  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ , dan  $D'$  terletak dalam bidang  $A'B'C'D'$ . Jarak vertikal antara bidang-bidang  $ABCD$  dan  $A'B'C'D'$  menentukan tegangan majemuk pada sebuah

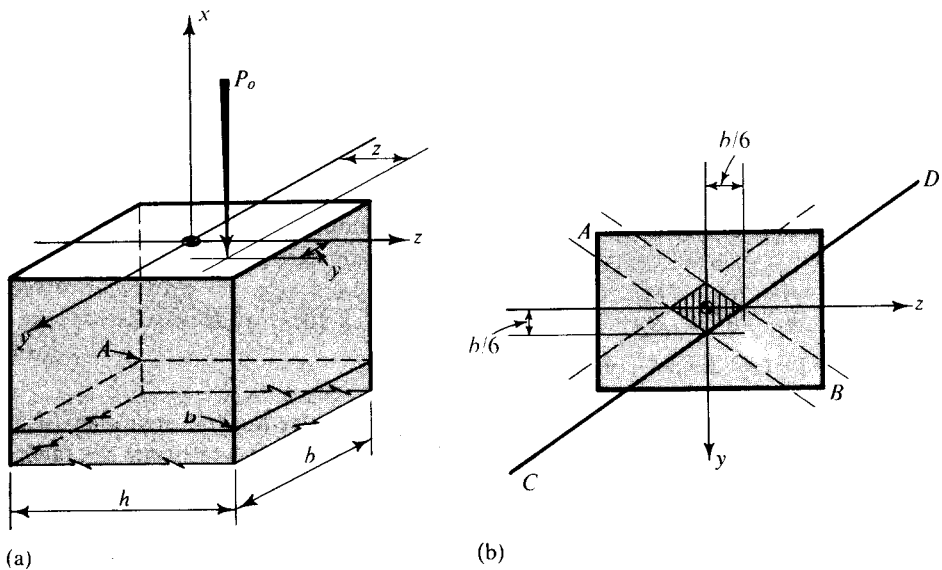
titik pada penampang tersebut. Perpotongan antara bidang  $A'B'C'D'$  dengan bidang  $ABCD$  menentukan letak garis tegangan nol  $FE$ .

Dengan menarik garis  $B'C''$  sejajar dengan  $BC$ , diperoleh segitiga sebangun  $C'B'C''$  dan  $C'EC$ ; jadi jarak  $CE = [11,38/(11,38 + 5,68)] 150 = 100$  mm. Dengan cara yang sama diperoleh pula jarak  $AF$  sebesar 125 mm. Titik-titik  $E$  dan  $F$  menentukan letak garis tegangan nol. Bila berat balok diabaikan, maka distribusi tegangan pada irisan yang lain yang sejajar dengan bidang  $ABCD$  adalah sama.

Bila sekiranya tegangan majemuk pada suatu irisan semuanya adalah tarik atau tekan, maka bidang-bidang yang sesuai dengan bidang-bidang  $ABCD$  dan  $A'B'C'D'$  dapat diperluas ke luar daerah penampang yang sesungguhnya dari batang tersebut sampai mereka berpotongan satu sama lain. Ini memberikan garis tegangan nol *khayal*. Tetapi seperti dalam kasus sebelumnya, tegangan tersebut berubah secara linier dari garis tegangan nol sebagai jarak tegaklurus masing-masing dari garis ini.

#### CONTOH 7-6

Tentukanlah daerah di mana gaya vertikal ke bawah  $P_0$  dapat dilakukan terhadap balok sikuempat yang beratnya diabaikan, seperti yang terlihat dalam Gambar 7-13(a), tanpa menyebabkan tegangan tarik pada irisan  $A-B$ .



Gambar 7-13

#### PENYELESAIAN

Gaya  $P = -P_0$  diletakkan pada sebuah titik tertentu dalam kuadran pertama sistem koordinat  $y$ - $z$  seperti yang terlihat dalam gambar. Kemudian dengan alasan yang sama yang digunakan dalam contoh yang lalu dibuktikan bahwa dengan kedudukan gaya ini terdapat kecenderungan yang paling besar untuk munculnya suatu tegangan tarik pada



titik  $A$ . Dengan  $P = -P_0$ ,  $M_{zz} = +P_0y$ , dan  $M_{yy} = -P_0z$ , pemasangan tegangan pada titik  $A$  yang sama dengan nol akan memenuhi syarat keterbatasan dari soal tersebut. Penggunaan Persamaan 7-4 memperbolehkan tegangan pada titik  $A$  dinyatakan sebagai

$$\sigma_A = 0 = \frac{(-P_0)}{A} - \frac{(P_0y)(-b/2)}{I_{zz}} + \frac{(-P_0z)(-h/2)}{I_{yy}}$$

atau

$$-\frac{P_0}{A} + \frac{P_0y}{b^2h/6} + \frac{P_0z}{bh^2/6} = 0$$

Penyederhanaan dilakukan menjadi persamaan  $[z/(h/6)] + [y/(b/6)] = 1$ , yang merupakan persamaan sebuah garis lurus. Dapat dibuktikan bahwa bila  $z = 0$ , maka  $y = b/6$ ; dan bila  $y = 0$ , maka  $z = h/6$ . Jadi garis ini dapat dinyatakan sebagai garis  $CD$  dalam Gambar 7-13(b). Suatu gaya vertikal dapat dilakukan di mana saja pada garis ini pada balok sedang tegangan di titik  $A$  adalah nol. Garis-garis yang serupa dapat pula ditetapkan untuk ketiga sudut irisan yang lain; ini diperlihatkan dalam Gambar 7-13(b). Bila gaya  $P$  dilakukan pada salah satu garis ini atau garis lain yang sejajar dengan salah satu garis tersebut yang menuju titik berat irisan, maka pada pojok yang bersangkutan tidak akan kita dapati tegangan tarik. Jadi gaya  $P$  dapat dilakukan di mana saja di dalam daerah gelap pada Gambar 7-13(b) tanpa mengakibatkan terjadinya tegangan tarik pada keempat pojok atau di mana saja. Daerah ini dari daerah penampang disebut *inti* (kern) suatu irisan. Dengan membatasi kemungkinan letak gaya itu pada garis simetri penampang segiempat tersebut, maka hasil-hasil yang diperoleh dari contoh ini dapat menurunkan aturan "sepertiga tengah" yang telah kita bahas dalam Pasal 7-3.

Metoda analisis yang lalu dapat pula dipergunakan untuk batang-batang tarik, tetapi hanya berlaku untuk balok-balok yang "pendek" dalam pengaruh tekan. Batang-batang yang tipis dalam pengaruh tekan membutuhkan perlakuan yang khusus (Bab. 13). Analisis yang kita gunakan dalam contoh ini dan contoh yang sebelumnya tidaklah benar untuk daerah-daerah yang dekat titik tangkap gaya tersebut. Distribusi tegangan di sekitar titik ini adalah serupa dengan yang ditunjukkan oleh Gambar 2-16. Di lain pihak teori tersebut di atas tidaklah terlalu terbatas meskipun penampang balok yang kita tinjau dalam contoh yang sekarang adalah berbentuk sikuempat. Metoda analisa tegangan yang sama dapat pula kita gunakan untuk batang dengan bentuk daerah penampang yang lain, asalkan sumbu-sumbu luas penampang terhadap mana momen-momen lentur bekerja merupakan *sumbu-sumbu utama*.\* Dengan definisi sumbu-sumbu utama adalah sumbu di mana momen lembam benda berpenampang sikuempat adalah maksimum atau minimum. Suatu sumbu simetri selalu merupakan sumbu utama, sedang sumbu-sumbu utama itu sendiri saling tegaklurus antara sesamanya.

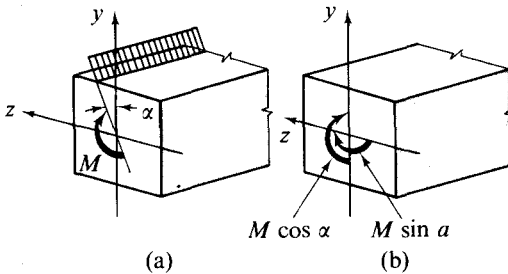
## 7-6 LENTURAN TAK SIMETRIS

Dalam Bab 5 mengenai lenturan batang kita telah menekankan bahwa rumus lenturan hanya berlaku bila momen lentur terpakai bekerja terhadap salah satu sumbu utama

\* Lihat lampiran Bab. 8

penampang. Akan tetapi, sebuah batang mungkin memperoleh momen lentur yang tidak sejajar dengan sumbu-sumbu utama.

Sebuah ilustrasi dari lenturan yang tidak memenuhi pembatasan yang diberikan dalam Bab. 5, diperlihatkan dalam Gambar 7-14(a), di mana bidang kerja momen lentur tersebut membuat sudut  $\alpha$  dengan sumbu vertikal. Karena jenis lenturan ini tidak terjadi dalam bidang simetri penampang, maka disebutlah *lenturan yang tidak simetris*.<sup>†</sup> Ini menunjukkan keadaan umum dari lenturan di mana suatu rumus lenturan yang lebih umum dapat kita buat. Karena rumus seperti itu secara relatif adalah rumit dan dapat kita jauhi secara keseluruhan maka hal ini tidak akan kita bahas dalam buku ini.\* Pada prinsipnya, soal yang umum tersebut di atas sebenarnya telah kita selesaikan dalam Pasal 7-5 dengan metoda superposisi. Di sana, sebagai kita lihat dalam Gambar 7-11(a), sebagai tambahan terhadap tegangan yang diakibatkan oleh gaya aksial  $P$ , kita dapat menentukan tegangan lentur yang disebabkan oleh momen yang bekerja pada bidang miring. Ini adalah sebuah contoh mengenai lenturan yang tidak simetris dan akan kita uraikan di sini.

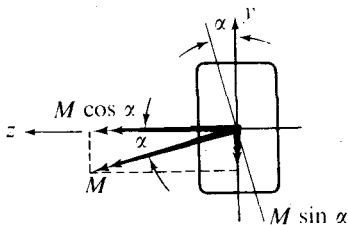


**Gambar 7-14** (a) Momen lentur dalam bidang yang tidak berimpit dengan salah satu sumbu utama, dan (b) komponen-komponen momen lentur dalam bidang-bidang sumbu utama.

Dari azas-azas mekanika, setiap kopel, yang boleh jadi adalah suatu momen lentur pada sebuah irisan balok, dapat kita uraikan ke dalam komponen-komponennya. Jadi momen lentur seperti yang terlihat dalam Gambar 7-14(a) dapat kita uraikan menjadi dua komponen yang terlihat dalam Gambar 7-14(b). Sebuah komponen momen lentur  $M$  yang bekerja sekitar sumbu  $z$  adalah  $M \cos \alpha$ , sedang komponen yang lain yang bekerja sekitar sumbu  $y$  adalah  $|M \sin \alpha|$ .<sup>\*</sup> Sikap masing-masing komponen mengikuti

<sup>†</sup> Karena soal tersebut bersifat lebih umum dibanding dengan yang simetrinya tidak cukup, maka disebutlah sebagai lenturan miring. Ini sesuai dengan penggunaan kata-kata *schiefe* dalam bahasa Jerman dan *kosoi* dalam bahasa Rusia, yang artinya miring atau condong.

<sup>\*</sup> Lihat E.F. Bruhn, *Analysis and Design of Flight Vehicle Structures*, Cincinnati, Ohio: Tri-State, 1965.



**Gambar 7-A**

\* Dalam pernyataan vektorial sebuah kopel, Gambar 7-A, momen lentur  $M$  diperlihatkan dengan suatu vektor dengan dua buah ujung tanda panah, dengan sikap yang sama dengan arah gerak maju sebuah sekrup kanan bila diputar searah dengan putaran momen tersebut. Kemudian penguraian momen ini dilakukan seperti pada sebuah gaya.

sikap dari momen total  $M$ . Prosedur ini selalu dapat digunakan untuk mendapatkan momen lentur yang hanya bekerja terhadap sumbu-sumbu utama penampang. Kemudian momen-momen ini dapat pula digunakan *secara terpisah* dalam rumus lenturan yang biasa, sedang tegangan normal majemuk diperoleh dengan cara superposisi. Bila sebuah batang memperoleh lenturan tidak simetris *murni*, maka prosedur ini menerangkan semua tegangan yang bekerja pada irisan batang. Di pihak lain, bila momen lentur disebabkan oleh gaya transversal, maka akan terbentuk pula tegangan-tegangan geser. Hal ini akan kita bahas kemudian.

#### CONTOH 7-7

Balok kayu  $0,1 \times 0,15$  m yang terlihat dalam Gambar 7-15(a) dipergunakan untuk menumpu suatu beban yang terdistribusi secara merata sebesar 4 kN (total) pada sebuah bentangan sederhana sepanjang 3 m. Beban yang dipergunakan tersebut bekerja dalam suatu bidang yang membuat sudut  $30^\circ$  dengan garis vertikal, seperti yang terlihat dalam Gambar 7-15(b) dan juga dalam Gambar 7-15(c). Hitunglah tegangan lentur maksimum di tengah-tengah bentangan, dan untuk irisan yang sama, tentukanlah letak sumbu netral. Abaikanlah berat balok tersebut.

#### PENYELESAIAN

Lenturan maksimum *dalam bidang beban terpakai* terjadi di tengah-tengah bentangan, dan menurut Contoh 4-6 adalah sama dengan  $w_0 L^2/8$  atau  $WL/8$ , di mana  $W$  adalah beban total pada bentangan  $L$ . Jadi

$$M = \frac{WL}{8} = \frac{4(3)}{8} = 1,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

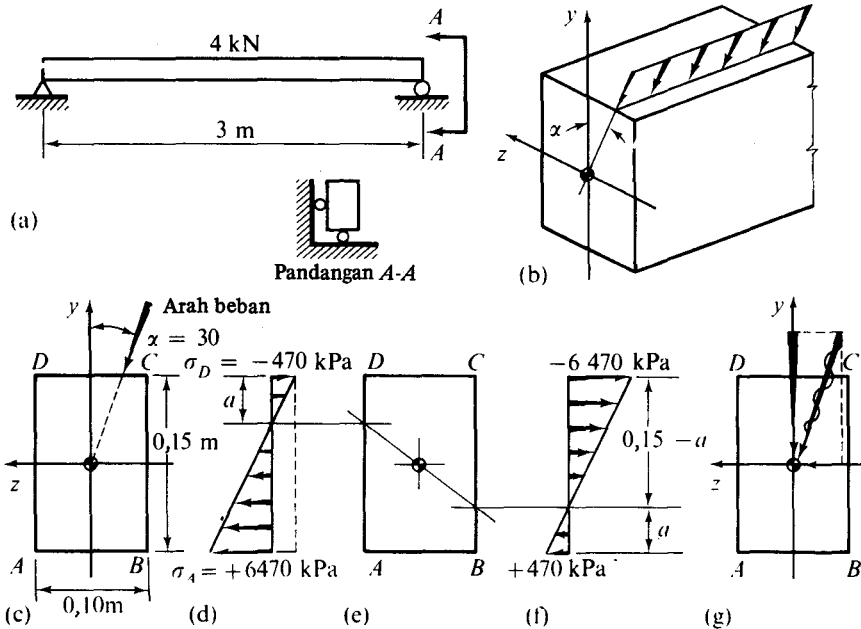
Selanjutnya, momen ini diuraikan menjadi dua komponen yang bekerja terhadap sumbu yang bersangkutan, yaitu :

$$M_{zz} = M \cos \alpha = 1,5(\sqrt{3}/2) = 1,3 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$|M_{yy}| = M \sin \alpha = 1,5(0,5) = 0,75 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Dengan meninjau hakekat dari distribusi tegangan lentur sekitar kedua sumbu utama penampang, dapat diambil kesimpulan bahwa tegangan tarik maksimum terjadi di titik A. Seding tegangan tekan maksimum pada titik C. Harga-harga tegangan ini diperoleh dengan melakukan superposisi dari tegangan-tegangan yang disebabkan oleh masing-masing momen secara tidak saling bergantung. Tegangan pada kedua pojok yang lain dari penampang ditentukan dengan cara yang sama pula.

$$\begin{aligned} \sigma_A &= \frac{M_{zz}c_1}{I_{zz}} + \frac{M_{yy}c_2}{I_{yy}} = \frac{(1,3)(0,075)}{(0,1)(0,15)^3/12} + \frac{(0,75)(0,05)}{(0,15)(0,1)^3/12} \\ &= +3470 + 3000 = +6470 \text{ kPa} \quad (\text{tarik}) \\ \sigma_B &= +3470 - 3000 = +470 \text{ kPa} \quad (\text{tarik}) \\ \sigma_C &= -3470 - 3000 = -6470 \text{ kPa} \quad (\text{tekan}) \\ \sigma_D &= -3470 + 3000 = -470 \text{ kPa} \quad (\text{tekan}) \end{aligned}$$



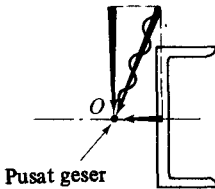
Gambar 7-15

Dapat dilihat dari penyelesaian ini bahwa tegangan normal majemuk pada titik-titik A dan C adalah sama secara numerik.

Sumbu netral, yang adalah suatu garis tegangan nol dari balok, dapat ditentukan letaknya seperti dalam Contoh 7-5. Tetapi, diagram yang disederhanakan yang terlihat dalam Gambar-gambar 7-15(d) dan (f) memberikan tujuan yang sama. Dari segitiga yang sebangun, diperoleh  $a/(0,15 - a) = 470/(6.470)$  atau  $a = 0,0102 \text{ m}$  atau 10,2 mm. Ini menentukan letak sumbu netral yang terlihat pada Gambar 7-15(e). Perhatikanlah bahwa karena tidak ada gaya aksial yang bekerja pada batang tersebut, maka garis tegangan nol melalui titik berat daerah luas penampang.

Bila lenturan yang tidak simetris dari sebuah balok ditimbulkan oleh gaya-gaya transversal terpakai, maka prosedur lain yang setara dengan di atas *biasanya lebih baik*. Gaya terpakai mula-mula diuraikan menjadi komponen-komponen yang bekerja sejajar dengan sumbu-sumbu utama daerah penampang. Kemudian momen lentur yang disebabkan oleh komponen-komponen ini sekitar masing-masing sumbu dihitung dengan menggunakan rumus lenturan. Untuk contoh yang di atas, komponen-komponen beban terpakai yang demikian diperlihatkan dalam Gambar 7-15(g). Perhatikanlah bahwa untuk menghindarkan tegangan *puntir*, maka gaya transversal terpakai haruslah bekerja melalui pusat geser. Untuk irisan yang simetris secara bilateral, umpamanya sebuah sikuempat, lingkaran, balok bentuk I dan seterusnya, *pusat geser berimpit dengan titik geometris (atau titik berat) penampang*. Sedang untuk bentuk penampang yang lain, seperti kanal (saluran), pusat geser letaknya sembarang, seperti pada titik O dalam Gambar 7-16,

hingga pada titik ini perlu digunakan gaya transversal untuk mencegah terjadinya tegangan puntir. Siku-siku tunggal yang bekerja sebagai balok diperlakukan secara sama pula (lihat Gambar 6-22). Untuk analisa lenturan tidak simetris, gaya-gaya terpakai haruslah diuraikan *pada* pusat geser yang sejajar dengan sumbu-sumbu utama penampang.



Gambar 7-16 Pemakaian gaya tegak melalui pusat geser. Tidak terjadi puntiran (torsi) dalam balok tersebut.

## 7-7 SUPERPOSISI TEGANGAN GESER

Dalam beberapa keadaan, tegangan geser timbul dari puntiran *dan* gaya geser langsung. Sebelumnya dalam buku ini kita telah membahas tegangan geser yang disebabkan oleh masing-masing gaya ini. Sedang dalam bab mengenai puntiran (torsi), yang kita bahas secara terperinci adalah hanya batang melingkar dan berdinding tipis saja. Ini membatasi jenis persoalan yang dapat kita selesaikan di sini. Untuk persoalan di mana kedua macam tegangan puntir dan geser langsung dapat kita tentukan bersama-sama, tegangan geser majemuk dapat kita peroleh secara *superposisi*. Prosedur ini serupa dengan yang kita gunakan sebelum ini dengan tegangan normal majemuk. Tetapi berhubung tegangan normal bertindak hanya dengan arah mendekati atau menjauhi sebuah elemen bagian konstruksi, maka tegangan geser dalam bidang suatu potongan dapat bertindak *ke arah sembarang*. Hasil-hasil ini dalam persoalan analisa tegangan yang lebih sukar serta pemecahan umum berada di luar jangkauan buku ini. Perhatian akan kita tujukan kepada hal-hal di mana tegangan-tegangan geser yang disuperposisikan mempunyai *garis aksi yang sama*. Pembatasan ini tidak mengikutkan beberapa persoalan yang relatif penting.

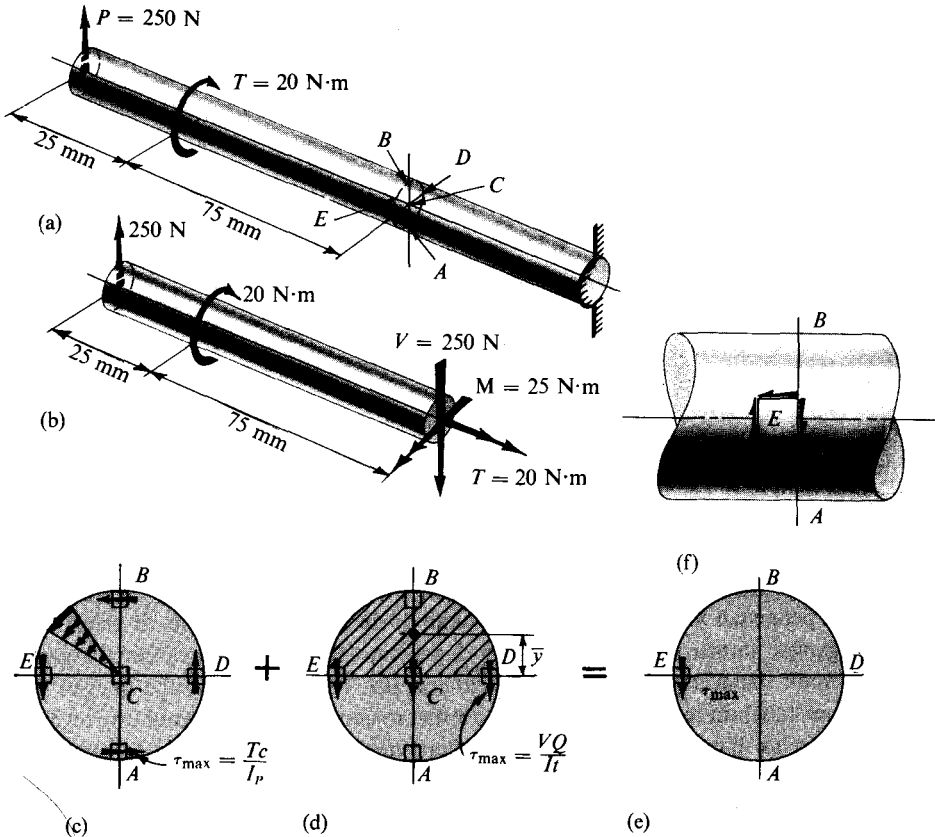
### CONTOH 7-8

Tentukanlah tegangan geser maksimum yang disebabkan oleh gaya-gaya terpakai dalam bidang *A-B* dari poros berkekuatan tinggi yang diameternya 10 mm seperti yang terlihat dalam Gambar 7-17(a).

### PENYELESAIAN

Berhubung yang kita kehendaki hanyalah tegangan yang disebabkan oleh gaya-gaya terpakai, maka berat poros itu sendiri tidak perlu ditinjau. Diagram benda bebas dari segmen poros diperlihatkan dalam Gambar 7-17(b). Sistem gaya pada potongan tersebut adalah perlu untuk menjaga segmen ini berada dalam keseimbangan, terdiri dari momen puntir  $T = 20 \text{ N}\cdot\text{m}$ , gaya geser  $V = 250 \text{ N}$ , dan momen lentur  $M = 25 \text{ N}\cdot\text{m}$ .

Akibat dari momen puntir  $T$ , maka tegangan geser dalam potongan *A-B* berubah secara linier dari sumbu poros dan mencapai harga maksimum yang diberikan oleh Persamaan 3-3, yaitu  $\tau_{\max} = Tc/I_p$ . Tegangan geser maksimum ini yang dalam beberapa



Gambar 7-17

hal sesuai dengan momen puntir *perlawanan*  $T$ , terlihat pada titik-titik  $A$ ,  $B$ ,  $D$  dan  $E$  dalam Gambar 7-17(c).

Tegangan geser "langsung" yang disebabkan oleh gaya geser  $V$  dapat diperoleh dengan menggunakan Persamaan 6-6, yaitu  $\tau = VQ/(It)$ . Untuk elemen-elemen  $A$  dan  $B$ , Gambar 7-17(d),  $Q = 0$ , jadi  $\tau = 0$ . Tegangan geser tersebut mencapai harga maksimumnya pada ketinggian  $ED$ . Untuk ini harga  $Q$  sama dengan daerah penampang silang yang terlihat dalam Gambar 7-17(d) dikalikan dengan jarak antara titik berat dengan sumbu netral. Besaran yang terakhir adalah  $\bar{y} = 4c/(3\pi)$ , di mana  $c$  adalah radius daerah penampang. Jadi

$$Q = \left(\frac{\pi c^2}{2}\right) \left(\frac{4c}{3\pi}\right) = 2c^3/3$$

Selanjutnya, berhubung  $t = 2c$ , dan  $I = I_p/2 = \pi c^4/4$ , maka tegangan geser langsung maksimum adalah

$$\tau_{\max} = \frac{VQ}{It} = \frac{V}{2c} \frac{2c^3}{3} \frac{4}{\pi c^4} = \frac{4V}{3\pi c^2} = \frac{4V}{3A}$$

di mana  $A$  adalah luas *seluruh* penampang batang. (Pernyataan yang serupa telah diturunkan pula dalam Contoh 6-3 untuk irisan balok sikuempat. Dalam Gambar 7-17(d) tegangan geser ini diperlihatkan bekerja ke bawah pada daerah elementer pada titik-titik  $E$ ,  $C$  dan  $D$ . Arah ini sesuai dengan arah gaya geser  $V$ .

Untuk mendapatkan tegangan geser majemuk maksimum dalam bidang  $A-B$ , maka tegangan-tegangan yang terlihat dalam Gambar-gambar 7-17(c) dan (d) disuperposisikan. Pemeriksaan menunjukkan bahwa tegangan geser maksimum tersebut berada di titik  $E$ , berhubung di dalam kedua diagram tersebut tegangan geser di titik  $E$  bertindak dalam arah yang sama. Tidak ada tegangan geser langsung yang terjadi di titik-titik  $A$  dan  $B$ , sedang di titik  $C$  tidak ada tegangan geser puntiran. Kedua macam tegangan geser di atas bekerja dalam arah yang berlawanan di titik  $D$ . Kelima titik  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  dan  $E$  yang kita tinjau untuk mendapatkan tegangan geser majemuk, semuanya dapat kita kerjakan dengan teliti dengan metoda-metoda yang kita kembangkan dalam buku ini. Tetapi prosedur ini memilih titik di mana bekerja tegangan geser maksimum.

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi(10)^4}{32} = 9,82 \times 10^2 \text{ mm}^4 = 9,82 \times 10^{-10} \text{ m}^4$$

$$I = \frac{I_p}{2} = 4,91 \times 10^{-10} \text{ m}^4$$

$$A = \frac{1}{4} \pi d^2 = 78,5 \text{ mm}^2 = 78,5 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$(\tau_{\max})_{\text{puntiran}} = \frac{Tc}{I_p} = \frac{20(0,005)}{9,82 \times 10^{-10}} = 102 \times 10^6 \text{ Pa}$$

$$(\tau_{\max})_{\text{langsung}} = \frac{VQ}{It} = \frac{4V}{3A} = \frac{4(250)}{3(78,5 \times 10^{-6})} = 4,25 \times 10^6 \text{ Pa}$$

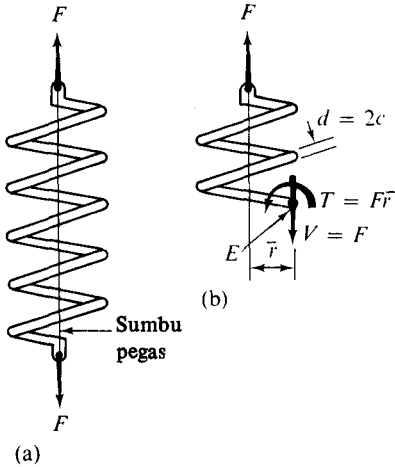
$$\tau_E \approx (102 + 4)10^6 = 106 \times 10^6 \text{ Pa} = 106 \text{ MPa}$$

Suatu gambaran planar (sebidang) dari tegangan geser di titik  $E$  dengan tegangan tandingan pada bidang-bidang yang membujur diperlihatkan dalam Gambar 7-17(f). Pada elemen ini tidak terdapat tegangan normal karena terletak pada sumbu netral.

## \*7-8 TEGANGAN DALAM PEGAS ULIR GELUNG RAPAT

Pegas ulir seperti yang terlihat dalam Gambar 7-18(a), acapkali dipergunakan sebagai unsur-unsur mesin. Dengan pembatasan-pembatasan tertentu, pegas-pegas ini dapat dipelajari untuk memperoleh tegangan dengan metoda yang sama dengan yang kita gunakan dalam contoh yang lalu. Pembahasan akan kita batasi pada pegas yang dibuat dari batang atau kawat yang berpenampang lingkaran.\* Selanjutnya, *setiap satu lilitan dari pegas seperti di atas akan dianggap terletak dalam suatu bidang yang hampir*

\* Untuk pembahasan yang lengkap mengenai pegas lihatlah A.M., Wahl, *Mechanical Springs*, Cleveland, Ohio: Penton Publishing Co., 1944.

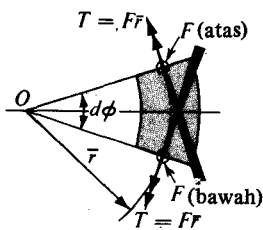


Gambar 7-18 Pegas ulir bergelung rapat

tegaklurus pada sumbu pegas tersebut. Ini membutuhkan bahwa lilitan-lilitan yang berdekatan menjadi merapat sesamanya. Dengan pembatasan ini, sebuah irisan yang diambil tegaklurus terhadap sumbu batang pegas menjadi hampir mendekati *vertikal*.<sup>\*</sup> Jadi untuk menjaga keseimbangan dari segmen pegas tersebut, hanya gaya geser  $V = F$  dan momen puntir  $T = F\bar{r}$  yang dibutuhkan pada *setiap* irisan melalui batang, Gambar 7-18(b).<sup>†</sup> Perhatikanlah bahwa  $\bar{r}$  adalah jarak antara sumbu pegas dan *titik berat daerah penampang batang*.

Sebagaimana halnya dalam pasal yang lalu, tegangan geser maksimum pada sebuah irisan tertentu dari batang dapat diperoleh dengan melakukan superposisi tegangan-tegangan geser puntiran langsung. Tegangan geser maksimum ini terjadi di dalam lilitan pada titik  $E$ , Gambar 7-18(b). Tetapi dalam analisis pegas adalah menjadi *biasa untuk menganggap tegangan geser yang disebabkan oleh gaya geser langsung didistribusikan secara merata atas daerah penampang batang pegas*. Jadi, tegangan geser langsung nominal untuk setiap titik pada penampang adalah  $\tau = F/A$ . Superposisi tegangan geser langsung *nominal* ini dengan tegangan geser puntir pada titik  $E$  menghasilkan tegangan

<sup>\*</sup> Ini meniadakan perlunya meninjau gaya aksial dan momen lentur pada irisan yang diambil melalui pegas.



Gambar 7-B

<sup>†</sup> Dalam tugas yang lalu telah kita ulangi bahwa bila suatu gaya geser terdapat pada sebuah irisan, maka perubahan dalam momen lentur haruslah terjadi sepanjang batang tersebut. Di sini gaya geser bertindak pada setiap irisan dari batang, meskipun momen lentur ataupun perubahan yang terjadi pada momen ini belum lagi muncul. Ini terjadi hanya dikarenakan batang tersebut *melengkung*. Sebuah elemen batang yang dipandang dari atas diperlihatkan dalam Gambar 7-B. Pada kedua ujung elemen momen puntir adalah sama dengan  $F\bar{r}$ , dan dengan menggunakan gambar yang vektorial, arah kerja momen puntir tersebut diperlihatkan pula dalam gambar. Komponen vektor-vektor ini yang menuju sumbu pegas di titik  $O$ , yang diuraikan pada titik perpotongan vektor-vektor,  $2F\bar{r} d\phi/2 = F\bar{r} d\phi$ , yang arahnya berlawanan dengan kopel yang dibentuk oleh gaya geser vertikal  $V = F$ , yang berjarak  $\bar{r} d\phi$ .



geser majemuk maksimum. Jadi karena  $T = F\bar{r}$ ,  $d = 2c$  dan  $I_p = \pi d^4/32$ ,

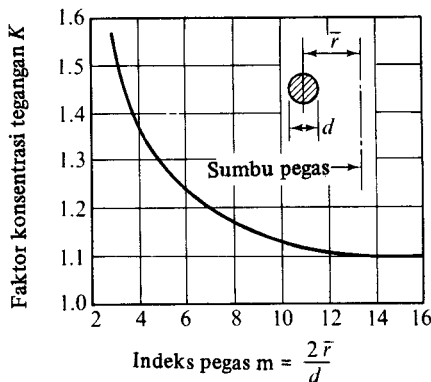
$$\tau_{\max} = \frac{F}{A} + \frac{Tc}{I_p} = \frac{Tc}{I_p} \left( \frac{FI_p}{ATc} + 1 \right) = \frac{16F\bar{r}}{\pi d^3} \left( \frac{d}{4\bar{r}} + 1 \right) \quad (7-5)$$

Dari persamaan ini dapat dilihat bahwa bila diameter batang  $d$  menjadi kecil terhadap radius lilitan  $\bar{r}$ , maka pengaruh tegangan geser langsung akan menjadi kecil juga. Di pihak lain, bila yang sebaliknya adalah benar, maka suku pertama dalam kurung dari persamaan di atas akan menjadi penting. Tetapi dalam hal yang terakhir ini, hasil yang diberikan oleh Persamaan 7-5 menjadi salah sekali, hingga persamaan ini tidak boleh digunakan, seperti yang didasarkan pada rumus lenturan untuk *batang lurus*. Bila  $d$  secara numeris sebanding dengan  $\bar{r}$ , maka panjang serat bagian dalam dari lilitan berbeda besar dengan panjang serat bagian luar, dan pengandaian regangan yang kita pakai dalam rumus puntiran tidak berlaku lagi.

Masalah pegas dapat kita selesaikan secara eksak\* dengan metoda-metoda teori keneyalan matematis. Jika sekiranya hasil-hasil ini sangat rumit, maka untuk setiap pegas hasil-hasil tersebut dapat dibuat tergantung pada parameter tunggal  $m = 2\bar{r}/d$ , yang kita sebut *indek pegas* (spring index). Jadi Persamaan 7-5 dapat ditulis sebagai

$$\tau_{\max} = K \frac{16F\bar{r}}{\pi d^3} \quad (7-5a)$$

di mana  $K$  dapat ditafsirkan sebagai faktor konsentrasi tegangan untuk pegas ulir bergelung rapat yang terbuat dari batang melingkar. Suatu plot antara  $K$  dengan indeks pegas diperlihatkan† dalam Gambar 7-19. Untuk pegas yang berat indeks pegas menjadi kecil hingga faktor konsentrasi tegangan menjadi sangat berarti. Untuk semua keadaan,



**Gambar 7-19** Faktor konsentrasi tegangan untuk pegas tarik atau desak yang terbuat dari kawat bulat bergelung

\* O. Goehner, "Die Berechnung Zylindrischer Schraubenfedern," *Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure*, March 1932, vol. 76:1, hal. 269.

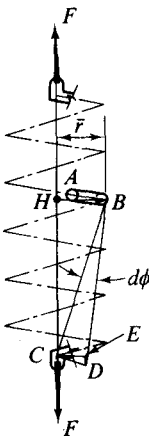
† Suatu pernyataan analitis yang memberikan harga  $K$  antara 1 atau 2% dari harga yang sesungguhnya acapkali dipergunakan. Ungkapan ini dalam bentuk indek pegas  $m$  adalah  $K_1 = (4m - 1)/(4m - 4) + 0,615/m$ . Hubungan ini diturunkan oleh A.M. Wahl berdasarkan beberapa anggapan yang disederhanakan dan diketahui sebagai *faktor koreksi Wahl* untuk lengkungan dalam pegas ulir.

faktor  $K$  menerangkan besar tegangan geser langsung yang betul. Tegangan yang sangat tinggi biasanya diperoleh dalam pegas karena dalam pembuatannya biasa digunakan bahan-bahan yang berkekuatan tinggi. Untuk baja dari pegas yang bermutu baik, tegangan geser kerja berada antara 200 MPa dan 700 MPa.

### \*7-9 DEFLEKSI PEGAS ULIR GELUNG RAPAT

Sebagai pokok persoalan pegas ulir bergelung rapat telah diperkenalkan di atas, untuk melengkapinya maka dalam pasal ini kita akan membahas defleksi dari pegas tersebut. Perhatian akan kita batasi kepada pegas ulir bergelung rapat yang indek pegasnya besar yaitu diameter dari kawat dianggap kecil dibandingkan dengan radius lilitan. Hal ini memperbolehkan kita menganggap elemen pegas antara dua irisan yang berdampingan rapat dalam kawat tersebut sebagai *batang lurus melingkar dalam puntiran*. Pengaruh gaya geser langsung terhadap lenturan pegas akan diabaikan. Ini diperbolehkan jika pengaruh yang terakhir ini memang kecil.

Tinjaulah sebuah pegas ulir seperti yang terlihat dalam Gambar 7-20. Sebuah elemen tertentu  $AB$  dari pegas ini melalui panjangnya dihadapkan pada suatu momen puntir  $T = F\bar{r}$ . Momen puntiran (torsi) ini mengakibatkan perputaran relatif antara kedua bidang yang berdampingan  $A$  dan  $B$  dengan ketelitian yang cukup besar. Perputaran ini dapat diperoleh dengan menggunakan Persamaan 3-8, untuk batang melingkar lurus yaitu  $d\phi = T dx / (I_p G)$ . Untuk persamaan ini, momen puntir terpakai  $T = F\bar{r}$ ,  $dx$  adalah panjang elemen,  $G$  adalah modulus elastisitas geser, sedang  $I_p$  adalah momen inersia polar dari *luas penampang kawat*.



**Gambar 7-20** Diagram yang digunakan untuk menurunkan ungkapan mengenai defleksi pegas ulir

Bila bidang kawat  $A$  kita andaikan sebagai dalam keadaan tetap maka perputaran bidang  $B$  diberikan oleh pernyataan yang lalu. Pengaruh elemen ini terhadap gerakan gaya  $F$  di titik  $C$  sama dengan jarak  $BC$  dikalikan dengan sudut  $d\phi$  yaitu  $CD = BC d\phi$ . Tetapi karena elemen  $AB$  adalah kecil, maka jarak  $CD$  kecil pula dan jarak ini dapat dipandang tegaklurus pada garis  $BC$  (meskipun jarak tersebut sebenarnya adalah busur). Selanjutnya, hanya komponen vertikal dari defleksi ini yang penting. Karena pegas ter-

diri dari banyak lilitan, maka untuk elemen pada salah satu sisi dari pegas akan kita dapati pula elemen yang setara yang sesuai pada sisi lainnya. Elemen-elemen pegas yang berlawanan secara diametris mengimbangi defleksi komponen horisontal serta hanya mengizinkan defleksi vertikal dari gaya  $F$ . Karena itu untuk mendapatkan tambahan *vertikal*  $ED$  dari defleksi gaya  $F$  yang disebabkan oleh pegas  $AB$  dan menjumlahkan tambahan-tambahan seperti itu untuk semua elemen pegas, maka defleksi seluruh pegas akan dapat kita peroleh.

Dari segitiga sebangun  $CDE$  dan  $CBH$ ,

$$\frac{ED}{CD} = \frac{HB}{BC} \quad \text{atau} \quad ED = \frac{CD}{BC} HB$$

Tetapi,  $CD = BC d\phi$ ,  $HB = \bar{r}$ , dan  $ED$  dapat dilambangkan dengan  $d\Delta$ , yang menyatakan defleksi pegas vertikal yang kecil takberhingga yang disebabkan oleh perputaran elemen  $AB$ . Berhubung  $d\Delta = \bar{r} d\phi$  dan

$$\Delta = \int d\Delta = \int \bar{r} d\phi = \int_0^L \bar{r} \frac{T}{I_p G} dx = \frac{TL\bar{r}}{I_p G}$$

Tetapi,  $T = F\bar{r}$ , dan untuk pegas bergelung rapat, *panjang  $L$  dari kawat* dapat diambil cukup teliti sebesar  $2\pi\bar{r}N$ , di mana  $N$  adalah jumlah lilitan pegas yang *hidup* atau aktif. Jadi defleksi  $\Delta$  dari pegas adalah\*

$$\Delta = \frac{2\pi F\bar{r}^3 N}{I_p G} \quad (7-6)$$

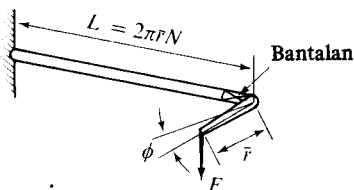
atau bila harga  $I_p$  untuk kawat diganti,

$$\Delta = \frac{64F\bar{r}^3 N}{Gd^4} \quad (7-6a)$$

Persamaan-persamaan 7-6 dan 7-6a memberikan defleksi dari pegas ulir bergelung rapat sepanjang sumbunya bila pegas demikian dihadapkan pada gaya  $F$  tarik atau tekan. Dalam rumus-rumus ini pengaruh tegangan geser langsung terhadap defleksi diabaikan yaitu rumus tersebut hanya memberikan pengaruh deformasi puntiran.

Sifat suatu pegas lebih baik ditentukan dengan gaya yang dibutuhkan untuk melenturkan pegas tersebut sepanjang satu satuan jarak. Besaran ini diketahui sebagai *tetapan pegas*, dilambangkan dalam buku ini dengan  $k$ . Dari Persamaan 7-6a tetapan pegas untuk pegas ulir yang terbuat dari kawat yang berpenampang lingkaran adalah

$$k = \frac{F}{\Delta} = \frac{Gd^4}{64\bar{r}^3 N} \quad \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}} \right] \quad \text{atau} \quad \left[ \frac{\text{lb}}{\text{in.}} \right]$$



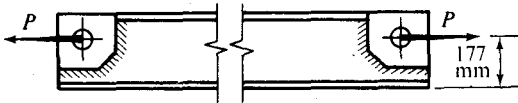
Gambar 7-C

\* Suatu permulaan yang baik untuk mendapatkan defleksi sebuah pegas ulir adalah dengan mengandaikan pegas tersebut tidak dililitkan seperti yang terlihat dalam Gambar 7-C. Defleksi  $\bar{r}\phi = \Delta$  dari gaya  $F$  yang disebabkan oleh pengaruh puntiran pada batang ini adalah setara dengan defleksi pegas ulir dengan ukuran-ukuran yang sama.

## SOAL-SOAL UNTUK DISELESAIKAN

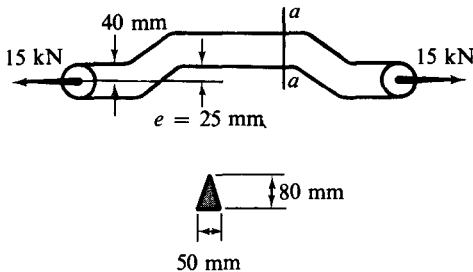
7-1. Sebuah balok W 360 × 101 dibebani dengan sebuah beban yang didistribusikan secara merata dari 30 kN/m, termasuk beratnya sendiri, dan suatu gaya aksial dari 530 kN. Tentukanlah tegangan normal maksimum bila panjang bentangan balok adalah 3 m. (Petunjuk: lihat Contoh 4-6).

7-2. Sebuah balok penghubung W 250 × 73 yang panjangnya 2,4 m dihadapkan pada suatu gaya tarik  $P$  dari 500 kN, seperti yang terlihat dalam gambar. Pada ujung-ujungnya di mana penghubung pasak dibuat balok tersebut diperkuat dengan pelat ganda, meskipun bagian-bagian flens dibuang. Tentukanlah tegangan flens maksimum pada tengah-tengah batang tersebut akibat pemakaian gaya  $P$ . Secara kualitatif dan ringkas bahaslah beban yang dipindahkan pada ujung-ujung tersebut. Di manakah seharusnya letak daerah yang paling tinggi tegangannya pada batang ini?



GAMBAR SOAL 7 - 2

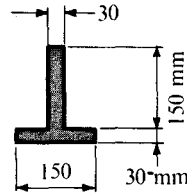
7-3. Sebuah bagian mesin untuk meneruskan suatu gaya tarik dari 15 kN di offset seperti yang terlihat dalam gambar. Tentukanlah tegangan normal yang paling besar dalam batang tersebut yang di offset. *Jawab:  $-50,7 \text{ MN/m}^2$ .*



GAMBAR SOAL 7 - 3

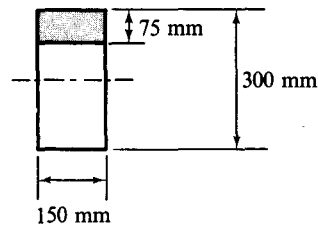
7-4. Sebuah hubungan offset yang serupa dengan yang kita lihat dalam soal yang sebelum ini tetapi lebih besar dan mempunyai penam-

pang dalam bentuk  $T$ , dapat dilihat dalam gambar. Pada ujung-ujung hubungan tersebut gaya-gaya tarik  $P$  diberikan pada 90 mm di atas permukaan bawah flens, dan offset  $e = 60 \text{ mm}$  dari garis aksi gaya-gaya ini. Tentukanlah tegangan maksimum bila  $P = 175 \text{ kN}$  sedang bahan bersifat secara elastis.



GAMBAR SOAL 7 - 4

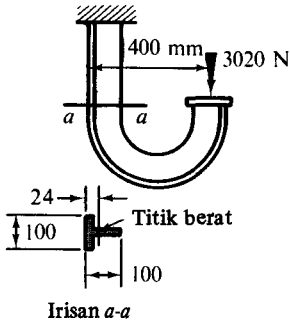
7-5. Sebuah balok yang ukuran-ukuran penampangya terlihat dalam gambar pada irisan yang diketahui diberikan gaya-gaya yang berikut: sebuah momen lentur dari  $+20 \text{ kN}\cdot\text{m}$ , sebuah gaya geser vertikal total dari  $+20 \text{ kN}$ , dan sebuah gaya dorong aksial dari  $30 \text{ kN}$ . Tentukanlah gaya normal resultante dari daerah penampang yang gelap dalam gambar. *Jawab:  $-82,5 \text{ kN}$ .*



GAMBAR SOAL 7 - 5

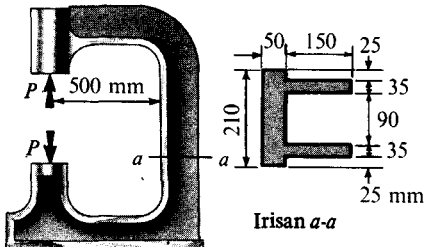
7-6. Hitunglah tegangan tekan maksimum yang bekerja tegaklurus pada irisan  $a-a$  dari tiang dari Soal 4-19.

7-7. Sebuah kait besar yang dibuat dari sebuah struktur baja berbentuk  $T$  dibebani seperti yang terlihat dalam gambar. Tentukanlah tegangan normal terbesar yang terdapat pada ujung yang terpasang tetap. Untuk irisan ini,  $A = 955 \text{ mm}^2$  dan  $I_o = 0,89 \times 10^6 \text{ mm}^4$ . *Jawab:  $100 \text{ MPa}$ .*



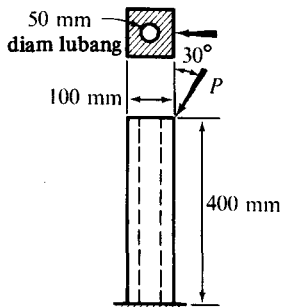
GAMBAR SOAL 7 - 7

7-8. Sebuah kerangka besi cor untuk sebuah penekan pembuat lubang mempunyai ukuran-ukuran yang diperlihatkan dalam gambar. Berapakah gaya  $P$  yang harus dilakukan kepada kerangka ini yang dikendalikan oleh tegangan dalam irisan-irisan semacam  $a-a$ , bila tegangan ijin adalah 28 MPa dalam tarik dan 80 MPa dalam tekan?



GAMBAR SOAL 7 - 8

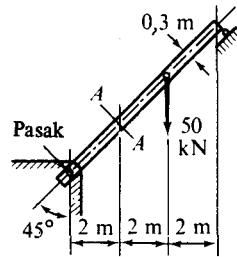
7-9. Sebuah batang baja pendek berpenampang bujursangkar  $100 \times 100$  mm dengan sebuah lu-



GAMBAR SOAL 7 - 9

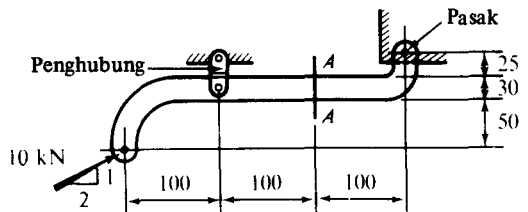
bang aksial berdiameter 50 mm terpasang tetap pada alasnya sedang puncaknya dibebani seperti yang terlihat dalam gambar. Dengan mengabaikan berat batang tersebut, tentukanlah harga gaya  $P$  sehingga tegangan normal maksimum pada ujung yang terpasang tetap tidak akan melebihi 140 MPa. *Jawab:* 129 kN.

7-10. Sebuah balok miring yang berpenampang  $0,20 \times 0,30$  m menumpu sebuah beban ke bawah seperti yang terlihat dalam gambar. Tentukanlah tegangan maksimum yang bekerja tegaklurus pada irisan  $A-A$ . Anggaplah tidak ada eksentrisitas dari beban atau gaya reaksi dan abaikanlah berat bagian struktur tersebut.



GAMBAR SOAL 7 - 10

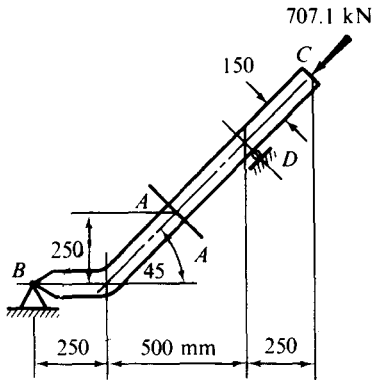
7-11. Sebuah suku cadang mesin yang mempunyai penampang berukuran  $30 \times 10$  mm diberi beban yang seperti terlihat dalam gambar. Tentukanlah tegangan yang paling besar yang bekerja tegaklurus pada irisan  $A-A$  akibat pemakaian gaya tersebut. Semua ukuran yang diberikan dalam gambar adalah dalam mm.



GAMBAR SOAL 7 - 11

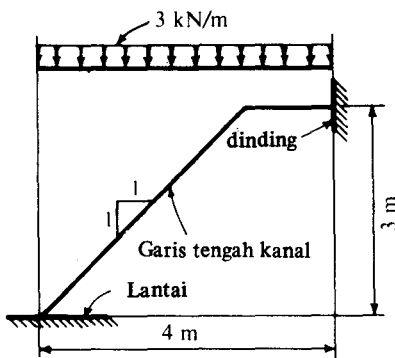
7-12. Suatu gaya dari 707,1 kN diberikan pada sebuah batang  $BC$  di titik  $C$  seperti yang terlihat dalam gambar. Tentukanlah tegangan maksimum yang bekerja tegaklurus pada irisan  $A-A$ . Bagian  $BC$  tersebut terbuat dari sepotong ba-

tang baja dari  $150 \times 150$  mm. Abaikanlah berat batang tersebut.



GAMBAR SOAL 7 – 12

7-13. Sebuah tangga pabrik yang ukuran-ukuran garis tengahnya terlihat dalam gambar, terbuat dari dua buah baja kanal 19,9 kg, 230 mm pada pinggir yang dipisahkan oleh anak-anak tangga yang dipasangkan kepada kedua kanal tersebut. Pembebanan pada masing-masing saluran, termasuk beratnya sendiri, diperkirakan 3 kN per meter proyeksi horisontal. Dengan menganggap bahwa ujung bawah tangga tersebut dipasang dengan pasak pada lantai dan bahwa dinding hanya memberikan gaya tumpu horisontal pada ujung atas, hitunglah tegangan normal terbesar dalam kanal pada jarak 1,5 m di atas permukaan lantai.

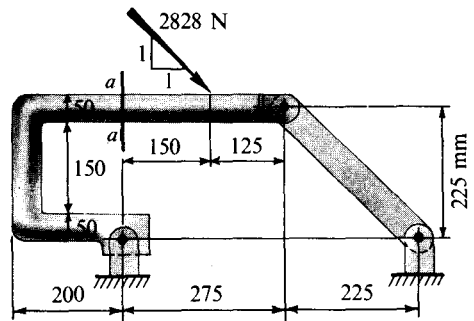


GAMBAR SOAL 7 – 13

7-14. Memperhatikan kembali Soal 7-13 dengan menganggap bahwa ujung sebelah atas dari kanal tangga dipasang melalui pasak, se-

dang ujung bawahnya dapat meluncur secara bebas dalam arah horisontal.

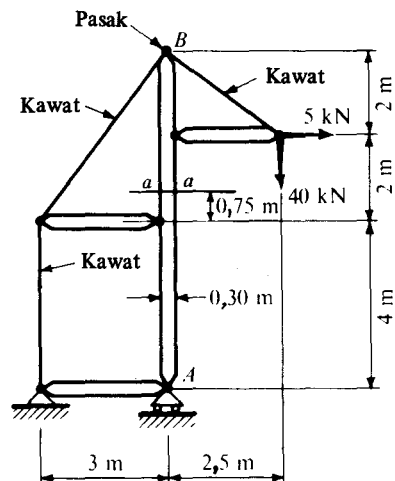
7-15. Hitunglah tegangan tekan maksimum yang bekerja pada irisan  $a-a$  yang disebabkan oleh beban terpakai pada struktur yang terlihat dalam gambar. Penampang pada irisan  $a-a$  tersebut adalah penampang batang padat melingkar berdiameter 50 mm.



GAMBAR SOAL 7 – 15

7-16. Bila dalam Soal 4-31 tonggak tersebut merupakan kayu lingkaran berdiameter 0,30 m, berapakah tegangan tarik terbesar yang bekerja tegaklurus pada sebuah irisan 2,5 m di atas dasar tonggak ?

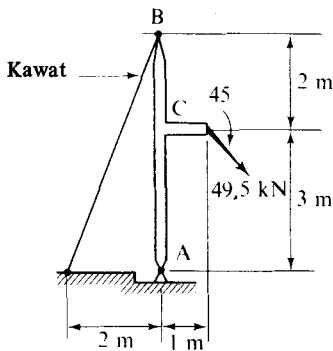
7-17. Hitunglah tegangan tekan maksimum yang bekerja tegaklurus pada irisan  $a-a$  untuk struktur yang terlihat dalam gambar. Tonggak



GAMBAR SOAL 7 – 17

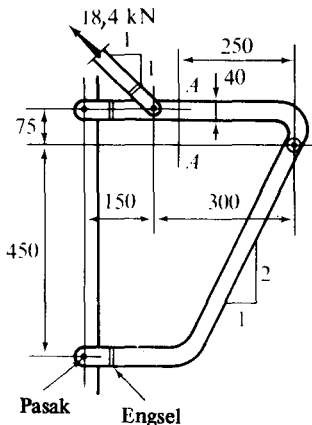
$AB$  mempunyai penampang  $300 \times 300$  mm. Abaikanlah berat struktur.

7-18. Tentukanlah tegangan terbesar yang bekerja tegaklurus terhadap *irisan kritis* dalam batang  $AB$  yang disebabkan oleh gaya terpakai dari 49,5 kN. Sambungan  $C$  adalah "kaku" dan anggota  $AB$  tersebut dari irisan  $W 200 \times 46$ . (*Petunjuk*: periksalah irisan-irisan yang berada tepat di atas dan di bawah  $C$ ).



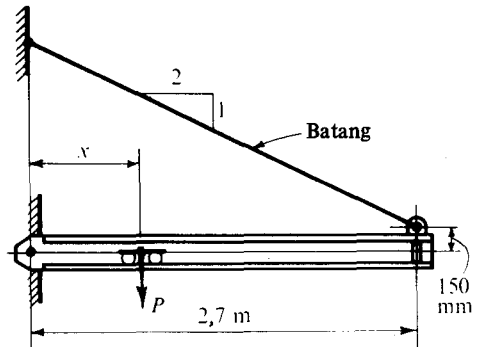
GAMBAR SOAL 7 - 18

7-19. Sebuah braket sambungan pasak dibebani seperti yang terlihat dalam gambar. Tentukanlah tegangan terbesar yang bekerja tegaklurus pada irisan  $A-A$  yang disebabkan oleh gaya terpakai dari 18,4 kN. Daerah penampang pada  $A-A$  adalah  $40 \times 30$  mm. Semua ukuran yang terlihat dalam gambar adalah dalam mm.



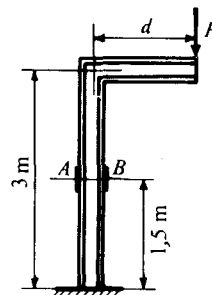
GAMBAR SOAL 7 - 19

7-20. Sebuah keran derek dinding dibuat dari sebuah balok baja berbentuk-I, 200 mm, 27,4 kg dan batang baja berkekuatan tinggi seperti yang terlihat dalam gambar. (a) Tentukanlah letak beban bergerak  $P$  yang akan menyebabkan terjadinya momen lentur terbesar pada balok tersebut. Abaikanlah berat balok tersebut. (b) Dengan menggunakan beban yang letaknya telah ditentukan dalam (a), berapa besarkah beban  $P$  itu seharusnya? Anggaplah bahwa pengaruh geser dalam balok tidak berarti dan ambillah tegangan normal ijin dalam balok tersebut adalah 121 MPa. Berikanlah ulasan mengenai ketelitian kriteria yang telah dipakai dalam (a). *Jawab*: (a) 1,5 m, (b) 35 kN.



GAMBAR SOAL 7 - 20

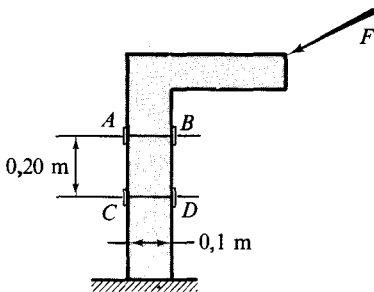
7-21. Sebuah kerangka baja yang dibuat dari irisan-irisan baja  $W 200 \times 25$  menumpu beban  $P$  pada jarak  $d$  dari pusat kolom vertikal seperti yang terlihat dalam gambar. Pada permukaan luar kolom pada jarak 1,5 m di atas tanah diukur regangan-regangan berikut: pada  $A$ ,  $\epsilon = 200 \times 10^{-6}$  m per meter; dan pada  $B$ ,  $\epsilon = -600 \times 10^{-6}$  m per meter. Berapakah besarnya beban



GAMBAR SOAL 7 - 21

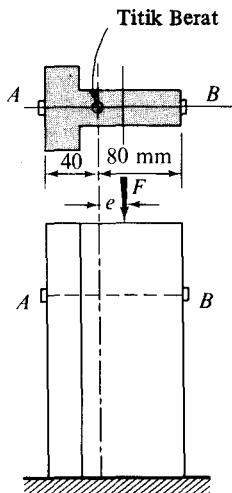
$P$  dan jarak  $d$ ? Ambillah  $E = 200 \text{ GPa}$ . *Jawab:* 129 kN, 0,143 m.

7-22. Sebuah batang yang berpenampang  $0,10 \times 0,10 \text{ m}$  dihadapkan kepada suatu gaya tunggal  $F$  seperti yang terlihat dalam gambar. Tegangan-tegangan membujur pada serat-serat yang paling luar pada dua irisan yang berjarak antara 0,20 m secara eksperimental ditentukan sebagai berikut:  $\sigma_A = 0$ ;  $\sigma_B = -30 \text{ MPa}$ ;  $\sigma_C = -24 \text{ MPa}$ ;  $\sigma_D = -6 \text{ MPa}$ . Tentukanlah besar komponen-komponen vertikal dan horisontal dari gaya  $F$ .



GAMBAR SOAL 7 - 22

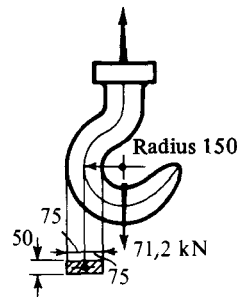
7-23. Dengan maksud untuk menentukan besar suatu beban vertikal eksentrik  $F$  pada kolom baja bentuk  $T$ , pengukur-pengukur regangan dipasang pada titik-titik  $A$  dan  $B$  seperti yang ter-



GAMBAR SOAL 7 - 23

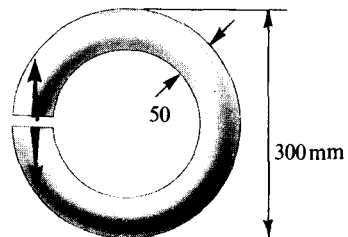
lihat dalam gambar. Tentukanlah harga  $F$  tersebut bila regangan membujur di titik  $A$  adalah  $-100 \times 10^{-6} \text{ m/m}$  dan di titik  $B$  adalah  $-800 \times 10^{-6} \text{ m/m}$ . Ambillah  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $G = 84 \text{ GPa}$ . Luas penampang kolom adalah  $4 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ . *Jawab:* 267 kN.

7-24. Sebuah kait baja, yang ukuran-ukurannya terlihat dalam gambar, dihadapkan kepada sebuah beban ke bawah sebesar 71,2 kN. Radius sumbu lengkung titik berat kait tersebut adalah 150 mm. Tentukanlah tegangan maksimum dalam pengait ini. Semua ukuran dalam mm.



GAMBAR SOAL 7 - 24

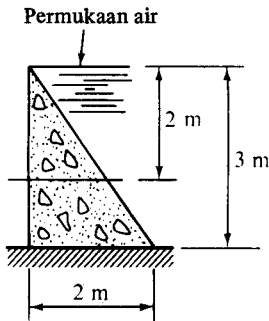
7-25. Sebuah batang baja berdiameter 50 mm dibengkokkan menjadi sebuah cincin berbentuk lingkaran yang hampir sempurna yang diameter luarnya adalah 300 mm seperti yang terlihat dalam gambar. (a) Hitunglah tegangan maksimum dalam cincin ini yang disebabkan oleh penggunaan dua gaya 10 kN pada ujung yang terbuka. (b) Tentukanlah perbandingan antara tegangan maksimum yang diperoleh dalam (a) dengan tegangan tekan paling besar yang bekerja tegak lurus terhadap irisan yang sama.



GAMBAR SOAL 7 - 25

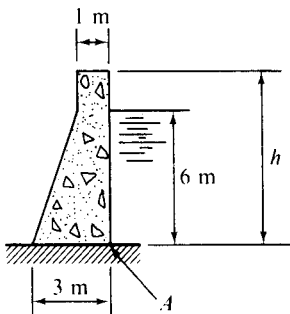


7-26. Ukuran-ukuran sebuah bendungan beton yang kecil, yang memelihara tingkat permukaan air sama dengan puncaknya, dapat di lihat dalam gambar. Dengan menganggap bahwa beton sanggup melawan beberapa tarikan, tentukanlah tegangan yang bekerja tegaklurus pada irisan horisontal 2,0 m di bawah puncak bendungan. Anggaplah bahwa berat jenis air  $1000 \text{ kg/m}^3$  dan beton  $2300 \text{ kg/m}^3$ .



GAMBAR SOAL 7 - 26

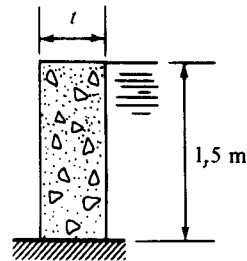
7-27. Berapakah seharusnya tinggi total  $h$  dari bendungan yang diperlihatkan secara pandangan irisan penampang dalam gambar sehingga tekanan pondasi di titik  $A$  tepat menjadi nol? Anggaplah bahwa berat jenis air  $1000 \text{ kg/m}^3$  dan beton  $2300 \text{ kg/m}^3$ .



GAMBAR SOAL 7 - 27

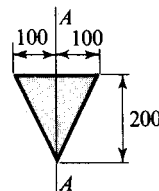
7-28. Berapakah seharusnya tebal  $t$  dari bendungan beton sikuempat tinggi 1,5 m untuk menjaga permukaan air sampai kepada puncaknya, seperti yang terlihat dalam gambar, tanpa menyebabkan tarik pada pondasi pada permukaan hulu? Anggaplah bahwa berat jenis air

dan beton seperti pada Soal 7-26. Jawab: 1,04 m.



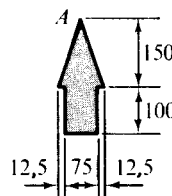
GAMBAR SOAL 7 - 28

7-29. Sebuah balok pendek ukuran-ukuran penampangnya dalam gambar rencana terlihat dalam gambar. Tentukanlah daerah disepanjang garis  $A-A$  terhadap mana sebuah gaya vertikal ke bawah dapat diberikan pada puncak balok tanpa mengakibatkan tekanan pada bawahnya. Abaikanlah berat balok tersebut. Ukuran-ukuran yang diberikan dalam gambar adalah dalam mm.



GAMBAR SOAL 7 - 29

7-30. Daerah penampang dalam gambar denah sebuah blok pendek mempunyai bentuk sebuah "panah" seperti yang terlihat dalam gambar. Tentukanlah kedudukan gaya vertikal ke bawah pada garis simetri irisan ini sehingga tegangan di titik  $A$  tepat menjadi nol. Semua ukuran dalam gambar adalah dalam mm.



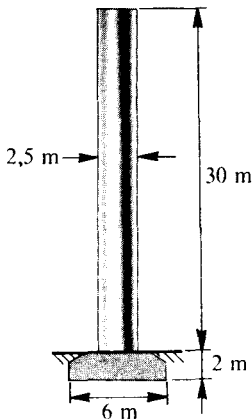
(Semua ukuran dalam mm)

GAMBAR SOAL 7 - 30

7-31. Kerjakan kembali Contoh 7-5 dengan mengganti gaya vertikal  $P$  segaris dengan sisi  $AD$  dan pada jarak 375 mm dari sumbu simetri.

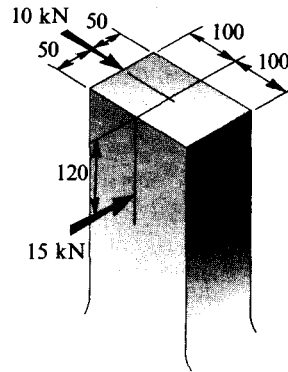
7-32. Bila balok yang diperlihatkan dalam Gambar 7-12(a) terbuat dari baja dengan berat jenis  $75 \text{ kN/m}^3$ , tentukanlah besar gaya  $P$  yang diperlukan untuk memberikan tegangan nol di titik  $D$ . Abaikanlah berat braket kecil yang mendukung beban. Untuk keadaan yang sama, tentukanlah letak garis tegangan nol pada irisan  $ABCD$ .

7-33. Sebuah cerobong baja berdiameter 2,5 m, permukaan sebelah dalam dilapisi sebagian dengan batu bata, bersama-sama dengan bantalan pondasi beton  $6 \times 6 \text{ m}$  dengan berat 76,5 Mg. Cerobong ini mempunyai tinggi 30 m di atas tanah, seperti yang terlihat dalam gambar, dan ditanamkan ke dalam pondasi. Bila tekanan angin mendatar dianggap  $1 \text{ kN/m}^2$  dari daerah yang diproyeksikan kepada cerobong dan angin berembus dengan arah yang sejajar dengan salah satu sisi pondasi bujursangkar, berapakah tekanan pondasi maksimum?



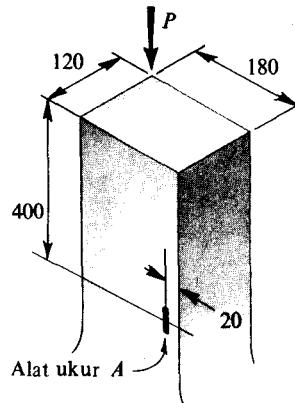
GAMBAR SOAL 7 – 33

7-34. Sebuah balok besi cor dibebani seperti yang terlihat dalam gambar. Dengan mengabaikan berat balok tersebut, tentukanlah tegangan yang bekerja tegaklurus pada irisan yang diambil 0,5 m di bawah puncak dan tentukanlah letak garis tegangan nol. Semua ukuran yang diberikan dalam gambar adalah dalam mm. Jawab:  $\pm 24,6 \text{ MPa}$ ,  $\pm 9,6 \text{ MPa}$ .



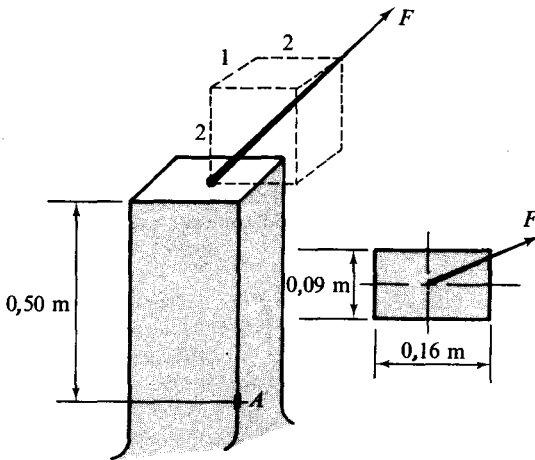
GAMBAR SOAL 7 – 34

7-35. Sebuah batang paduan aluminium dibebani seperti yang terlihat dalam gambar. Pemakaian beban ini menghasilkan suatu regangan tarik sebesar  $500 \times 10^{-6} \text{ mm per mm}$  di titik  $A$  seperti diukur dengan cara pengukuran regangan listrik. Hitunglah besar gaya terpakai  $P$ . Ambillah  $E = 10 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ . Semua ukuran yang diberikan dalam gambar adalah dalam mm.



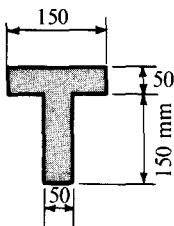
GAMBAR SOAL 7 – 35

7-36. Bila pemakaian suatu gaya miring  $F$  pada titik berat permukaan atas sebuah batang, seperti yang diperlihatkan dalam gambar, mengakibatkan regangan sebesar  $-0,000100$  pada alat ukur  $A$ , berapakah besarnya gaya terpakai  $P$ ? Ambillah  $E = 200 \text{ GPa}$ .



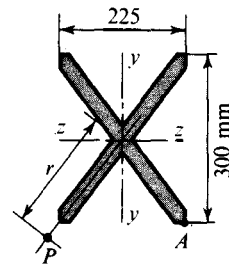
GAMBAR SOAL 7 – 36

7-37. Sebuah balok-T dari bahan elastis-plastis linier mempunyai ukuran-ukuran yang terlihat dalam gambar. (a) Bila regangan pada atas flens adalah  $-\epsilon_{yp}$  dan menjadi nol pada pertemuan badan dengan flens, berapakah gaya aksial  $P$  dan momen lentur  $M$  bekerja pada balok tersebut? Anggaplah  $\sigma_{yp} = 250$  MPa. (b) Tentukanlah pola tegangan sisa yang terbentuk setelah gaya di (a) dibuang.



GAMBAR SOAL 7 – 37

7-38. Sebuah batang tekan yang pendek mempunyai ukuran-ukuran seperti yang terlihat dalam gambar; harga  $A$  dari bagian tersebut adalah  $46 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ ;  $I_{zz} = 468 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ , dan  $I_{yy} = 247 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ . Tentukanlah jarak  $r$  sepanjang diagonal di mana gaya membujur  $P$  haruslah dilakukan sehingga titik  $A$  terletak dalam garis tegangan nol. Abaikanlah berat batang tersebut.

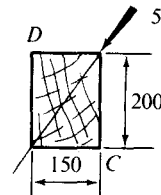


GAMBAR SOAL 7 – 38

7-39. Tentukanlah bagian yang menonjol dari sebuah batang yang berpenampang lingkaran padat.

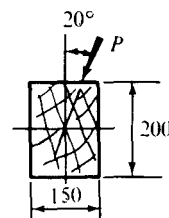
7-40. Sebuah balok  $150 \times 200$  mm yang panjangnya 6 m dibebani di tengah-tengah bentangan dengan suatu gaya terpusat miring dari 5 kN, seperti yang terlihat dalam gambar dengan pandangan irisan penampang. Dengan mengabaikan berat balok tersebut, hitunglah tegangan lentur maksimum dan tentukanlah letak sumbu netral.

Jawab: Sumbu netral melalui C dan D.



GAMBAR SOAL 7 – 40

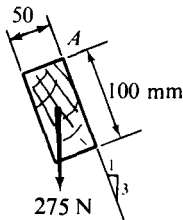
7-41. Sebuah balok  $150 \times 200$  mm yang panjangnya 6 m dibebani di tengah-tengah bentangan dengan gaya terpusat miring  $P$ , seperti yang terlihat dengan pandangan irisan penampang dalam gambar. Bila tegangan lentur maksimum



GAMBAR SOAL 7 – 41

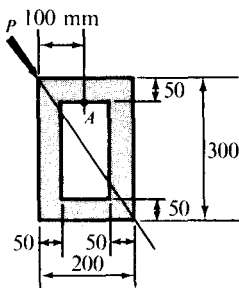
adalah  $8500 \text{ kN/m}^2$ , dengan mengabaikan berat balok tersebut, berapakah harga gaya  $P$  tersebut? Semua ukuran yang diperlihatkan dalam gambar adalah dalam mm.

7-42. Sebuah kantilever mendatar  $50 \times 100 \text{ mm}$  berukuran utuh memproyeksikan 2 m dari sebuah landasan beton ke dalam mana bangunan tersebut dicor dalam kedudukan miring seperti yang terlihat dalam gambar. Pada ujung bebas, suatu gaya vertikal dari 275 N bekerja melalui titik berat dari irisan. Tentukanlah tegangan lentur maksimum yang disebabkan oleh gaya terpakai dalam balok pada ujung yang terpasang tetap dan tentukanlah letak sumbu netral. Abaikanlah berat balok tersebut.



GAMBAR SOAL 7 - 42

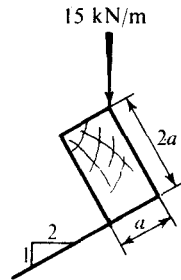
7-43. Suatu gaya miring  $P$  bekerja pada sebuah balok kantilever dalam bidang dalam pandangan irisan penampang seperti yang dalam gambar. Pada irisan yang ditinjau momen perlawanan total dalam bidang gaya adalah  $10 \text{ kN}\cdot\text{m}$ . Hitunglah tegangan lentur di titik A.



GAMBAR SOAL 7 - 43

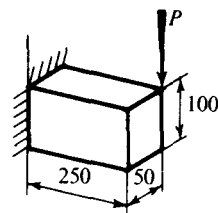
7-44. Sebuah balok miring yang bertumpuan secara sederhana dengan perbandingan 2 dengan 1 antara kedalaman dengan lebar, membentang

4 m dan membawa beban yang terdistribusi secara merata dari 15 kN per meter linier, termasuk beratnya sendiri, yang berlaku seperti yang terlihat dalam gambar. (a) Tentukanlah ukuran-ukuran yang diperlukan dari balok tersebut sehingga tegangan maksimum yang disebabkan oleh lenturan tidak melebihi  $10 \text{ MN/m}^2$ . (b) Tentukanlah letak sumbu netral dari balok dan tunjukkanlah kedudukannya pada sketsa.



GAMBAR SOAL 7 - 44

7-45. Sebuah kantilever sikuempat yang panjangnya 250 mm dibebani dengan  $P = 50 \text{ kN}$  pada ujung bebas sebagai yang terlihat dalam gambar. Tentukanlah tegangan geser maksimum pada ujung yang terpasang tetap yang disebabkan oleh gaya geser langsung dan momen puntir. Tunjukkanlah hasilnya dalam suatu sketsa yang serupa dengan Gambar 7-17(e). Semua ukuran yang diperlihatkan dalam gambar adalah dalam mm. *Jawab:* 35,3 MPa.



GAMBAR SOAL 7 - 45

7-46. Sebuah pegas ulir tekan terbuat dari kawat fosfor-perunggu berdiameter 3 mm dan mempunyai diameter luar 30 mm. Bila tegangan geser ijin adalah 200 MPa, berapakah gaya yang harus dilakukan pada pegas ini? Perbaikilah jawaban untuk konsentrasi tegangan. *Jawab:* 67,7 N.

7-47. Sebuah pegas ulir tabung terbuat dari kawat baja berdiameter 6 mm dan mempunyai diameter luar dari 48 mm. Dalam pengerjaan, gaya tekan yang dilakukan pada pegas ini berubah-ubah dari minimum 90 N kepada maksimum 300 N. Bila ada 8 lilitan yang aktif, berapakah gaya angkat (atau angkut) dari tabung dan berapakah tegangan geser maksimum dalam pegas bila sedang bekerja?  $G = 80 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ .

7-48. Sebuah pegas ulir terbuat dari kawat baja berdiameter 12 mm dengan melilitkannya pada sebuah mandril yang berdiameter 120 mm. Bila ada 10 buah lilitan aktif, berapakah tetapan pegas tersebut?  $G = 82 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ . Berapakah gaya yang harus dilakukan kepada pegas untuk

memperpanjangnya sebesar 40 mm? *Jawab:* 370 N.

7-49. Bila sebuah pegas ulir tarik yang terbuat dari 12 lilitan hidup dari kawat baja 6 mm dan dengan diameter luar 30 mm dipasangkan pada ujung pegas ulir tarik yang lain dari 18 lilitan hidup dari kawat baja 8 mm dan dengan diameter luar 40 mm, berapakah tetapan pegas dari kedua sistem pegas ini? Berapakah gaya terbesar yang dapat dilakukan kepada pegas-pegas ini tanpa melebihi tegangan geser dari  $480 \text{ MN/m}^2$ ?  $G = 82 \text{ GN/m}^2$ .

Catatan: Soal-soal mengenai lenturan dari irisan yang tidak simetris terdapat pada bagian akhir Bab. 8

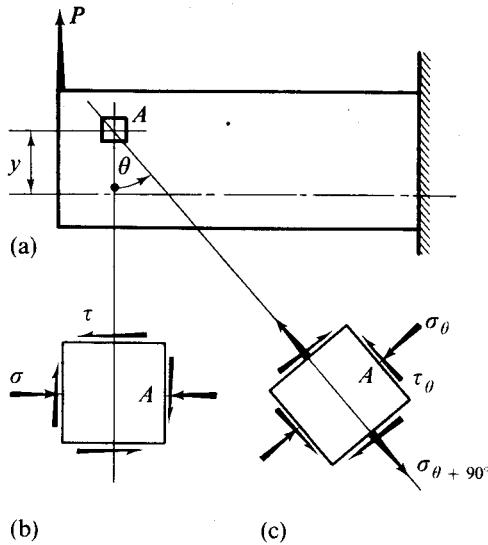


# 8 Analisis Tegangan dan Regangan Bidang

## 8-1 PENDAHULUAN

Semua rumus dasar yang dipergunakan dalam buku ini untuk menentukan tegangan pada suatu irisan batang telah kita lakukan. Dalam bab yang lalu rumus-rumus ini diklasifikasikan ke dalam dua kelompok. Satu kelompok memungkinkan penentuan tegangan normal pada elemen-elemen, sedang yang satu lagi, tegangan geser. Superposisi atau penggabungan tegangan-tegangan yang serupa telah pula dibahas dalam bab yang sama. Tetapi, dalam beberapa kasus tegangan-tegangan normal *dan* geser dapat berlaku *secara serempak* dalam sebuah elemen sebuah batang. Umpamanya, dalam sebuah poros melingkar yang meneruskan momen puntir dan suatu gaya aksial. Semua elemen kecuali yang terdapat pada sumbu, secara serentak mengalami tegangan geser puntir dan tegangan normal aksial. Dalam kenyataan bila gaya aksial, atau momen lentur bekerja dengan gaya geser atau momen puntir, maka sejumlah elemen akan mendapatkan kedua macam tegangan normal *dan* geser. Dalam hal ini, kedua tegangan geser dan normal tersebut diperlukan untuk menggambarkan secara lengkap semua tegangan yang berlaku pada sebuah elemen yang kecil takberhingga yaitu untuk menentukan *status tegangan* (state of stress). Umpamanya, status tegangan untuk elemen kecil takberhingga *A* dari balok yang terlihat dalam Gambar 8-1(a) diberikan oleh Gambar 8-1(b). Dengan menggunakan prosedur yang telah dikembangkan sampai sebegitu jauh, bidang-bidang yang mengisolasi elemen ini adalah sejajar ataupun tegaklurus terhadap sumbu batang. Metoda pengisolasian ini telah dipergunakan dalam seluruh buku ini.

Dalam bab ini akan kita perlihatkan bahwa dengan *mengubah orientasi* sebuah elemen, seperti yang ditentukan oleh sudut  $\theta$  untuk elemen dalam Gambar 8-1(c), kita mungkin dapat menggambarkan status tegangan pada suatu titik dengan jumlah *cara yang tidak berhingga banyaknya*, yang kesemuanya *setara*. Dalam mengembangkan prosedur ini, suatu gabungan dan penguraian tegangan-tegangan normal dan geser akan dikerjakan, di mana dalam bab yang lalu hanya superposisi tegangan-tegangan yang



Gambar 8-1 Status tegangan pada titik yang digambarkan dengan kemungkinan yang lain.

serupa yang kita kerjakan. Untuk maksud ini, *hukum transformasi* tegangan pada suatu titik akan kita kembangkan, yaitu persamaan-persamaan yang akan kita turunkan untuk mentransformasikan keterangan yang diberikan oleh rumus tegangan konvensional ke dalam *tegangan yang setara* yang bekerja pada setiap bidang yang melalui titik tertentu. Bidang-bidang di mana tegangan-tegangan normal dan geser mencapai *intensitas maksimumnya* akan kita tentukan pula, karena tegangan-tegangan yang sesuai dengan bidang-bidang ini mempunyai dampak yang penting sekali kepada bahan.

Bagian yang akhir dari bab ini akan berurusan dengan pokok persoalan yang serupa dengan yang di atas tetapi untuk transformasi regangan yang berhubungan dengan satu kumpulan sumbu kepada kumpulan sumbu yang lain. Beberapa tambahan keterangan mengenai hubungan tegangan-regangan untuk bahan-bahan elastis secara linier akan kita bahas pula.

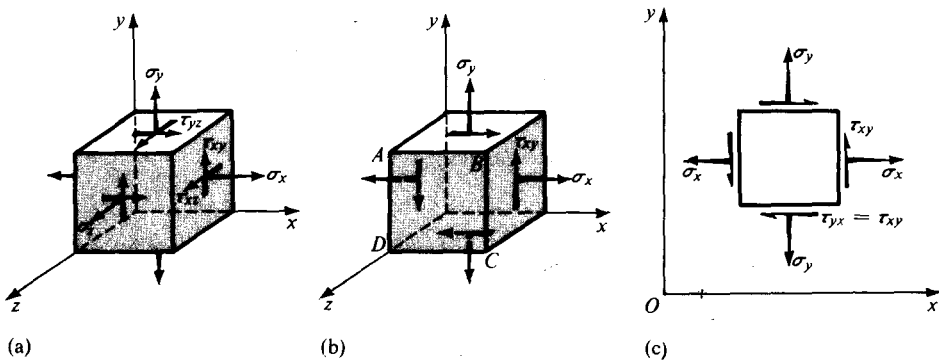
## 8-2 MASALAH DASAR

Meskipun komponen-komponen tegangan pada sebuah titik pada hakekatnya adalah vektorial, tetapi *mereka bukanlah vektor yang biasa*. Secara matematis mereka tidak mematuhi hukum-hukum penjumlahan dan pengurangan vektor. Tegangan adalah vektor orde tinggi,\* sebab, sebagai tambahan untuk memiliki besar dan arah, *tegangan-tegangan tersebut juga bersangkutan dengan satuan luas atas mana mereka bekerja*. Jadi, dalam menggabungkan tegangan-tegangan normal dan geser, persoalan dasar tersebut diselesaikan dengan pertama-tama mengubah tegangan tersebut menjadi *gaya*, yang dapat ditambahkan dan dikurangkan secara vektorial.

\*Dalam teori elastisitas matematis mereka disebut dengan istilah *tensor* urutan kedua.



Prosedur ini pertama-tama kita gambarkan pada suatu contoh numerik. Kemudian pendekatan yang kita kembangkan akan kita perluas untuk memperoleh hubungan-hubungan aljabar untuk suatu transformasi tegangan, yang memungkinkan kita untuk mendapatkan tegangan pada suatu bidang miring dari suatu status tegangan yang diketahui. Metoda yang digunakan dalam penurunan ini tidak melibatkan sifat-sifat suatu bahan. Karena itu asalkan tegangan mula kita ketahui, maka hubungan-hubungan yang kita turunkan berlaku baik untuk bahan yang bersifat secara elastis maupun secara plastis.



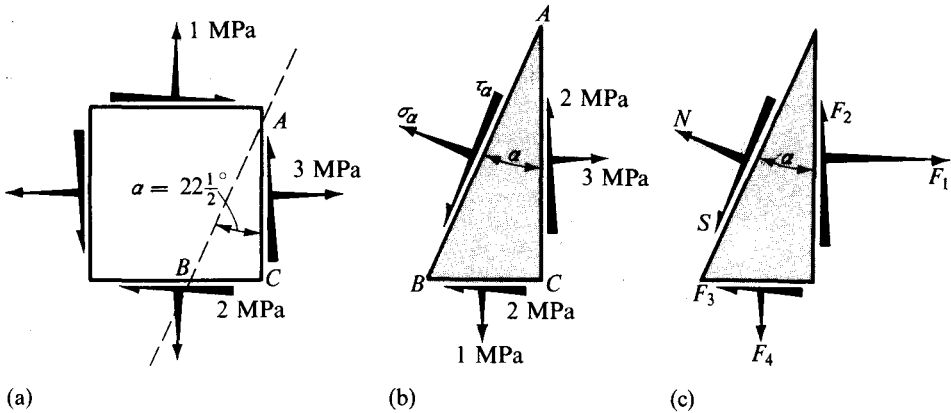
**Gambar 8-2** Gambaran tegangan yang bekerja pada sebuah elemen.

Dalam menurunkan hukum-hukum transformasi tegangan pada sebuah titik, maka keadaan yang benar-benar umum akan kita hindarkan dalam buku ini. Daripada membicarakan tentang status tegangan tiga-dimensional yang umum,† seperti yang terlihat dalam Gambar 8-2(a), sebaiknya kita meninjau elemen-elemen dengan tegangan seperti yang terlihat dalam Gambar 8-2(b). Penggunaan praktis jenis tegangan ini sangat penting karena biasanya tepat untuk memilih satu permukaan dari sebuah elemen pada batas luar sebuah batang, seperti *ABCD* dalam Gambar 8-2(b), yang bebas dari tegangan-tegangan permukaan yang penting. Pada pihak lain, tegangan yang bekerja pada elemen-elemen tersebut pada permukaan sebelah kanan dari benda merupakan yang paling tinggi di antara tegangan yang sejajar dengan permukaan. Seperti sebelumnya, untuk penyederhanaan, tegangan yang bekerja pada elemen-elemen yang demikian akan diperlihatkan seperti dalam Gambar 8-2(c).

#### CONTOH 8-1

Ambillah status tegangan untuk sebuah elemen sebagai yang terlihat dalam Gambar 8-3(a). Gambaran lain dari status tegangan pada titik yang sama dapat diberikan pada sebuah pasak yang kecil takberhingga dengan sudut  $\alpha = 22\frac{1}{2}^\circ$  seperti yang terlihat dalam

† Untuk pembahasan yang lebih umum tentang transformasi tegangan pembaca dapat melihat buku-buku mengenai elastisitas dan plastisitas. Pada penurunan yang dilakukan di sini, sebagai tambahan kepada  $\sigma_x$ , maka kita meninjau pula tegangan normal  $\sigma_y$ . Keadaan mempunyai dua buah tegangan normal akan kita jumpai dalam bab yang berikut yang berhubungan dengan cangkang tipis.



Gambar 8-3

Gambar 8-3(b). Hitunglah tegangan-tegangan yang harus bekerja pada bidang  $AB$  dari pasak untuk menjaga elemen tersebut dalam keseimbangan.

#### PENYELESAIAN

Irisan  $ABC$  adalah bagian dari elemen yang terdapat dalam Gambar 8-3(a); karena itu tegangan pada permukaan-permukaan  $AC$  dan  $BC$  dapat kita ketahui. Di samping itu tegangan-tegangan normal dan geser yang tidak diketahui yang bekerja pada permukaan  $AB$  berturut-turut dilambangkan sebagai  $\sigma_\alpha$  dan  $\tau_\alpha$  dalam gambar tersebut. Sikap mereka dianggap tetap.

Untuk menentukan  $\sigma_\alpha$  dan  $\tau_\alpha$ , hanya untuk mudahnya saja, ambillah luas permukaan yang ditunjukkan oleh garis  $AB$  adalah  $1 \text{ m}^2$ . Maka luas yang sesuai dengan garis  $AC$  menjadi sama dengan  $(1) \cos \alpha = 0,924 \text{ m}^2$ ; dan yang sesuai dengan garis  $BC$  sama dengan  $(1) \sin \alpha = 0,383 \text{ m}^2$  (Lebih tepat lagi adalah luas yang sesuai dengan garis  $AB$  tersebut haruslah diambil sebagai  $dA$ , tetapi besaran ini menjadi terhapus dalam ungkapan-ungkapan aljabar yang berikutnya). Gaya-gaya  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  dan  $F_4$  dalam Gambar 8-3(c) dapat diperoleh dengan mengalikan tegangan dengan luas yang bersangkutan. Gaya-gaya pengimbang, yang tidak diketahui  $N$  dan  $S$  bekerja berturut-turut tegak lurus dan menyinggung bidang  $AB$ . Kemudian, dengan menggunakan persamaan-persamaan keseimbangan statis terhadap gaya-gaya yang bekerja pada pasak diperoleh gaya-gaya  $N$  dan  $S$ .

$$\begin{aligned}
 F_1 &= 3(0,924) = 2,78 \text{ MN} & F_2 &= 2(0,924) = 1,85 \text{ MN} \\
 F_3 &= 2(0,383) = 0,766 \text{ MN} & F_4 &= 1(0,383) = 0,383 \text{ MN} \\
 \sum F_N &= 0, & N &= F_1 \cos \alpha - F_2 \sin \alpha - F_3 \cos \alpha + F_4 \sin \alpha \\
 & & &= 2,78(0,924) - 1,85(0,383) \\
 & & &\quad - 0,766(0,924) + 0,383(0,383) \\
 & & &= 1,29 \text{ MN}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum F_s &= 0, & S &= F_1 \sin \alpha + F_2 \cos \alpha - F_3 \sin \alpha - F_4 \cos \alpha \\
 & & &= 2,78(0,383) + 1,85(0,924) \\
 & & &\quad - 0,766(0,383) - 0,383(0,924) \\
 & & &= 2,12 \text{ MN}
 \end{aligned}$$

Gaya-gaya  $N$  dan  $S$  bekerja pada bidang yang ditunjukkan oleh garis  $AB$ , yang mulanya kita anggap luasnya sama dengan  $1 \text{ m}^2$ . Tanda positif dari gaya-gaya ini menunjukkan bahwa arah yang kita pilih untuk mereka adalah tepat. Dengan membagi gaya-gaya ini dengan luas di mana mereka bekerja, maka kita peroleh tegangan yang bekerja pada bidang  $AB$  tersebut. Jadi  $\sigma_\alpha = 1,29 \text{ MPa}$  dan  $\tau_\alpha = 2,12 \text{ MPa}$  dan mereka bekerja dalam arah yang diperlihatkan dalam Gambar 8-3(b).

Prosedur yang baru lalu ini memecahkan sesuatu yang luas biasa. Ia mengubah status tegangan dari satu kumpulan bidang kepada yang lainnya. Masing-masing sistem tegangan menyinggung sebuah elemen kecil takberhingga yang menggambarkan status tegangan pada sebuah titik yang sama dari benda.

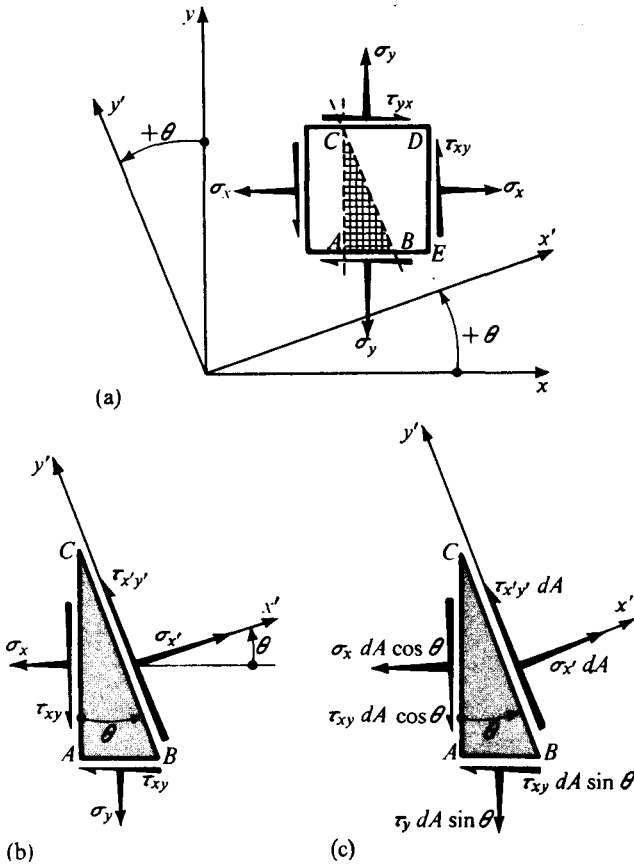
Prosedur pengisolasian sebuah pasak dan menggunakan persamaan keseimbangan gaya dalam menentukan tegangan pada bidang-bidang miring merupakan prosedur dasar. Kaidah tanda statika yang biasa cukup untuk memecahkan suatu soal. Pembaca didorong untuk kembali kepada pendekatan seperti ini, bila saja pertanyaan-pertanyaan yang timbul menyangkut prosedur yang lebih sukar yang dikembangkan pada sisa bab ini.

### 8-3 PERSAMAAN TRANSFORMASI TEGANGAN BIDANG

Dua buah ungkapan aljabar, sebuah untuk tegangan normal dan yang lainnya untuk tegangan geser, dapat dibentuk untuk memberikan tegangan-tegangan ini dalam bentuk tegangan yang mula-mula diketahui dan suatu sudut kemiringan bidang yang sedang diselidiki. Ketergantungan tegangan terhadap kemiringan bidang menjadi jelas kelihatan. Penurunan pernyataan aljabar yang berkenaan dengan sudut miring, bila dijadikan sama dengan nol, dapat menentukan letak bidang-bidang di mana tegangan normal maupun tegangan geser mencapai harga maksimum atau minimum. Tegangan dalam bidang-bidang ini sangat penting dalam memperkirakan sifat bahan yang diberikan.

Persamaan aljabar akan kita bentuk dengan menggunakan sebuah elemen, seperti yang terlihat dalam Gambar 8-4(a), dalam suatu status tegangan bidang yang umum. Tegangan tarik normal adalah positif, sedang tegangan tekan adalah negatif. Tegangan geser positif didefinisikan sebagai *bekerja ke atas pada permukaan sebelah kanan DE dari elemen tersebut*. Sikap tegangan geser yang lain akan mengikuti syarat-syarat keseimbangan. *Kaedah tanda ini untuk tegangan geser adalah berlawanan dengan yang telah kita tetapkan dalam pasal 4-7 dan akan kita gunakan hanya dalam tugas ini saja*. Di sini transformasi tegangan dicoba dari sistem sumbu koordinat  $xy$  menjadi sistem sumbu koordinat  $x'y'$ . Sudut  $\theta$ , yang menentukan letak sumbu  $x'$ , akan positif bila diukur dari sumbu  $x$  menuju sumbu  $y$  dengan arah yang berlawanan dengan jarum jam.

Dengan melalui suatu bidang  $BC$  yang tegak lurus pada sumbu  $x'$  melalui elemen tersebut, kita isolasikan irisan yang terdapat dalam Gambar 8-4(b). Bidang  $BC$  membuat



**Gambar 8-4** Elemen-elemen untuk menurunkan rumus-rumus tegangan pada bidang miring.

sudut  $\theta$  dengan sumbu vertikal, dan bila bidang ini mempunyai luas  $dA$ , maka luas permukaan  $AC$  dan  $BC$  secara berturut-turut adalah  $dA \cos \theta$  dan  $dA \sin \theta$ . Dengan mengalikan tegangan dengan luas yang bersangkutan, maka kita dapat membuat suatu diagram gaya-gaya yang bekerja pada pasak tersebut, seperti yang terlihat dalam Gambar 8-4(c). Kemudian dengan menggunakan persamaan keseimbangan statika untuk gaya yang bekerja pada pasak tersebut, maka kita perolehlah tegangan-tegangan  $\sigma_{x'}$  dan  $\tau_{x'y'}$ :

$$\begin{aligned}
 \sum F_{x'} &= 0, & \sigma_{x'} dA &= \sigma_x dA \cos \theta \cos \theta + \sigma_y dA \sin \theta \sin \theta \\
 & & &+ \tau_{xy} dA \cos \theta \sin \theta + \tau_{yx} dA \sin \theta \cos \theta \\
 \sigma_{x'} &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\
 &= \sigma_x \frac{(1 + \cos 2\theta)}{2} + \sigma_y \frac{(1 - \cos 2\theta)}{2} + \tau_{xy} \sin 2\theta \\
 \therefore \sigma_{x'} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (8-1)
 \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, dari  $\Sigma F_{y'} = 0$ ,

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (8-2)$$

Persamaan 8-1 dan 8-2 secara berturut-turut adalah pernyataan umum untuk tegangan normal dan tegangan geser, pada bidang yang letaknya ditentukan oleh sudut  $\theta$  dan yang disebabkan oleh suatu sistem tegangan yang diketahui. Hubungan-hubungan ini merupakan persamaan untuk transformasi tegangan dari satu kumpulan sumbu koordinat ke yang lain. Terutama perlu diperhatikan bahwa  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  dan  $\tau_{xy}$  merupakan tegangan-tegangan yang mula-mula diketahui.

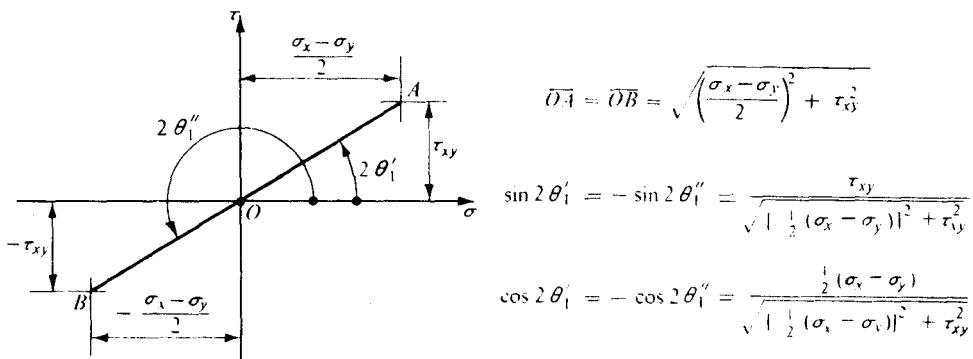
### 8.4<sup>v</sup> TEGANGAN UTAMA (PRINCIPAL STRESSES)

Perhatian seringkali berpusat pada penentuan tegangan yang paling besar seperti yang diberikan oleh Persamaan-persamaan 8-1 dan 8-2 sedangkan yang pertama-tama kita cari adalah bidang-bidang di mana tegangan-tegangan yang seperti ini terjadi. Untuk mendapatkan bidang dengan tegangan normal yang maksimum atau minimum, Persamaan 8-1 dideferensiasikan terhadap sudut  $\theta$  dan hasil diferensiasi tersebut disamakan dengan nol, yaitu :

$$\frac{d\sigma_{x'}}{d\theta} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} 2 \sin 2\theta + 2\tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

$$\text{Jadi} \quad \tan 2\theta_1 = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} \quad (8-3)$$

di mana tanda huruf sudut  $\theta$  dipergunakan untuk menunjukkan sudut yang menentukan bidang tegangan normal maksimum atau minimum. Persamaan 8-3 mempunyai dua akar, sebab harga tangen sudut dalam kuadran-kuadran yang berlawanan adalah sama seperti bisa kita lihat dari Gambar 8-5. Akar-akar ini mempunyai selang antara sebesar  $180^\circ$  dan karena Persamaan 8-3 adalah untuk sudut ganda, maka akar-akar sudut  $\theta_1$  menjadi ber-



Gambar 8-5 Fungsi sudut untuk tegangan utama

beda  $90^\circ$ . Salah satu akar sudut ini menentukan bidang di mana bekerja tegangan normal maksimum; sedang yang lainnya sesuai dengan bidang untuk tegangan normal minimum. Untuk membedakan antara kedua akar sudut ini, maka digunakanlah tanda koma dan dua koma di atas.

Sebelum mengevaluasi tegangan-tegangan di atas, secara hati-hati amatilah bahwa bila sekiranya kita menginginkan letak bidang yang tidak ada tegangan geser, maka Persamaan 8-2 harus kita samakan dengan nol. Ini menghasilkan hubungan yang sama dengan yang terdapat pada Persamaan 8-3. Jadi kita sampai kepada kesimpulan yang penting: Pada bidang-bidang di mana terjadi tegangan normal yang maksimum atau minimum, tidak akan didapati tegangan geser. Bidang ini disebut sebagai *bidang utama* tegangan, dan tegangan yang bekerja pada bidang ini, yaitu tegangan normal maksimum dan minimum, disebut *tegangan utama*.

Besarnya tegangan utama dapat kita peroleh dengan mengganti harga-harga fungsi sinus dan kosinus yang sesuai dengan sudut ganda yang diberikan oleh Persamaan 8-3 ke dalam Persamaan 8-1. Setelah ini dilakukan dan hasilnya disederhanakan, maka ungkapan untuk tegangan normal maksimum (dilambangkan oleh  $\sigma_1$ ) dan tegangan normal minimum (dilambangkan oleh  $\sigma_2$ ) menjadi

$$\sigma_{1 \text{ atau } 2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (8-4)$$

di mana tanda positif yang terdapat di depan tanda akar harus digunakan untuk mendapatkan  $\sigma_1$  sedang tanda negatif untuk mendapatkan  $\sigma_2$ . Bidang di mana tegangan ini bekerja dapat kita tentukan dengan menggunakan Persamaan 8-3. Sebuah akar Persamaan 8-3 tertentu dapat kita substitusikan ke dalam Persamaan 8-1 untuk memeriksa hasil yang diperoleh dari Persamaan 8-4 dan pada saat yang sama dapat menentukan letak bidang tempat bekerjanya tegangan utama.

## 8-5 TEGANGAN GESER MAKSIMUM

Jika untuk sebuah elemen diketahui  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  dan  $\tau_{xy}$ , maka tegangan geser pada setiap bidang ditentukan oleh suatu sudut  $\theta$  yang diberikan oleh Persamaan 8-2, sedangkan pelajaran yang serupa yang kita lakukan dengan tegangan normal di atas dapat pula kita lakukan dengan tegangan geser. Jadi, dengan cara yang sama, untuk menentukan letak bidang di mana bekerja tegangan geser maksimum atau minimum, maka Persamaan 8-2 haruslah didiferensiasikan terhadap sudut  $\theta$  dan hasil diferensiasi disamakan dengan nol. Bila ini dilaksanakan dan hasilnya disederhanakan, maka kita mendapatkan

$$\tan 2\theta_2 = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}} \quad (8-5)$$

di mana tanda angka 2 yang terletak di belakang  $\theta$  menunjukkan bidang pada mana tegangan geser adalah maksimum atau minimum. Sebagaimana halnya Persamaan 8-3, maka Persamaan 8-5 pun mempunyai dua buah akar, yang lagi-lagi dapat kita bedakan dengan memberikan  $\theta_2$ , satu tanda dan dua tanda koma di atas. Kedua bidang yang di-

hasilkan oleh persamaan ini saling tegaklurus sesamanya. Selanjutnya harga  $\tan 2\theta_2$  yang diberikan oleh Persamaan 8-5 merupakan negatif kebalikan dari harga  $\tan 2\theta_1$  dalam Persamaan 8-3. Jadi akar-akar sudut ganda Persamaan 8-5 merupakan  $90^\circ$  lebih besar dari akar-akar yang sejenis dari Persamaan 8-3. Ini berarti bahwa sudut-sudut yang menentukan letak bidang-bidang tegangan geser maksimum atau minimum membentuk sudut  $45^\circ$  dengan bidang tegangan utama. Substitusi fungsi-fungsi sinus dan cosinus yang berhubungan dengan sudut ganda yang diberikan oleh Persamaan 8-5 ke dalam Persamaan 8-2 dan dengan cara yang serupa dengan yang terdapat dalam Gambar 8-5, kita dapat menentukan harga-harga maksimum dan minimum dari tegangan geser. Yaitu, setelah disederhanakan adalah

$$\tau_{\max/\min} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (8-6)$$

Jadi perbedaan antara tegangan geser maksimum dan tegangan geser minimum hanya terletak pada tanda di depan tanda akar persamaan di atas. Selanjutnya, karena kedua akar yang dihasilkan oleh Persamaan 8-5 menentukan letak antara kedua bidang sebesar  $90^\circ$ , maka hasil persamaan di atas menunjukkan bahwa harga numerik tegangan geser pada bidang-bidang yang saling tegaklurus adalah sama. Konsep ini berulang kali digunakan setelah dimantapkan dalam Pasal 2-9. Pada penurunan persamaan di atas perbedaan tanda kedua tegangan geser tersebut timbul dari kaidah untuk menentukan letak bidang bekerjanya tegangan-tegangan ini. Ditinjau dari segi fisis tanda-tanda ini tidak mempunyai arti, dan dengan alasan ini maka tegangan geser terbesar tanpa memperhatikan tandanya disebut *tegangan geser maksimum*.

Sikap yang pasti dari tegangan geser selalu dapat ditentukan dengan substitusi langsung akar tertentu dari  $\theta_2$  ke dalam Persamaan 8-2. Suatu tegangan geser positif menunjukkan bahwa tegangan tersebut bekerja dalam arah yang diandaikan dalam Gambar 8-4(b), dan demikian pula sebaliknya. Penentuan tegangan geser maksimum merupakan hal yang amat penting untuk bahan-bahan yang kekuatan gesernya lemah. Hal ini akan kita bahas lebih lanjut dalam bab yang berikut.

Tidak sebagaimana halnya pada tegangan utama di mana pada bidang utama tidak akan terjadi tegangan geser, maka tegangan geser maksimum terjadi pada bidang yang biasanya tidak bebas dari tegangan normal. Substitusi  $\theta_2$  dari Persamaan 8-5 ke dalam Persamaan 8-1 akan memperlihatkan bahwa tegangan normal yang bekerja pada bidang tegangan maksimum adalah

$$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (8-7)$$

Karena itu tegangan normal bekerja secara serentak dengan tegangan geser maksimum kecuali bila  $\sigma_x + \sigma_y$  sama dengan nol.

Bila  $\sigma_x$  dan  $\sigma_y$  dalam Persamaan 8-6 adalah tegangan utama,  $\tau_{xy}$  adalah nol dan Persamaan 8-6 menjadi sederhana yaitu

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (8-8)$$

**CONTOH 8-2**

Untuk status tegangan dalam Contoh 8-1, yang dibuat kembali dalam Gambar 8-6(a), (a) kerjakan kembali soal yang lalu untuk  $\theta = -22\frac{1}{2}^\circ$ , dengan menggunakan persamaan-persamaan umum untuk transformasi tegangan; (b) tentukanlah tegangan utama dan buktikanlah bahwa sikap tegangan ini pada elemen yang berorientasi secara tepat; dan (c) tentukanlah tegangan geser maksimum serta tegangan normal yang berhubungan dan tunjukkanlah hasil-hasil ini pada elemen yang berorientasi secara tepat.

**PENYELESAIAN**

Kasus (a). Dengan langsung menggunakan Persamaan-persamaan 8-1 dan 8-2 untuk  $\theta = -22\frac{1}{2}^\circ$ , dengan  $\sigma_x = +3$  MPa,  $\sigma_y = +1$  MPa dan  $\tau_{xy} = +2$  MPa, kita memperoleh

$$\begin{aligned}\sigma_{x'} &= \frac{3+1}{2} + \frac{3-1}{2} \cos(-45^\circ) + 2 \sin(-45^\circ) \\ &= 2 + 1(0,707) - 2(0,707) = +1,29 \text{ MPa} \\ \tau_{x'y'} &= -\frac{3-1}{2} \sin(-45^\circ) + 2 \cos(-45^\circ) \\ &= +1(0,707) + 2(0,707) = +2,12 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Tanda positif dari  $\sigma_{x'}$  menunjukkan tegangan tarik; sedang tanda positif dari  $\tau_{x'y'}$  memperlihatkan bahwa tegangan geser bekerja dalam arah  $+y'$ , seperti yang terlihat dalam Gambar 8-4(b). Hasil-hasil ini terlihat baik dalam Gambar 8-6(b) maupun dalam Gambar 8-6(c).

Kasus (b). Tegangan utama diperoleh dengan menggunakan Persamaan 8-4. Bidang pada mana tegangan utama tersebut bekerja diperoleh dengan menggunakan Persamaan 8-3.

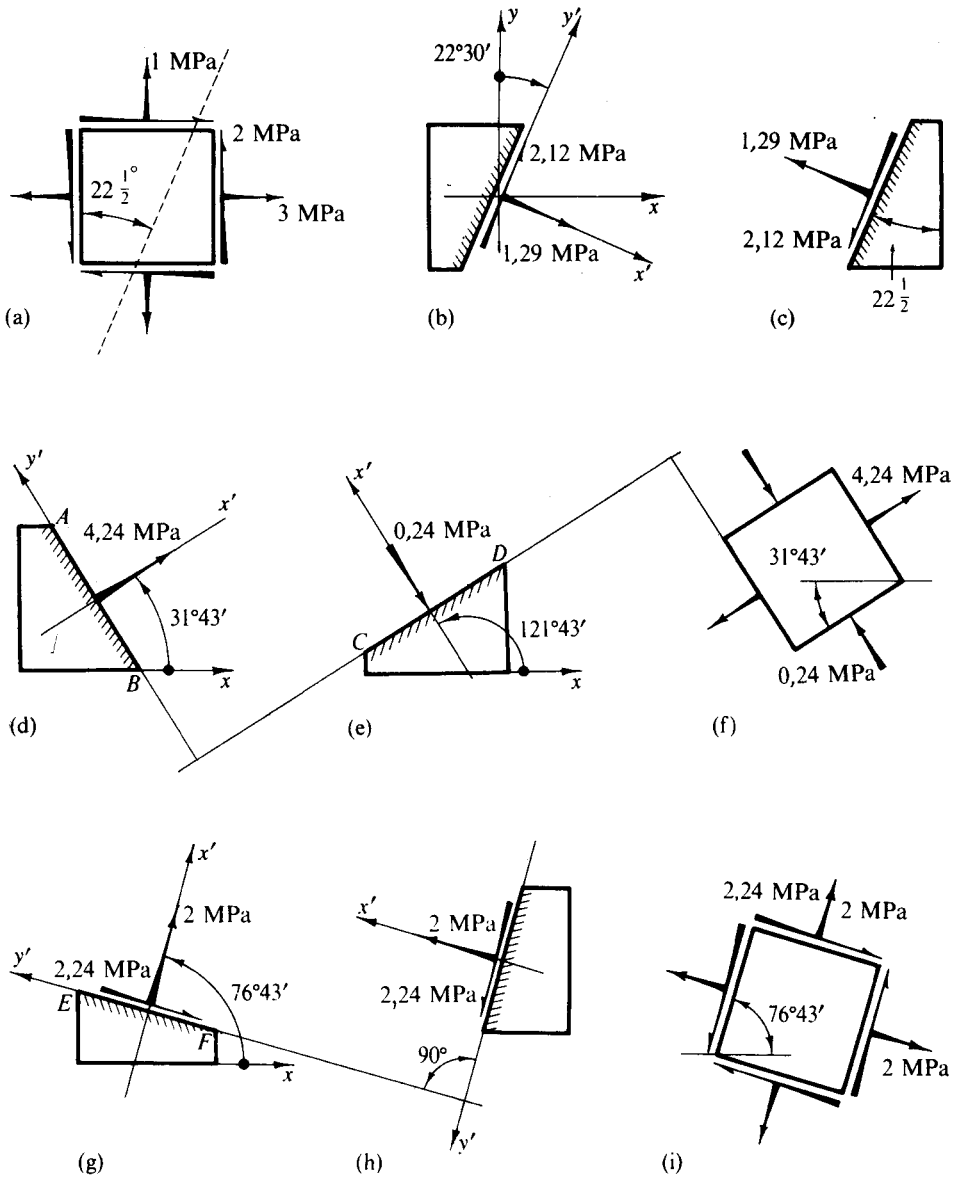
$$\begin{aligned}\sigma_1 \text{ atau } \sigma_2 &= \frac{3+1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3-1}{2}\right)^2 + 2^2} = 2 \pm 2,24 \\ \sigma_1 &= +4,24 \text{ MPa (tarik)}, \quad \sigma_2 = -0,24 \text{ MPa (tekan)} \\ \tan 2\theta_1 &= \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} = \frac{2}{(3-1)/2} = 2 \\ 2\theta_1 &= 63^\circ 26' \quad \text{atau} \quad 63^\circ 26' + 180^\circ = 243^\circ 26'\end{aligned}$$

$$\text{Jadi} \quad \theta'_1 = 31^\circ 43' \quad \text{dan} \quad \theta''_1 = 121^\circ 43'$$

Sudut-sudut ini menentukan letak bidang utama  $AB$  dan  $CD$ , seperti yang terlihat dalam Gambar-gambar 8-6(d) dan (e), di mana  $\sigma_1$  dan  $\sigma_2$  bekerja. Diantara bidang-bidang ini belum diketahui pada bidang yang mana tegangan utama ini bekerja. Jadi, Persamaan 8-1 diselesaikan dengan menggunakan, misalnya  $\theta'_1 = 31^\circ 43'$ . Tegangan yang diperoleh dengan cara perhitungan ini adalah tegangan yang bekerja pada bidang  $AB$ . Kemudian, oleh karena  $2\theta'_1 = 63^\circ 26'$ , maka

$$\sigma_{x'} = \frac{3+1}{2} + \frac{3-1}{2} \cos 63^\circ 26' + 2 \sin 63^\circ 26' = +4,24 \text{ MPa} = \sigma_1$$





Gambar 8-6

Hasil ini, disamping digunakan untuk memeriksa kembali perhitungan yang terdahulu, juga memperlihatkan bahwa tegangan utama maksimum adalah yang bekerja pada bidang AB. Status tegangan lengkap pada titik tertentu dalam bentuk tegangan utama diperlihatkan dalam Gambar 8-6(f).

Kasus (c). Tegangan geser maksimum diperoleh dengan menggunakan Persamaan 8-6. Bidang-bidang di mana tegangan ini bekerja ditentukan oleh Persamaan 8-5. Sikap tegangan geser ini didapatkan dengan memasukkan harga salah satu akar Persamaan 8-5 ke dalam Persamaan 8-2. Tegangan normal yang berhubungan dengan tegangan geser maksimum ditentukan dengan menggunakan Persamaan 8-7.

$$\tau_{\max} = \sqrt{[(3 - 1)/2]^2 + 2^2} = \sqrt{5} = 2,24 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\theta_2 = -\frac{(3 - 1)/2}{2} = -0,500$$

$$2\theta_2 = 153^\circ 26' \quad \text{atau} \quad 153^\circ 26' + 180^\circ = 333^\circ 26'$$

Jadi

$$\theta_2 = 76^\circ 43' \quad \text{dan} \quad \theta_2'' = 166^\circ 43'$$

Bidang-bidang ini dapat dilihat dalam Gambar-gambar 8-6(g) dan (h). Lalu dengan menggunakan  $2\theta_2' = 153^\circ 26'$  dalam Persamaan 8-2,

$$\tau_{x'y'} = -\frac{3 - 1}{2} \sin 153^\circ 26' + 2 \cos 153^\circ 26' = -2,24 \text{ MPa}$$

yang berarti bahwa geser tersebut berada disepanjang bidang  $EF$  yang mempunyai arah yang berlawanan dengan yang terdapat dalam Gambar 8-4(b). Dari Persamaan 8-7

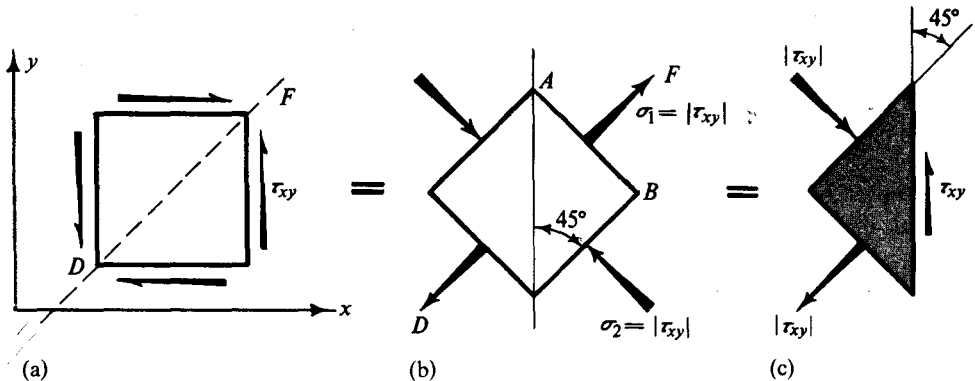
$$\sigma' = \frac{3 + 1}{2} = 2 \text{ MPa}$$

Hasil lengkap ini terlihat dalam Gambar 8-6(i).

Gambaran dari status tegangan tersebut sekarang dapat diperlihatkan dalam tiga bentuk pilihan: sebagai data yang diberikan semula, dan dalam bentuk tegangan yang diperoleh pada bagian (b) dan (c) dari soal ini. Semua gambaran status tegangan ini pada titik tertentu adalah setara.

## 8-6 TRANSFORMASI TEGANGAN PENTING

Suatu transformasi penting dari sebuah gambaran status tegangan pada sebuah titik kepada yang lain terjadi bila tegangan geser murni diubah ke dalam tegangan utama. Untuk tujuan ini tinjaulah sebuah elemen yang dihadapkan hanya kepada tegangan geser  $\tau_{xy}$  seperti dalam Gambar 8-7(a). Kemudian dari Persamaan 8-4 diperoleh tegangan utama  $\sigma_1$  atau  $\sigma_2 = \pm \tau_{xy}$ , yaitu yang secara numerik  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  dan  $\tau_{xy}$  adalah sama semuanya, meskipun  $\sigma_1$  merupakan tegangan tarik, sedang  $\sigma_2$  tegangan tekan. Dalam hal ini, dari Persamaan 8-3 diperoleh bidang-bidang utama yang ditentukan oleh  $\tan 2\theta_1 = \infty$ , yaitu  $2\theta_2 = 90^\circ$  atau  $270^\circ$ . Jadi  $\theta_1' = 45^\circ$  dan  $\theta_1'' = 135^\circ$ ; bidang-bidang yang sesuai dengan sudut-sudut ini dapat dilihat dalam Gambar 8-7(b). Untuk menentukan pada bidang yang mana tegangan tarik  $\sigma_1$  tersebut bekerja, maka kita buat substitusi dengan  $2\theta_1' = 90^\circ$  ke dalam Persamaan 8-1. Perhitungan ini menunjukkan bahwa  $\sigma_1 = +\tau_{xy}$ ; artinya tegangan tarik tersebut bekerja tegaklurus terhadap bidang  $AB$ . Kedua tegangan utama yang setara dengan tegangan geser murni diperlihatkan dalam Gambar-gambar 8-7(b) dan (c). Karena itu, bagaimana pun juga tegangan geser murni tersebut bekerja



**Gambar 8-7** Tegangan geser murni setara dengan tegangan tarik-tekan yang bekerja pada bidang miring  $45^\circ$  terhadap bidang geser.

pada sebuah elemen, dapatlah kita perkirakan bahwa ia akan menghasilkan tegangan tarik pada sepanjang salah satu diagonal dan tegangan tekan pada yang satunya lagi. Diagonal sepanjang mana tegangan tarik bekerja, seperti  $DF$  pada Gambar 8-7(a), disebut sebagai *diagonal geser positif* (positive shear diagonal).

Ditinjau dari segi fisis, transformasi tegangan yang kita peroleh sepenuhnya sesuai dengan intuisi kita. Bahan tersebut "tidaklah tahu" dengan cara mana status tegangan dilukiskan dan sedikit imajinasi haruslah dapat meyakinkan kita bahwa gabungan tegangan-tegangan geser singgung mengakibatkan tarik sepanjang diagonal geser positif dan tekan sepanjang diagonal yang lainnya.

## 8-7 LINGKARAN TEGANGAN MOHR

Dalam pasal ini Persamaan-persamaan dasar 8-1 dan 8-2 untuk transformasi tegangan pada sebuah titik akan diperiksa lagi untuk ditanggapi secara grafis. Dalam melaksanakan hal ini ada dua tujuan yang ingin kita capai. Pertama, dengan menanggapi persamaan-persamaan ini secara grafis, pengertian yang lebih luas mengenai persoalan umum dari transformasi tegangan akan dapat kita capai. Ini merupakan tujuan utama dari pasal ini. Kedua, dengan bantuan konstruksi grafis, suatu penyelesaian soal-soal transformasi tegangan yang lebih cepat sering dapat kita peroleh. Hal ini akan dibicarakan dalam pasal yang berikut.

Suatu pengkajian yang cermat dari Persamaan-persamaan 8-1 dan 8-2 menunjukkan bahwa kedua persamaan merupakan suatu parametris bentuk lingkaran. Persamaan lingkaran ini diperjelas lagi dengan menuliskannya kembali sebagai berikut :

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (8-9)$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (8-10)$$

Kemudian dengan mengkuadratkan kedua persamaan ini, menambahkan serta menyederhanakannya diperoleh

$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad (8-11)$$

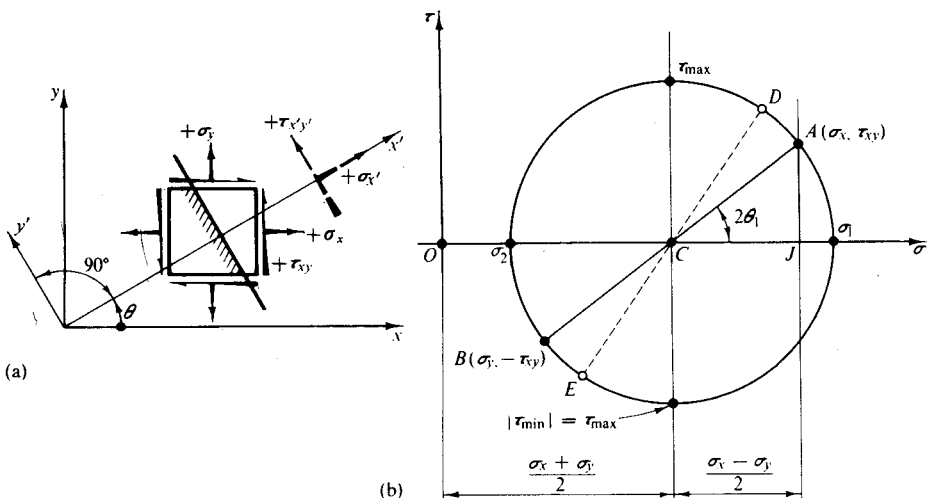
Dalam setiap soal tertentu  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  dan  $\tau_{xy}$  merupakan tiga buah tetapan yang diketahui sedang  $\sigma_{x'}$  dan  $\tau_{x'y'}$  adalah variabel. Jadi Persamaan 8-11 dapat ditulis dalam bentuk yang lebih rapi sebagai

$$(\sigma_{x'} - a)^2 + \tau_{x'y'}^2 = b^2 \quad (8-12)$$

di mana  $a = (\sigma_x + \sigma_y)/2$  dan  $b^2 = [(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + \tau_{xy}^2$  adalah tetapan.

Persamaan ini adalah ungkapan yang kita kenal dalam ilmu ukur analitis  $(x - a)^2 + y^2 = b^2$  untuk suatu lingkaran dengan jari-jari  $b$  yang bertitik pusat pada  $(+a, 0)$ . Jadi, bila sekiranya sebuah lingkaran yang memenuhi persamaan ini kita gambarkan, maka harga-harga simultan dari titik  $(x, y)$  pada lingkaran ini sesuai dengan  $\sigma_{x'}$  dan  $\tau_{x'y'}$  untuk arah tertentu dari sebuah bidang miring. Ordinat dari sebuah titik pada lingkaran merupakan tegangan geser  $\tau_{x'y'}$  sedang absisnya adalah tegangan normal  $\sigma_{x'}$ . Lingkaran yang kita lukis seperti ini disebut *lingkaran tegangan* atau *lingkaran tegangan Mohr*.\*

Lingkaran Mohr didasarkan kepada keterangan mengenai tegangan yang diberikan oleh Gambar 8-8(a) diplot dalam Gambar 8-8(b) dengan  $\sigma$  dan  $\tau$  sebagai sumbu-sumbu koordinat. Pusatnya terletak pada titik  $(a, 0)$  dan jari-jarinya sama dengan  $b$ .



Gambar 8-8 Lingkaran tegangan Mohr

\* Dinamakan demikian sebagai penghargaan kepada Profesor Otto Mohr dari Jerman, yang pada 1895 mengusulkan pemakaiannya pada soal-soal analisa tegangan.

Titik  $A$  pada lingkaran sesuai dengan tegangan pada permukaan sebelah kanan dari elemen yang ditentukan bila  $\theta = 0^\circ$ . Untuk titik ini,  $\sigma_{x'} = \sigma_x$ , dan  $\tau_{x'y'} = \tau_{xy}$ . Bila  $AJ/CJ = \tau_{xy}/[(\sigma_x - \sigma_y)/2]$ , maka menurut Persamaan 8-3, sudut  $ACJ$  sama dengan  $2\theta_1$ .

Dengan  $\theta = 90^\circ$  sumbu  $x'$  akan berarah ke atas dan sumbu  $y'$  menunjuk ke kiri. Dari orientasi sumbu-sumbu ini, maka koordinat titik  $B$  pada lingkaran adalah  $\sigma_{x'} = \sigma_y$  dan  $\tau_{x'y'} = -\tau_{xy}$ . Koordinat titik-titik  $B$  dan  $A$  memenuhi Persamaan 8-11. Alasan yang sama dapat pula dipergunakan untuk setiap pasangan titik yang lain pada lingkaran, seperti  $D$  atau  $E$ . Koordinat titik-titik ini memberikan tegangan yang berhubungan dengan orientasi tertentu dari sumbu-sumbu  $x'y'$  yang menentukan bidang yang melalui sebuah elemen. Seluruh cara yang mungkin untuk menggambarkan tegangan pada sebuah elemen untuk  $\theta$  yang berbeda dinyatakan oleh titik-titik yang terletak pada lingkaran tegangan Mohr. Karena itu kesimpulan-kesimpulan penting berikut mengenai status tegangan pada sebuah titik dapat kita tarik :

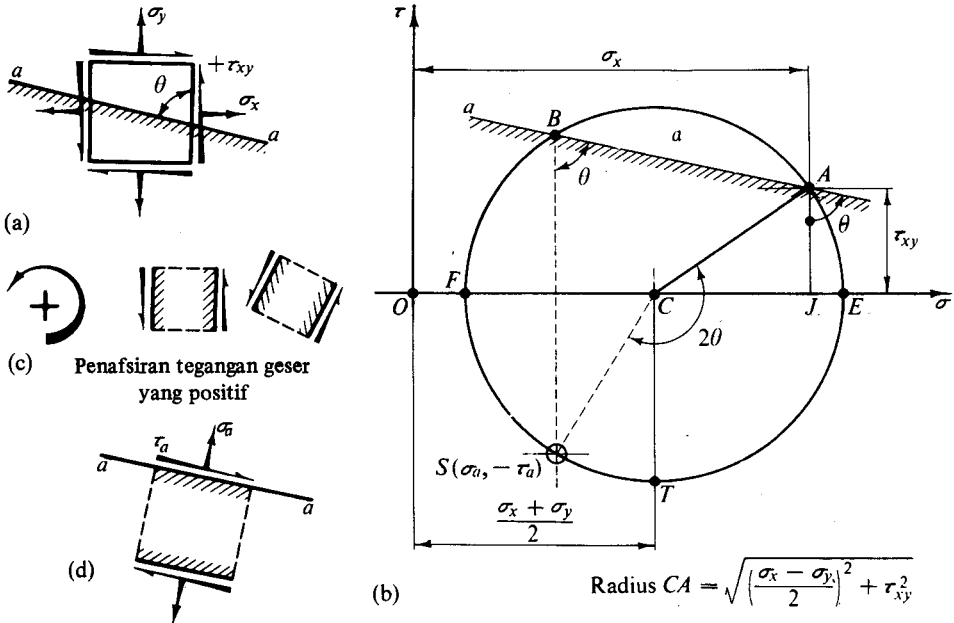
1. Tegangan normal yang paling besar adalah  $\sigma_1$ ; yang terkecil adalah  $\sigma_2$ . Tegangan geser tidak terjadi dengan salah satu sumbu utama ini.
2. Tegangan geser terbesar  $\tau_{\max}$  secara numerik adalah sama dengan radius lingkaran, juga sama dengan  $(\sigma_1 - \sigma_2)/2$ . Tegangan normal yang sama dengan  $(\sigma_1 + \sigma_2)/2$  bekerja pada masing-masing bidang tegangan geser maksimum.
3. Bila  $\sigma_1 = \sigma_2$ , maka lingkaran Mohr berubah menjadi sebuah titik dan tegangan geser tidak ada yang terbentuk dalam bidang  $xy$  tersebut.
4. Bila  $\sigma_x + \sigma_y = 0$ , maka pusat lingkaran Mohr akan berimpit dengan titik asal koordinat  $\sigma-\tau$  dan terjadilah status geser murni.
5. Jumlah tegangan normal pada dua bidang yang saling tegak lurus sesamanya adalah invarian, yaitu

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \text{konstan}$$

## 8-8 KONSTRUKSI LINGKARAN TEGANGAN MOHR

Lingkaran tegangan Mohr sangat luas dipergunakan dalam praktek transformasi tegangan. Untuk mendapatkan nilai tegangan tersebut, prosedur yang dilakukan haruslah cepat dan sederhana. Sebagai pertolongan dalam pemakaiannya, maka di bawah ini akan kita gariskan prosedur yang dianggap lebih baik. Semua langkah-langkah dalam pembentukan lingkaran tersebut dapat dibenarkan berdasarkan hubungan-hubungan yang telah kita kembangkan sebelumnya. Sebuah lingkaran Mohr tertentu terdapat dalam Gambar 8-9.

1. Buatlah sketsa elemen di mana tegangan-tegangan normal dan geser kita ketahui dan tunjukkan pada elemen ini sikap yang tepat dari tegangan-tegangan ini. Dalam persoalan yang sebenarnya permukaan dari elemen ini harus mempunyai hubungan yang tepat pada sumbu yang dianalisa.
2. Pasanglah sistem sumbu koordinat segiempat di mana sumbu mendatar adalah sumbu tegangan normal dan sumbu tegak adalah sumbu tegangan geser. Arah sumbu yang positif diambil seperti biasanya yaitu ke atas dan ke arah kanan.
3. Tentukan letak titik pusat lingkaran, yaitu pada sumbu mendatar pada jarak  $(\sigma_x + \sigma_y)/2$  dari titik asal. Tegangan tarik adalah positif, sedang tegangan tekan adalah negatif.



Gambar 8-9 Pembuatan lingkaran tegangan Mohr

4. Dari permukaan kanan elemen yang disiapkan dalam langkah (1), bacalah harga-harga  $\sigma_x$  dan  $\tau_{xy}$  dan gambarkanlah titik pengendali  $A$  pada lingkaran. Jarak koordinat terhadap titik ini diukur dari titik asal. Tanda  $\sigma_x$  adalah positif bila merupakan tegangan tarik dan negatif bila tegangan tekan; sedang  $\tau_{xy}$  adalah positif bila berarah ke atas pada permukaan sisi kanan dari elemen dan negatif bila ke bawah.
5. Hubungkanlah titik pusat lingkaran yang diperoleh dalam langkah (3) dengan titik yang di-plot dalam langkah (4) dan tentukanlah jarak ini, yang merupakan jari-jari lingkaran.
6. Gambarlah lingkaran dengan menggunakan radius yang diperoleh dalam langkah (5). Bila yang kita perhatikan, hanyalah besar dan tanda dari tegangan, maka langkah ini sudah cukup untuk menjawab persoalan. Koordinat titik-titik pada lingkaran dapat memberikan keterangan yang diperlukan.
7. Untuk menerangkan arah dan sikap tegangan yang bekerja pada bidang miring, maka tariklah sebuah garis yang sejajar dengan bidang miring tersebut melalui titik  $A$ , dan tentukanlah letak titik  $B$  dari garis tersebut pada lingkaran. Koordinat titik  $S$  yang terletak secara vertikal pada sisi yang berlawanan pada lingkaran dari titik  $B$  memberikan tegangan yang bekerja pada bidang miring tersebut di atas. Pada Gambar 8-9(b) tegangan ini ditunjukkan oleh  $\sigma_a$  dan  $-\tau_a$ .\* Harga positif dari  $\sigma$

\* Karena bidang miring  $a-a$  dalam Gambar 8-9(a) membuat sudut  $\theta$  dengan permukaan kanan dari elemen tersebut, maka sudut  $ABS$  dalam Gambar 8-9(b) adalah sama dengan  $\theta$ . Dari konstruksi yang diperlihatkan dalam diagram ini diperoleh bahwa sudut pusat  $ACS$  adalah sama dengan  $2\theta$ , dan bahwa  $\sigma_a$  dan  $-\tau_a$ , masing-masing memenuhi Persamaan-persamaan 8-1 dan 8-2.

menunjukkan suatu tegangan tarik, dan demikian pula sebaliknya. Sikap tegangan geser dapat ditentukan dengan menggunakan tanggapan dalam Gambar 8-9(c). Kecenderungan tegangan geser pada kedua permukaan elemen yang berlawanan mengakibatkan perputaran elemen tersebut berlawanan dengan arah jarum jam, dapat dikaitkan dengan suatu tegangan geser yang positif. Berdasarkan ini maka arti dari hasil  $(+\sigma_a, -\tau_a)$  dapat dilihat pada Gambar 8-9(d).

8. Dengan melakukan cara yang terbalik, kita dapat pula menentukan bidang di mana bekerja tegangan yang berkaitan dengan titik-titik pada lingkaran. Jadi dengan menarik sebuah garis dari titik  $A$  kepada  $E$  atau  $F$ , yaitu dengan membuat titik seperti  $B$  berimpit dengan perpotongan salah satu dari garis ini dengan lingkaran, maka akan kita peroleh kemiringan bidang di mana tegangan-tegangan utama bekerja. Untuk hal yang khusus ini jarak garis  $BS$  berubah bentuk menjadi sebuah titik. Tegangan utama yang diberikan oleh titik perpotongan yang khusus ini (baik  $E$  atau  $F$ ) akan bekerja tegak lurus terhadap garis yang menghubungkan titik potong ini dengan titik  $A$ . Sebagai sebelumnya, tegangan positif menunjukkan tegangan tarik, demikian pula sebaliknya.

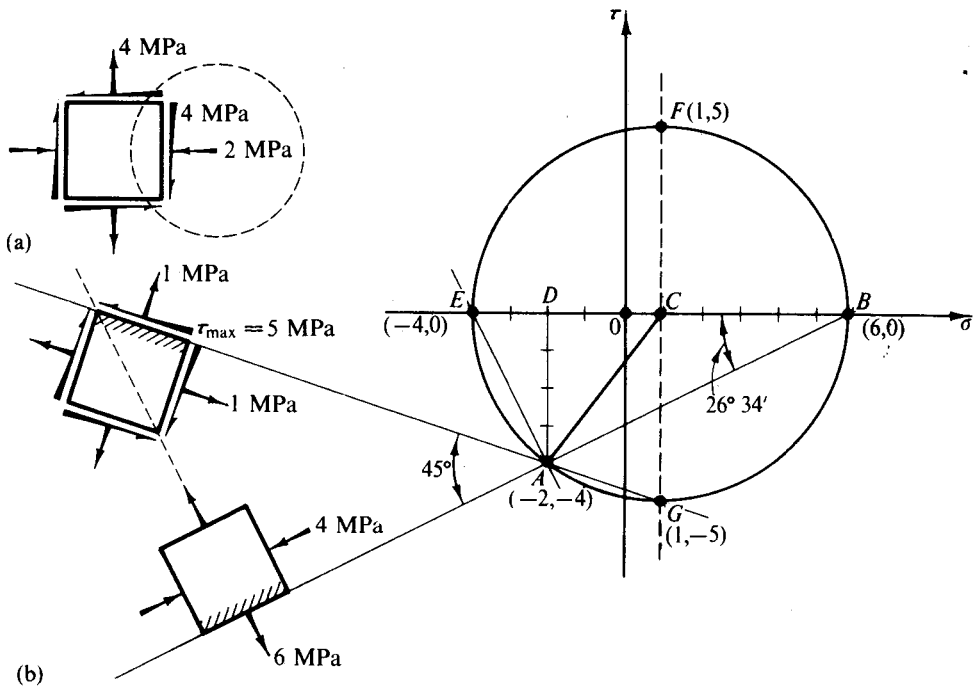
Dengan memulai dengan titik yang paling tinggi atau paling rendah pada lingkaran, maka kita akan mendapatkan bidang-bidang yang bekerjanya tegangan-tegangan geser maksimum serta tegangan normal yang bersangkutan. Misalnya, dengan membayangkan bahwa titik  $S$  bergerak ke titik  $T$ , maka bidang di mana bekerjanya tegangan pada titik  $T$  ditentukan oleh letak yang baru dari garis  $BA$  dengan titik  $B$  yang bergerak ke titik yang tertinggi pada lingkaran tersebut.

Untuk menyelesaikan persoalan transformasi tegangan dengan menggunakan lingkaran Mohr, prosedur yang lalu dapat pula dilakukan secara grafis. Tetapi dalam hubungan dengan pembuatan gambar secara grafis ini disarankan menggunakan perhitungan ilmu ukur sudut dari harga-harga yang kritis. Kemudian tugas tersebut dapat dilakukan dengan alasan kasar tanpa perlu memperhatikan skala jarak atau sudut, yang akan memberikan hasil yang teliti. Menggunakan lingkaran Mohr dengan cara ini setara dengan menggunakan persamaan-persamaan dasar transformasi tegangan.

Terdapat persoalan-persoalan lain yang melibatkan perputaran sumbu yang menimbulkan persamaan transformasi yang *secara matematis sama* dengan persamaan transformasi tegangan. Ini memberikan kemungkinan penggunaan lukisan lingkaran Mohr dengan mengetahui secara tepat variabel-variabel yang sesuai dengan  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\sigma_x'$  dan  $\tau_{x'y'}$ . Lingkaran regangan Mohr adalah salah satu contoh yang akan kita bicarakan dalam Pasal 8-12. Penggunaan lingkaran Mohr yang bermanfaat yang lain adalah mendapatkan titik berat sumbu-sumbu utama dan momen inersia utama yang bersangkutan untuk irisan penampang yang tidak simetris. Persamaan-persamaan yang diperlukan diturunkan dalam lampiran bab ini, di mana suatu contoh numerik dikemukakan untuk melukiskan penggunaan lingkaran Mohr dalam hubungan ini.

### CONTOH 8-3

Diberikan status tegangan seperti yang terlihat dalam Gambar 8-10(a), ditransformasikan (a) ke dalam tegangan utama, dan (b) ke dalam tegangan geser maksimum dan



Gambar 8-10

tegangan normal yang bersangkutan. Perhatikanlah hasil-hasil untuk kedua kasus tersebut pada elemen-elemen yang berorientasentasi dengan tepat.

#### PENYELESAIAN

Untuk menggambarkan lingkaran tegangan Mohr, besaran-besaran yang berikut dibutuhkan :

1. Titik pusat lingkaran pada sumbu  $\sigma$  :  $(-2 + 4)/2 = +1$  MPa
2. Titik  $A$  pada lingkaran dari data yang terdapat pada permukaan kanan elemen :  $(-2, -4)$  MPa.
3. Jari-jari lingkaran:  $CA = \sqrt{CD^2 + DA^2} = 5$  MPa

Setelah menggambarkan lingkaran tersebut, kita peroleh  $\sigma_1 = +6$  MPa,  $\sigma_2 = -4$  MPa, dan  $\tau_{\max} = 5$  MPa.

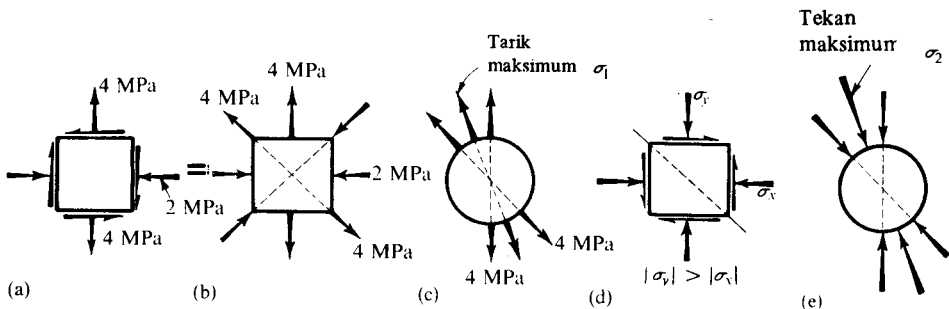
Dengan menggambarkan suatu garis  $\sigma_1$  pada titik  $B$  menuju titik  $A$ , letak bidang bekerjanya tegangan  $\sigma_1$  dapat ditentukan. Dengan cara yang sama, dengan menarik garis, dimulai dari titik  $E$  menuju titik  $A$ , diperoleh bidang di mana bekerja tegangan  $\sigma_2$ . Tegangan geser maksimum  $\tau_{\max}$  dan tegangan normal  $\sigma'$  yang bersangkutan diberikan oleh koordinat titik  $F$ . Langsung vertikal ke bawah pada titik  $G$ , kemiringan garis  $AG$  menentukan letak bidang di mana bekerja  $\tau_{\max} = +5$  MPa dan  $\sigma' = +1$  MPa.

Hasil selengkapnya terlihat pada sketsa dalam Gambar 8-10(b) pada elemen yang berorientasi secara tepat. Sudut-sudut yang terlihat dalam gambar tersebut ditentukan



dari hubungan ilmu ukur segitiga yang sesuai. Jadi karena  $\tan DBA = AD/DB = \frac{4}{8} = 0,5$ , maka sudut  $DBA = 26^\circ 34'$ . Bidang tegangan geser maksimum terletak pada sudut  $45^\circ$  dari bidang tegangan utama. Sudah barang tentu penyelesaian tersebut dapat dilakukan seluruhnya dengan grafik.

Adalah penting untuk diperhatikan bahwa kita mungkin telah dapat menduga arah kira-kira dari tegangan utama yang lebih besar secara aljabar tersebut yang kita peroleh dalam contoh di atas. Disamping dalam bentuk tegangan-tegangan normal dan geser sebagai diberikan dalam data asli, Gambar 8-11(a), maka kita dapat pula meninjau suatu persoalan yang ekuivalen yang terdapat dalam Gambar 8-11(b). Di sini tegangan geser digantikan oleh tegangan-tegangan tarik tekan padanan yang bekerja sepanjang diagonal geser yang sebenarnya. Lalu untuk pertimbangan yang kualitatif, skema elemen yang asli dapat ditiadakan, dan kita dapat memilih tegangan tarik seperti pada Gambar 8-11(c). Dari diagram baru ini jelaslah kelihatan bahwa tanpa menghiraukan besar tegangan tertentu yang terlihat, maka tegangan tarik maksimum resultante haruslah bekerja di mana saja antara tegangan tarik yang diketahui dan diagonal geser positif. Dengan perkataan lain, *garis aksi tegangan utama yang secara aljabar lebih besar ditepati oleh tegangan normal yang diketahui yang secara aljabar lebih besar pula dan diagonal geser positif*. Penggunaan diagonal geser negatif yang terletak  $90^\circ$  dengan diagonal geser positif ialah membantu dalam memvisualisasikan pengaruh ini untuk kejadian di mana kedua tegangan normal yang diketahui adalah tegangan tekan seperti dalam Gambar-gambar 8-11(d) dan (e). Prosedur ini mengadakan suatu pemeriksaan kualitatif terhadap orientasi elemen untuk tegangan-tegangan utama.



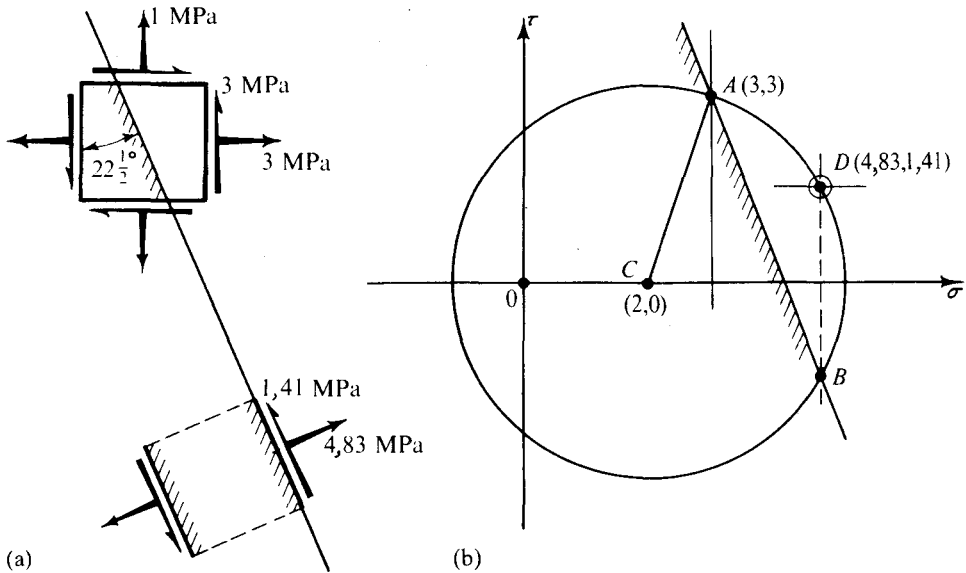
Gambar 8-11 Metoda untuk memperkirakan arah tegangan utama maksimum absolut

#### CONTOH 8-4

Dengan menggunakan lingkaran Mohr, transformasikanlah tegangan yang terlihat dalam Gambar 8-12(a) menjadi tegangan yang bekerja pada bidang miring dengan sudut  $22\frac{1}{2}^\circ$  dengan sumbu vertikal.

#### PENYELESAIAN

Di sini titik pusat lingkaran Mohr adalah pada  $(3 + 1)/2 = +2$  MPa pada sumbu  $\sigma$ . Tegangan pada permukaan kanan dari elemen memberikan titik (3, 3) sebagai koordinat titik A pada lingkaran. Radius lingkaran tersebut adalah 3,16.



Gambar 8-12

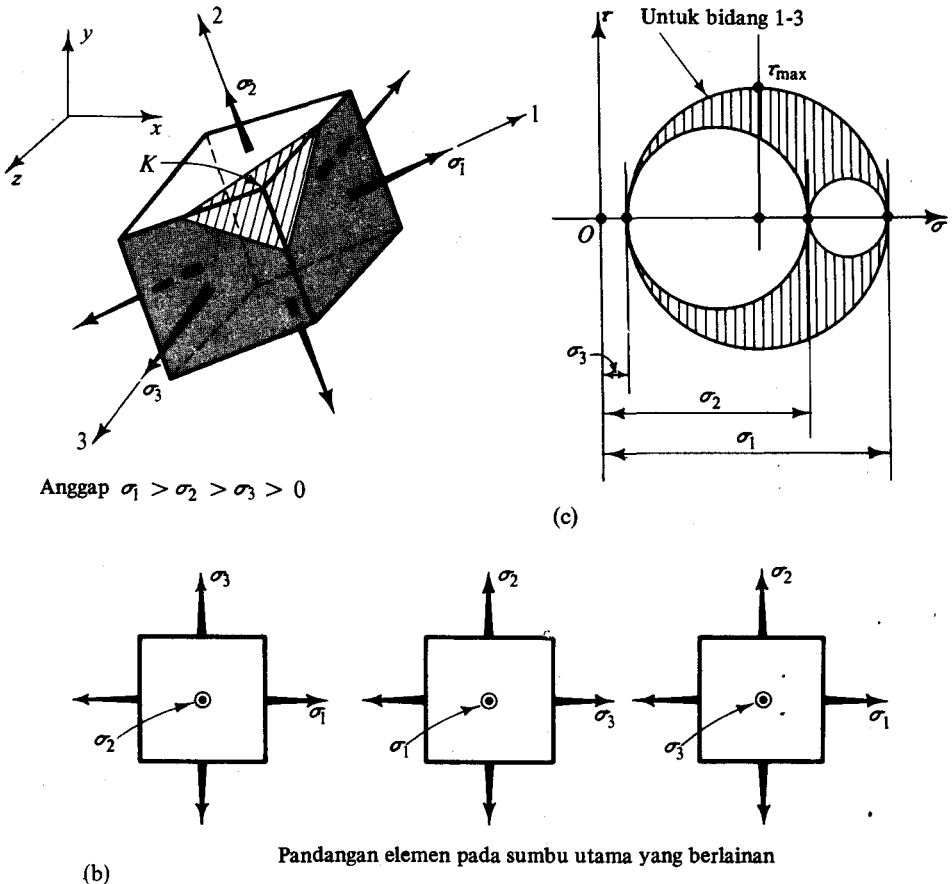
Sebuah garis  $AB$  ditarik sejajar dengan bidang miring yang kita perlukan untuk menentukan letak titik  $B$ ; langsung di atasnya terletak titik  $D$ . Tegangan yang bekerja pada bidang yang diperlukan diberikan oleh koordinat titik  $D$ . Penyelesaian ini mudah sekali dicapai dengan gambar grafis; secara analitis prosedur ini tidaklah begitu langsung. Jenis gambar grafis ini dapat digunakan secara efektif untuk mendapatkan pemeriksaan kualitatif yang cepat terhadap kerja analitis ataupun eksperimental.

Untuk tugas yang numerik skema ilmu ukur segitiga dapat pula dipergunakan dalam masing-masing keadaan yang khusus. Tetapi pendekatan seperti ini acap kali tidak praktis dan penggunaan langsung dari Persamaan-persamaan 8-1 dan 8-2 sebenarnya lebih mudah. Sebagai kemungkinan lain, kita selalu dapat membuat sebuah baji yang dibatasi oleh dua sumbu dan bidang miring dan menyelesaikan persoalan ini seperti yang dilukiskan dalam Contoh 8-1. Dalam beberapa hal pendekatan yang belakangan kurang bermanfaat.

### \*8-9 LINGKARAN TEGANGAN MOHR UNTUK STATUS TEGANGAN UMUM

Transformasi tegangan dan lingkaran tegangan Mohr yang bersangkutan telah kita kemukakan untuk persoalan tegangan bidang. Penyelesaian untuk soal transformasi tegangan yang tiga dimensional adalah di luar jangkauan buku ini. Tetapi beberapa hasil dari analisa seperti ini diperlukan untuk memahami lebih sempurna pokok persoalan ini. Karena itu, sekarang kita akan membuat beberapa ulasan mengenai transformasi status tegangan tiga dimensional.

Dalam buku-buku mengenai elastisitas dan plastisitas kita melihat bahwa setiap status tegangan tiga dimensional (lihat Gambar 1-3 atau 8-2(a)) dapat ditransformasikan



Gambar 8-13 Status tegangan tiga dimensional

ke dalam tiga tegangan utama yang bekerja dalam ketiga arah yang saling tegaklurus. Ini merupakan perluasan langsung dari keadaan yang kita bahas sebelumnya di mana dalam soal tegangan bidang, dua tegangan utama terlihat bekerja dalam dua arah yang saling tegaklurus. Suatu elemen setelah transformasi tegangan yang sesuai dengan tiga tegangan utama yang bekerja padanya dapat kita lihat dalam Gambar 8-13(a). Elemen ini dapat kita lihat dari ketiga arah yang berbeda seperti dalam Gambar 8-13(b).

Terhadap masing-masing proyeksi elemen tersebut dalam Gambar 8-13(b) kita dapat menggambarkan lingkaran Mohr dengan menggunakan prosedur yang telah kita kembangkan sebelumnya. Umpamanya, untuk elemen yang terletak dalam bidang 1-3, maka lingkaran Mohr yang sesuai dengan ini akan melalui  $\sigma_1$  dan  $\sigma_3$  seperti dalam Gambar 8-13(c). Lingkaran-lingkaran yang sama akan dapat pula kita gambarkan untuk bidang-bidang 1-2 dan 2-3. Ketiga lingkaran tersebut akan mengelompok bersama seperti dalam Gambar 8-13(c).

Selanjutnya andaikanlah bahwa sebagai pengganti tinjauan terhadap bidang di mana tegangan utama bekerja, tinjaulah suatu bidang tertentu seperti bidang yang bergaris-

garis  $K$  dalam Gambar 8-13(a). Kemudian kita akan melihat\* bahwa tegangan-tegangan normal dan geser yang bekerja pada semua bidang yang mungkin, bila digambarkan seperti dalam Gambar 8-13(c), akan jatuh dalam daerah bergaris dari diagram tersebut. Ini berarti bahwa ketiga lingkaran yang telah kita gambarkan akan memberikan harga-harga pembatasan dari tegangan-tegangan yang mungkin. Ini merupakan suatu kenyataan penting dan akan digunakan untuk membicarakan sifat-sifat bahan dalam suatu status tegangan yang bersumber banyak.

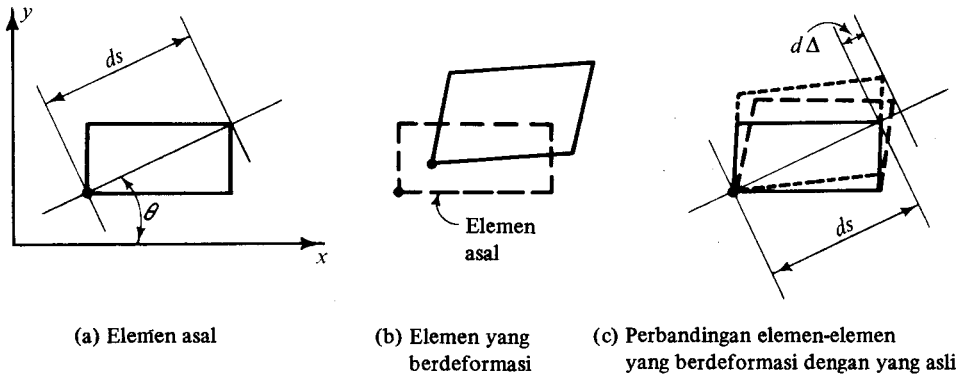
Dibandingkan dengan persoalan umum yang telah kita utarakan, maka dalam persoalan tegangan bidang  $\sigma_3 = 0$ . Tetapi meskipun demikian persoalan yang kurang bersifat umum ini merupakan tiga dimensional. Karena itu adalah mungkin untuk membahas tegangan yang terdapat pada bidang-bidang yang berorientasi tertentu seperti yang ditunjukkan oleh bidang  $K$  dari Gambar 8-13(a). Hal ini belum kita lakukan lebih dahulu. Dengan  $\sigma_3 = 0$ , ketiga lingkaran Mohr diperlukan untuk memperlihatkan pada sebuah plot semua tegangan dengan semua orientasi bidang yang mungkin. Umpamanya tinjaulah sebuah elemen dengan  $\sigma_1 = \sigma_2$ , di mana (dari sudut pandangan dua dimensional) lingkaran Mohr menjadi sebuah titik. Elemen yang sama, yang diamati sepanjang sumbu-sumbu yang berlainan seperti 1 dan 3 dengan umpamanya  $\sigma_1 \neq 0$  dan  $\sigma_3 = 0$ , lingkaran tersebut akan berubah menjadi lingkaran yang beradius  $\sigma_1/2$ . Jadi arah dari mana sebuah elemen kita tinjau merupakan hal yang amat penting.

### \*8-10 ANALISA REGANGAN BIDANG: CATATAN UMUM

Dalam pasal-pasal yang akan menyusul akan kita bahas transformasi regangan yang diketahui yang menyangkut satu kumpulan sumbu atau arah yang diketahui yang akan dihubungkan dengan regangan dalam arah lain. Akan kita perlihatkan bahwa transformasi regangan muai dan geser sangat mirip dengan transformasi tegangan normal dan geser yang telah kita bahas sebelum ini. Jadi untuk memperoleh persamaan transformasi regangan, maka akan kita perkenalkan lingkaran regangan Mohr. Perhatian akan kita batasi kepada kasus dua dimensi atau lebih tepat lagi kepada kasus regangan bidang, yang berarti bahwa  $\epsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$ . Perluasan dari transformasi regangan ke dalam keadaan yang lebih umum meliputi lingkaran regangan Mohr untuk soal tiga dimensi tidak akan kita tinjau dalam buku ini. Karena regangan maksimum biasanya terjadi pada permukaan-permukaan bebas luar dari suatu batang, maka soal dua dimensi menjadi sangat penting.

Dalam membahas regangan pada sebuah titik, yang penting diperhatikan ialah pergeseran (displacement) relatif dari titik-titik yang berdekatan. Translasi dan rotasi elemen secara keseluruhan tidak berpengaruh karena pergeseran-pergeseran ini merupakan pergeseran benda kaku. Umpamanya, bila regangan muai dengan diagonal  $ds$  dari elemen tersebut dalam Gambar 8-14(a) kita pelajari, maka elemen dalam keadaan berdeformasi akan dapat dipulihkan kembali untuk tujuan perbandingan seperti dalam Gambar 8-14(c). Apakah elemen yang dideformasikan tersebut adalah sisi yang horizontal (yang tergambar dengan garis-garis putus panjang) atautkah sisi yang vertikal (yang

\* Lihat O. Hoffman dan G. Sachs, *Introduction to the Theory of Plasticity for Engineers*, New York: McGraw-Hill, 1953, hal. 13.



**Gambar 8-14** Regangan ditentukan berdasarkan deformasi relatif

tergambar dengan garis putus-putus pendek) bukanlah merupakan persoalan guna membandingkannya dengan elemen yang semula yang tidak berdeformasi untuk menentukan  $d\Delta$ . Untuk regangan yang kecil yang menjadi tinjauan kita sepanjang buku ini, maka besaran yang diperlukan, yaitu perpanjangan  $d\Delta$  dalam arah diagonal, sebenarnya adalah sama tanpa menghiraukan metoda pembandingan yang dilakukan.

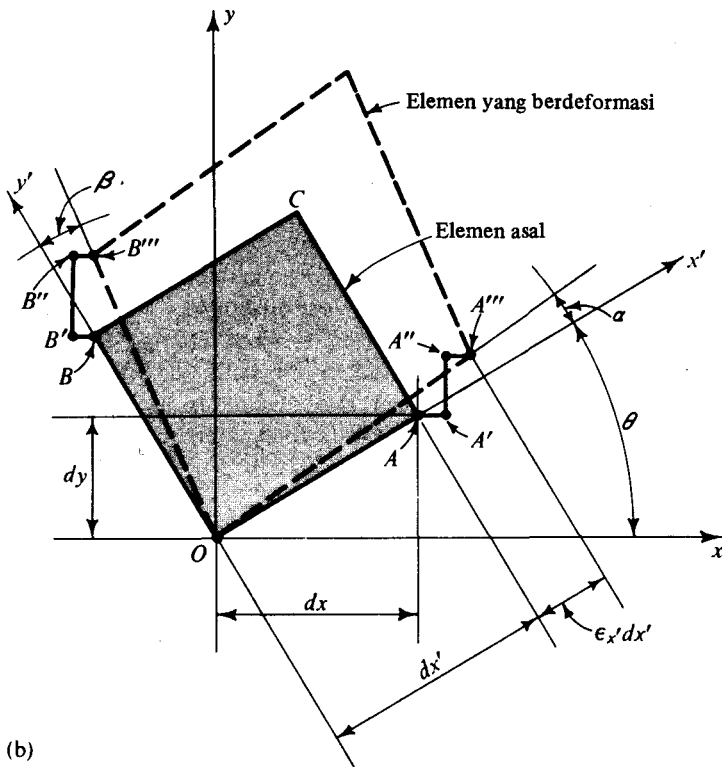
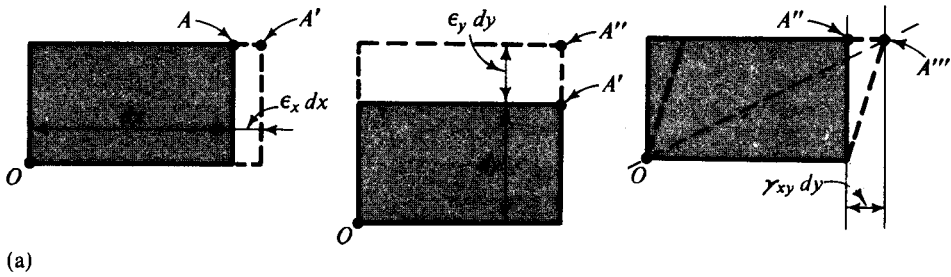
Dalam menentukan regangan dengan cara tersebut di atas, hanya persamaan-persamaan kinematika yang akan kita butuhkan. Sifat-sifat mekanis dari bahan tidak masuk ke dalam soal tersebut. Tetapi setelah gambaran utama dari transformasi regangan kita kemukakan, maka hubungan-hubungan tambahan antara tegangan dan regangan untuk bahan kenyal linier akan kita bahas pada akhir bab.

### \*8-11 PERSAMAAN TRANSFORMASI REGANGAN BIDANG

Dalam membuat persamaan-persamaan transformasi regangan, maka kepatuhan yang ketat kepada kaidah tanda amat diperlukan. Kaidah tanda yang kita gunakan di sini adalah yang kita pilih untuk tegangan dalam Pasal 8-3. Regangan pemuai  $\epsilon_x$  dan  $\epsilon_y$  yang masing-masing merupakan perpanjangan dalam arah  $x$  dan  $y$ , diambil sebagai positif. Regangan geser dipandang positif bila ia memperpanjang diagonal yang mempunyai kemiringan positif dalam sistem koordinat  $xy$ . Untuk baiknya dalam menurunkan persamaan-persamaan transformasi regangan, elemen yang diganggu oleh regangan geser positif akan diambil seperti yang terlihat dalam Gambar 8-15(a). Seperti ditekankan dalam pasal yang lalu, hal ini akan menuju kepada hasil-hasil umum asalkan regangan adalah kecil.

Berikutnya, andaikanlah bahwa regangan  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  dan  $\gamma_{xy}$  yang berkaitan dengan sumbu-sumbu  $xy$  telah diketahui dan regangan muai sepanjang beberapa sumbu baru  $x'y'$  diperlukan. Sistem sumbu baru  $x'y'$  berhubungan dengan sumbu  $xy$  seperti pada Gambar 8-15(b). Dalam koordinat-koordinat baru ini, panjang  $OA$ , yang panjangnya adalah  $dx'$ , dapat dianggap sebagai diagonal elemen diferensial sikuempat  $dx$  kali  $dy$  dalam koordinat asal.

Dengan meninjau titik  $O$  tetap dalam ruang, kita dapat menghitung pergeseran titik  $A$  yang disebabkan oleh regangan yang diberikan pada basis yang berbeda dalam kedua



**Gambar 8-15** Deformasi elemen yang diperbesar untuk menurunkan regangan sepanjang sumbu baru

sistem koordinat. Penyimpangan dalam arah  $x$  adalah  $AA' = \epsilon_x dx$ ; dalam arah  $y$ ,  $A'A'' = \epsilon_y dy$ . Untuk regangan geser dengan menganggap ia disebabkan oleh pergeseran yang mendatar yang diperlihatkan dalam Gambar 8-15(a), maka  $A''A''' = \gamma_{xy} dy$ . Pergeseran ini mempunyai ordo yang tertentu pula. Dalam Gambar 8-15(b), pergeseran yang terlihat mula-mula adalah  $AA'$ , kemudian  $A'A''$  dan yang terakhir  $A''A'''$ . Dengan memproyeksikan pergeseran-pergeseran ini kepada sumbu  $x'$ , kita akan memperoleh pergeseran titik  $A$  sepanjang sumbu  $x'$ . Kemudian, dengan memperhatikan bahwa oleh definisi  $\epsilon_{x'} dx'$  dalam sistem koordinat  $x'y'$  juga merupakan perpanjangan  $OA$ , maka kita

memperoleh kesamaan yang berikut :

$$\epsilon_{x'} dx' = AA' \cos \theta + A'A'' \sin \theta + A''A''' \cos \theta$$

Dengan substitusi pernyataan untuk pergeseran yang tepat dan dengan membaginya dengan  $dx'$ , kita mempunyai

$$\epsilon_{x'} = \epsilon_x \frac{dx}{dx'} \cos \theta + \epsilon_y \frac{dy}{dx'} \sin \theta + \gamma_{xy} \frac{dy}{dx'} \cos \theta$$

Karena,  $dx/dx' = \cos \theta$  dan  $dy/dx' = \sin \theta$

$$\epsilon_{x'} = \epsilon_x \cos^2 \theta + \epsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (8-13)$$

Persamaan 8-13 merupakan persamaan dasar untuk regangan dalam arah tertentu yang ditentukan oleh sumbu  $x'$ . Untuk menggunakan persamaan ini,  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ , dan  $\gamma_{xy}$  haruslah diketahui lebih dahulu. Dengan menggunakan kesamaan-kesamaan ilmu ukur segitiga yang telah kita lakukan dalam menurunkan Persamaan 8-1, maka Persamaan 8-13 dapat kita tuliskan kembali sebagai

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta \quad (8-14)$$

Untuk menyempurnakan pembahasan transformasi regangan pada sebuah titik, kita harus pula melakukan transformasi regangan geser. Untuk maksud ini, tinjaulah sebuah elemen  $OACB$  dengan sisi-sisi  $OA$  dan  $OB$  diarahkan menurut sumbu-sumbu  $x'$  dan  $y'$  seperti dalam Gambar 8-15(b). Oleh definisi, regangan geser untuk elemen ini adalah perubahan dalam sudut  $AOB$ . Dari gambar tersebut perubahan sudut ini adalah  $\alpha + \beta$ .

Untuk deformasi yang kecil sudut kecil  $\alpha$  tersebut dapat ditentukan dengan memproyeksikan pergeseran-pergeseran  $AA'$ ,  $A'A''$ , dan  $A''A'''$  tegaklurus pada  $OA$  dan membagi besaran ini dengan  $dx'$ . Dalam menggunakan pendekatan ini tangen sudut tersebut dianggap sama dengan sudut itu sendiri. Hal ini dapat diterima bila regangan adalah kecil. Jadi

$$\begin{aligned} \alpha \approx \tan \alpha &= \frac{-AA' \sin \theta + A'A'' \cos \theta - A''A''' \sin \theta}{dx'} \\ &= -\epsilon_x \frac{dx}{dx'} \sin \theta + \epsilon_y \frac{dy}{dx'} \cos \theta - \gamma_{xy} \frac{dy}{dx'} \sin \theta \\ &= -(\epsilon_x - \epsilon_y) \sin \theta \cos \theta - \gamma_{xy} \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Dengan jalan yang sama

$$\beta \approx -(\epsilon_x - \epsilon_y) \sin \theta \cos \theta + \gamma_{xy} \cos^2 \theta$$

Oleh karena tu, sejak regangan geser  $\gamma_{x'y'}$  dari suatu sudut yang termasuk antara sumbu-sumbu  $x'y'$  adalah  $\beta + \alpha$ , maka kita mendapat

$$\gamma_{x'y'} = -2(\epsilon_x - \epsilon_y) \sin \theta \cos \theta + \gamma_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

atau

$$\gamma_{x'y'} = -(\epsilon_x - \epsilon_y) \sin 2\theta + \gamma_{xy} \cos 2\theta \quad (8-15)$$

Ini merupakan pernyataan dasar kedua untuk transformasi regangan. Perhatikan bahwa bila  $\theta = 0^\circ$ , regangan geser yang berkaitan dengan sumbu-sumbu  $xy$  dapat diperoleh.

Persamaan-persamaan 8-14 dan 8-15 untuk transformasi regangan adalah analog dengan Persamaan-persamaan 8-1 dan 8-2 untuk transformasi tegangan. Gambaran tentang ini akan kita tekankan lebih lanjut dalam membicarakan lingkaran regangan Mohr.

### \*8-12 LINGKARAN REGANGAN MOHR

Kedua persamaan dasar untuk transformasi regangan yang kita turunkan dalam pasal yang lalu secara matematis menyerupai persamaan-persamaan untuk transformasi tegangan yang diturunkan dalam Pasal 8-3. Untuk mencapai kesamaan yang lebih besar antara penampilan persamaan-persamaan baru dan yang terdahulu, maka Persamaan 8-15 setelah dibagi seluruhnya dengan dua dapat kita tulis kembali di bawah sebagai Persamaan 8-16

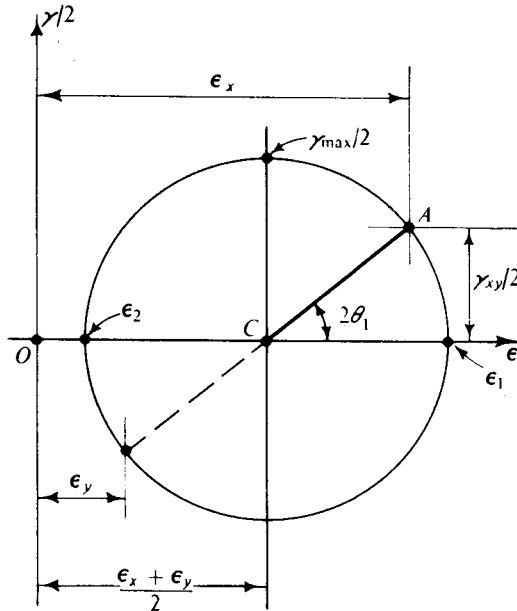
$$\begin{aligned} \epsilon_{x'} &= \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta \\ \frac{\gamma_{x'y'}}{2} &= -\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta \end{aligned} \quad (8-16)$$

Karena persamaan-persamaan transformasi regangan ini dengan regangan geser dibagi dengan dua secara matematis adalah identik dengan transformasi tegangan Persamaan 8-1 dan 8-2, maka lingkaran regangan Mohr dapat pula kita buat. Dalam pembuatan ini setiap titik pada lingkaran memberikan dua harga: satu untuk regangan muai, yang lain untuk regangan geser dibagi dua. Regangan yang berkaitan dengan perpanjangan adalah positif, sedang untuk penyusutan adalah negatif. Regangan geser positif yang mengganggu elemen dapat dilihat dalam Gambar 8-15(a). Dalam menggambar lingkaran sumbu-sumbu yang positif diambil dengan cara yang biasa yaitu ke atas dan ke kanan. Sumbu tegak diukur dalam suku-suku  $\gamma/2$ .

Sebagai sebuah ilustrasi dari lingkaran regangan Mohr, tinjaulah bahwa  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  dan  $+\gamma_{xy}$  diketahui. Kemudian pada sumbu-sumbu  $\epsilon - \frac{1}{2}\gamma$  dalam Gambar 8-16 titik pusat dari lingkaran  $C$  terletak pada titik  $[(\epsilon_x + \epsilon_y)/2, 0]$  dan dari data yang diberikan, titik  $A$  pada lingkaran terletak pada titik  $(\epsilon_x, \gamma_{xy}/2)$ . Suatu pemeriksaan terhadap lingkaran ini membawa kita kepada kesimpulan bahwa lingkaran tersebut serupa dengan yang kita peroleh sebelumnya untuk lingkaran tegangan.

1. Regangan muai maksimum adalah  $\epsilon_1$ , sedang yang minimum adalah  $\epsilon_2$ . Ini adalah regangan-regangan utama, dan berkaitan dengan ini tidak terdapat regangan geser.





Gambar 8-16 Lingkaran regangan Mohr

Arah regangan muai berimpit dengan arah tegangan-tegangan utama. Sebagai dapat diturunkan dari lingkaran tersebut, pernyataan analitis untuk regangan utama adalah

$$(\epsilon_x')_{\max} = \epsilon_1 \text{ atau } \epsilon_2 = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (8-17)$$

di mana tanda positif di depan tanda akar digunakan untuk  $\epsilon_1$ , yaitu regangan utama maksimum dalam arti secara aljabar. Tanda negatif digunakan untuk  $\epsilon_2$ , regangan utama minimum. Bidang-bidang di mana regangan utama bekerja dapat ditentukan secara analitis dari Persamaan 8-16 dengan membuatnya sama dengan nol. Jadi

$$\tan 2\theta_1 = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \quad (8-18)$$

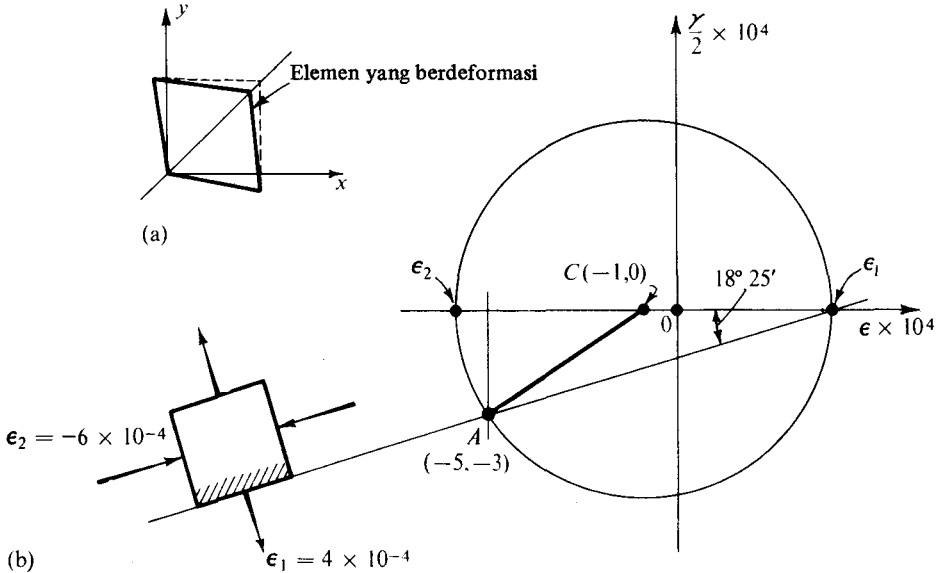
dan karena persamaan ini mempunyai dua buah akar, maka ini benar-benar serupa dengan Persamaan 8-3 dan dapat kita perlakukan dengan cara yang sama.

Regangan geser terbesar  $\gamma_{\max}$  adalah sama dengan dua kali radius lingkaran. Regangan muai  $(\epsilon_1 + \epsilon_2)/2$  dalam dua arah yang saling tegaklurus berkaitan dengan regangan geser maksimum.

Jumlah regangan muai dalam kedua arah yang saling tegaklurus adalah invarian, yaitu  $\epsilon_1 + \epsilon_2 = \epsilon_x + \epsilon_y = \text{tetap}$ . Sifat-sifat lain regangan pada sebuah titik dapat diperoleh dengan mempelajari lingkaran tersebut lebih lanjut.

**CONTOH 8-5**

Diamati bahwa sebuah elemen dari sebuah benda menyusut 0,00050 m setiap meter sepanjang sumbu  $x$ , memuai 0,00030 m setiap meter dalam arah  $y$ , dan mengganggu sebesar sudut\* 0,00060 radian seperti yang terlihat dalam Gambar 8-17(a). Hitunglah regangan utama dan tentukanlah arah kerja regangan ini. Gunakanlah lingkaran regangan Mohr untuk memperoleh penyelesaian.

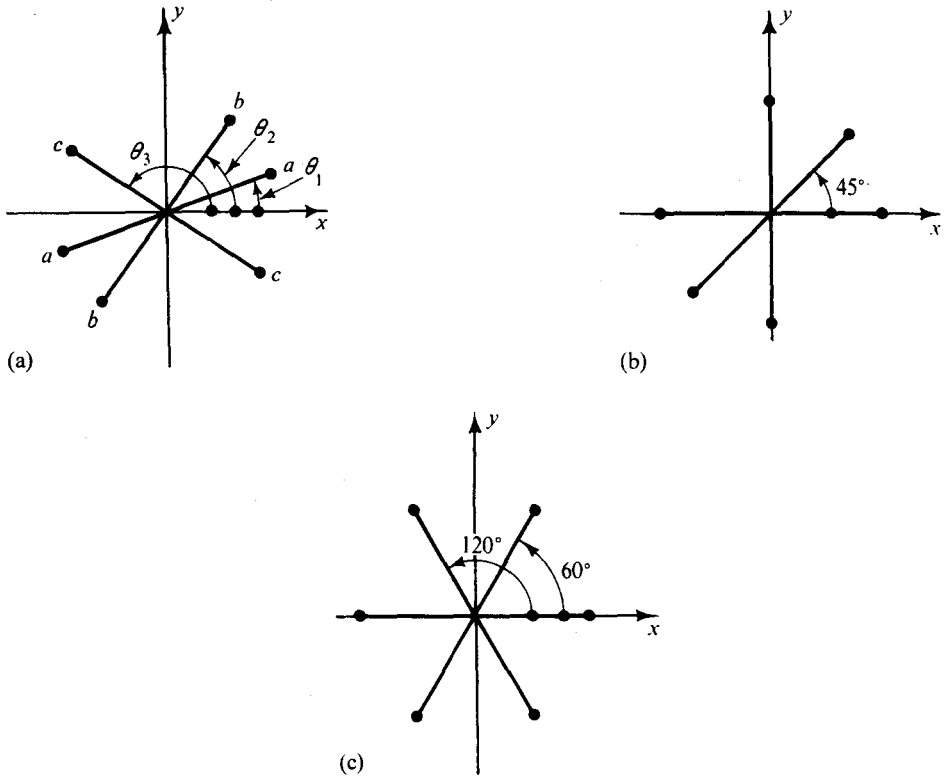
**Gambar 8-17****PENYELESAIAN**

Data yang diberikan menunjukkan bahwa  $\epsilon_x = -5 \times 10^{-4}$ ,  $\epsilon_y = +3 \times 10^{-4}$ , dan  $\gamma_{xy} = -6 \times 10^{-4}$ . Jadi pada suatu sistem sumbu  $\epsilon - \frac{1}{2}\gamma$ , pusat  $C$  dari lingkaran terletak pada titik  $(\epsilon_x + \epsilon_y)/2 = -1 \times 10^{-4}$  pada sumbu  $\epsilon$  pada Gambar 8-17. Titik  $A$  terletak pada  $(-5 \times 10^{-4}, -3 \times 10^{-4})$ . Radius lingkaran  $AC$  sama dengan  $5 \times 10^{-4}$ . Jadi  $\epsilon_1 = +4 \times 10^{-4}$  m per meter terjadi dalam arah yang tegak lurus pada garis  $A - \epsilon_1$ ; dan  $\epsilon_2 = -6 \times 10^{-4}$  m per meter terjadi dalam arah yang tegak lurus pada garis  $A - \epsilon_2$ . Dari geometri gambar tersebut,  $|\theta| = \tan^{-1} (0,0003/0,0009) = 18^\circ 25'$

**\*8-13. PENGUKURAN REGANGAN; ROSET**

Pengukuran regangan muai sangat sederhana untuk dilakukan dan teknik-teknik tinggi yang dapat dipercaya telah pula dikembangkan untuk tujuan ini. Dalam tugas semacam ini, regangan-regangan ini diukur sepanjang garis ukur yang berkelompok secara

\* Pengukuran ini dapat dibuat dengan menggores sebuah bujur sangkar kecil pada sebuah benda, regangan benda tersebut, dan kemudian mengukur perubahan sudut yang terjadi. Perbesaran fotografis dari jaringan ini telah digunakan untuk maksud ini.



**Gambar 8-18** (a) Roset regangan umum; (b) roset regangan segiempat atau  $45^\circ$ ; (c) roset bersudut sama atau delta

berdekatan, yang secara diagramatis ditunjukkan oleh Gambar 8-18(a) dengan garis-garis  $a$ - $a$ ,  $b$ - $b$  dan  $c$ - $c$ . Garis ukur ini dapat diletakkan pada batang yang diselidiki dengan referensi terhadap beberapa sumbu koordinat (seperti  $x$  dan  $y$ ) dengan sudut masing-masing  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  dan  $\theta_3$ . Dengan membandingkan jarak awal antara setiap dua titik ukur yang sesuai dengan jarak dalam batang yang mendapat tegangan, kita memperoleh perpanjangan dalam panjang ukur. Dengan membagi perpanjangan tersebut dengan panjang ukur, kita memperoleh regangan dalam arah  $\theta_1$ , yang kita lambangkan dengan  $\epsilon_{\theta_1}$ . Dengan melakukan kerja yang sama dengan garis-garis ukur yang lain, kita peroleh  $\epsilon_{\theta_2}$  dan  $\epsilon_{\theta_3}$ . Bila jarak-jarak antara titik-titik ukur adalah kecil, kita mendapatkan pengukuran-pengukuran yang mendekati regangan pada sebuah titik.

Sebagai alternatif terhadap prosedur eksperimental yang lalu, maka pengukuran regangan dengan listrik baik sekali dilakukan. Prosedur ini terdiri dari kawat atau foil yang sangat tipis yang ditempelkan pada batang yang sedang diselidiki. Begitu gaya diberikan kepada sebuah batang, maka pemuaian ataupun penyusutan dari kawat atau foil tersebut akan terjadi bersamaan dengan perubahan yang sama pada bahan tersebut.

Perubahan panjang ini mengubah tahanan listrik dari pengukur, yang dapat diukur dan dikalibrasi untuk menunjukkan regangan yang terjadi.

Pengaturan garis-garis ukur pada suatu titik dalam sebuah kelompok, seperti yang diperlihatkan dalam Gambar 8-18, dikenal sebagai *roset-regangan* (strain rosettes). Bila tiga buah pengukuran regangan diambil pada sebuah roset, maka keterangan yang diperoleh cukup untuk menentukan status lengkap dari regangan bidang pada sebuah titik.

Bila sudut-sudut  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  dan  $\theta_3$ , bersama dengan regangan yang bersangkutan  $\epsilon_{\theta_1}$ ,  $\epsilon_{\theta_2}$  dan  $\epsilon_{\theta_3}$  dapat diketahui dari pengukuran, maka ketiga persamaan yang bersamaan yang diatur sesudah Persamaan 8-13 dapat pula kita tulis. Dalam menuliskan persamaan-persamaan ini adalah baik untuk menggunakan notasi yang berikut:  $\epsilon_x' \equiv \epsilon_{\theta_1}$ ,  $\epsilon_x'' \equiv \epsilon_{\theta_2}$  dan  $\epsilon_x''' \equiv \epsilon_{\theta_3}$ .

$$\begin{aligned}\epsilon_{\theta_1} &= \epsilon_x \cos^2 \theta_1 + \epsilon_y \sin^2 \theta_1 + \gamma_{xy} \sin \theta_1 \cos \theta_1 \\ \epsilon_{\theta_2} &= \epsilon_x \cos^2 \theta_2 + \epsilon_y \sin^2 \theta_2 + \gamma_{xy} \sin \theta_2 \cos \theta_2 \\ \epsilon_{\theta_3} &= \epsilon_x \cos^2 \theta_3 + \epsilon_y \sin^2 \theta_3 + \gamma_{xy} \sin \theta_3 \cos \theta_3\end{aligned}\quad (8-19)$$

Kumpulan persamaan ini dapat kita selesaikan untuk  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  dan  $\gamma_{xy}$  dan persoalan ini kembali kepada kasus-kasus yang telah kita tinjau.

Untuk memperkecil tugas perhitungan, alat ukur dalam sebuah roset biasanya dapat kita susun dengan suatu cara yang lebih teratur. Umpamanya dalam Gambar 8-18(b),  $\theta_1 = 0^\circ$ ,  $\theta_2 = 45^\circ$  dan  $\theta_3 = 90^\circ$ . Pengaturan garis-garis ukur ini dikenal sebagai *roset regangan segiempat* atau  $45^\circ$ . Dengan substitusi langsung ke dalam Persamaan 8-19, kita memperoleh untuk roset ini

$$\epsilon_x = \epsilon_{0^\circ}, \quad \epsilon_y = \epsilon_{90^\circ}, \quad \epsilon_{45^\circ} = \frac{\epsilon_x}{2} + \frac{\epsilon_y}{2} + \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

atau

$$\gamma_{xy} = 2\epsilon_{45^\circ} - (\epsilon_{0^\circ} + \epsilon_{90^\circ})$$

Jadi  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  dan  $\gamma_{xy}$  menjadi diketahui.

Pengaturan garis-garis ukur yang lain dapat dilihat dalam Gambar 8-18(c). Ini disebut sebagai *roset sama sudut* atau *delta* atau  $60^\circ$ . Sekali lagi, dengan substitusi ke dalam Persamaan 8-19 dan menyederhanakannya, kita memperoleh  $\epsilon_x = \epsilon_{0^\circ}$ ,  $\epsilon_y = (2\epsilon_{60^\circ} + 2\epsilon_{120^\circ} - \epsilon_{0^\circ})/3$ , dan  $\gamma_{xy} = (2/\sqrt{3})(\epsilon_{60^\circ} - \epsilon_{120^\circ})$ .

Jenis-jenis roset yang lain adakalanya dipergunakan pula dalam eksperimen. Data dari semua roset dapat pula ditelaah dengan menggunakan Persamaan 8-19 menyelesaikannya untuk  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  dan  $\gamma_{xy}$  dan kemudian menggunakan lingkaran regangan Mohr.

Kadang-kadang roset dengan lebih dari tiga garis dipergunakan pula. Suatu pengukuran garis ukur tambahan dapat memberikan pemeriksaan terhadap tugas eksperimental. Untuk roset-roset ini regangan-regangan yang invarian dalam arah-arrah yang saling tegaklurus sesamanya dapat pula digunakan untuk memeriksa data tersebut.

Penggunaan teknik roset eksperimental dalam persoalan analisa tegangan yang rumit hampir sangat diperlukan.

### \*8-14 HUBUNGAN LINIER TAMBAHAN ANTARA TEGANGAN DAN REGANGAN DAN DI ANTARA $E$ , $G$ DAN $\nu$

Hubungan tambahan antara tegangan dan regangan untuk bahan-bahan yang elastis linier dan isotropik akan kita bahas dalam pasal ini. Hubungan-hubungan ini sangat berfaedah untuk mendapatkan tegangan untuk regangan bidang (planar) dan untuk mendapatkan perubahan volume dalam bahan elastis yang mendapat tekanan luar yang merata. Hubungan yang mendasar antara tetapan-tetapan elastis  $E$ ,  $D$  dan  $\nu$  akan kita dapatkan pula.

#### Hubungan antara Tegangan dan Regangan Utama

Dalam banyak penyelidikan praktis, regangan pada permukaan sebuah batang ditentukan dengan cara roset. Dengan menggunakan lingkaran regangan Mohr ataupun persamaan-persamaan transformasi tegangan, maka regangan utama dapat kita peroleh. Dari sini kita dapat menentukan tegangan utama secara langsung. Untuk mendapatkan persamaan yang sesuai, kita haruslah memperhatikan bahwa dalam soal tegangan bidang  $\sigma_z = 0$  dan Persamaan 2-6 yang ditulis dalam bentuk tegangan utama menjadi sederhana

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E} \quad \text{dan} \quad \epsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_1}{E}$$

Dengan menyelesaikan persamaan-persamaan ini secara bersamaan untuk tegangan-tegangan utama, kita akan memperoleh hubungan-hubungan yang dibutuhkan:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1 - \nu^2}(\epsilon_1 + \nu\epsilon_2) \quad \sigma_2 = \frac{E}{1 - \nu^2}(\epsilon_2 + \nu\epsilon_1) \quad (8-20)$$

Tetapan-tetapan kenyal  $E$  dan  $\nu$  haruslah ditentukan dari beberapa eksperimen yang teliti. Dengan bantuan tugas eksperimental tersebut, persoalan yang pelik akan dapat diselesaikan secara berhasil.\*

#### CONTOH 8-6

Pada sebuah titik pada sebuah bagian mesin dari baja, pengukuran dengan roset siku-empat listrik menunjukkan bahwa  $\epsilon_{0^\circ} = -0,00050$ ,  $\epsilon_{45^\circ} = +0,0002$ , dan  $\epsilon_{90^\circ} = +0,00030$ . Dengan menganggap bahwa  $E = 200 \times 10^3$  MPa dan  $\nu = 0,3$  adalah sudah cukup teliti, tentukanlah tegangan utama titik yang diselidiki tersebut.

#### PENYELESAIAN

Dari data yang diberikan,  $\epsilon_x = -0,00050$ ,  $\epsilon_y = +0,00030$ , dan

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= 2\epsilon_{45^\circ} - (\epsilon_{0^\circ} + \epsilon_{90^\circ}) \\ &= 2(+0,0002) - (-0,00050 + 0,00030) = +0,00060 \end{aligned}$$

\* Lihatlah M. Heteny, ketua editor, *Handbook of Experimental Stress Analysis*, Society for Experimental Stress Analysis, New York: Wiley, 1950.

Regangan utama untuk data-data ini dapat diperoleh dalam Contoh 8-5 yaitu adalah  $\epsilon_1 = +0,00040$  dan  $\epsilon_2 = -0,00060$ . Jadi, dengan Persamaan 8-20, maka tegangan-tegangan utama adalah

$$\sigma_1 = \frac{(200)(10)^3}{1 - (0,3)^2} [ +0,00040 + 0,3(-0,00060) ] = +48,3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{(200)(10)^3}{1 - (0,3)^2} [ -0,00060 + 0,3(+0,00040) ] = -105 \text{ MPa}$$

Tegangan tarik  $\sigma_1$  bekerja dalam arah  $\epsilon_1$ ; lihat Gambar 8-17. Tegangan tekan  $\sigma_2$  bekerja dalam arah  $\epsilon_2$ .

### Hubungan Antara $E$ , $G$ dan $\nu$

Metoda-metoda mentransformasikan suatu gambaran status tegangan atau regangan menjadi yang lain telah kita buat. Dalam Pasal 8-6, penekanan khusus diletakkan pada kenyataan bahwa tegangan geser murni dapat ditransformasikan menjadi tegangan normal murni. Karena itu, kita harus dapat menyimpulkan bahwa deformasi yang disebabkan oleh tegangan geser murni haruslah dapat dihubungkan dengan deformasi yang disebabkan oleh tegangan normal. Berdasarkan kepada pernyataan ini, suatu hubungan dasar antara  $E$ ,  $G$  dan  $\nu$  untuk bahan-bahan yang elastis linier dan isotropik dapat pula kita buat.

Menurut Persamaan 8-13, yang hanya mempunyai  $\gamma_{xy} \neq 0$ , untuk sebuah sumbu  $x'$  pada  $\theta = 45^\circ$ , maka regangan linier  $\epsilon_{x'} = \gamma_{xy}/2$ . Regangan muai  $\epsilon_{x'}$  dapat kita hubungkan dengan tegangan geser  $\tau_{xy}$ , karena menurut Persamaan 2-9,  $\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$ . Berdasarkan ini

$$\epsilon_{x'} = \tau_{xy}/(2G)$$

Di pihak lain, sesuai dengan Pasal 8-6, tegangan geser murni  $\tau_{xy}$  dapat dinyatakan secara lain dalam bentuk tegangan utama  $\sigma_1 = \tau_{xy}$  dan  $\sigma_2 = -\tau_{xy}$  yang bekerja pada sudut  $45^\circ$  terhadap arah tegangan geser (lihat Gambar 8-7). Jadi dengan menggunakan Persamaan 2-6, kita mendapatkan bahwa regangan linier sepanjang sumbu  $x'$  pada  $\theta = 45^\circ$  dalam bentuk tegangan utama menjadi

$$\epsilon_{x'} = \epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E} = \frac{\tau_{xy}}{E}(1 + \nu)$$

Dengan menyamakan kedua kemungkinan dari hubungan tersebut untuk regangan sepanjang diagonal geser positif dan menyederhanakannya diperoleh

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (8-21)$$

Ini merupakan hubungan dasar antara  $E$ ,  $G$  dan  $\nu$ ; ia memperlihatkan bahwa besaran-besaran ini tidaklah bebas antara satu sama lain. Bila setiap dua dari besaran-besaran

ini dapat ditentukan secara eksperimental, maka yang ketiganya dapat kita hitung. Ingatlah bahwa modulus geser  $G$  selalu lebih kecil dari modulus elastis  $E$ , karena perbandingan Poisson  $\nu$  adalah sebuah besaran positif. Untuk kebanyakan bahan,  $\nu$  adalah sekitar  $\frac{1}{4}$ .

### Dilatasi; Modulus Ruang (Bulk Modulus)

Dengan memperluas beberapa konsep yang sudah dibuat, kita dapat menurunkan sebuah persamaan mengenai perubahan volumetrik dalam bahan-bahan elastis yang mendapat tegangan. Dalam mengolah pelaksanaan ini dua buah istilah baru akan kita perkenalkan dan definisikan.

Sisi-sisi  $dx$ ,  $dy$  dan  $dz$  dari sebuah elemen kecil takberhingga setelah diregangkan masing-masing menjadi  $(1 + \epsilon_x)dx$ ,  $(1 + \epsilon_y)dy$  dan  $(1 + \epsilon_z)dz$ . Setelah volume awal dikurangi dengan volume sesudah elemen diregangkan, kita memperoleh perubahan volume yang terjadi. Yaitu adalah

$$(1 + \epsilon_x) dx(1 + \epsilon_y) dy(1 + \epsilon_z) dz - dx dy dz \approx (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) dx dy dz$$

di mana perkalian regangan  $\epsilon_x\epsilon_y + \epsilon_y\epsilon_z + \epsilon_z\epsilon_x + \epsilon_x\epsilon_y\epsilon_z$  sangat kecil, hingga dapat diabaikan. Karena itu dalam teori regangan yang kecil takberhingga,  $e$ , yaitu perubahan volume per satuan volume, seringkali dinamakan sebagai *dilatasi* (dilatation atau pemuaian), yang didefinisikan sebagai

$$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \quad (8-22)$$

di mana kesamaan yang terakhir mengikuti kenyataan bahwa  $e$  adalah suatu invarian. Keadaan invariansi regangan yang lebih terbatas telah kita temui dalam Pasal 8-12, untuk keadaan yang dua dimensional di mana diperlihatkan bahwa  $\epsilon_1 + \epsilon_2 = \epsilon_x + \epsilon_y$ . Regangan geser tidak mengakibatkan perubahan volume.

Berdasarkan pada perluasan hukum Hooke, dilatasi dapat diperoleh dalam bentuk tegangan dari tetapan bahan. Untuk tujuan ini tiga bahagian yang pertama dari Persamaan 2-6 haruslah ditambahkan bersama-sama. Ini menghasilkan

$$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{1 - 2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (8-23)$$

yang berarti bahwa dilatasi sebanding dengan jumlah aljabar dari semua tegangan normal. Sebagai imbalan langsung dari invarian regangan, maka jumlah  $(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$  merupakan invarian tegangan pula.

Bila sebuah benda elastis dihadapkan kepada tekanan hidrostatik dengan intensitas yang merata  $p$ , maka  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$ , kemudian dari Persamaan 8-23

$$e = -\frac{3(1 - 2\nu)}{E}p \quad \text{atau} \quad \frac{-p}{e} = k = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (8-24)$$

Besaran  $k$  menyatakan perbandingan antara tegangan tekanan hidrostatik dengan mengecilnya volume yang disebut *modulus tekan* (modulus of compression) atau *modulus ruang* (bulk modulus).



## \* LAMPIRAN BAB 8

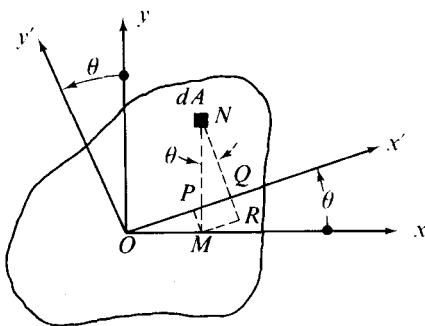
### Transformasi Momen Inersia Luas Terhadap Sumbu-sumbu yang Berbeda

#### 8A-1 PERSAMAAN TRANSFORMASI UNTUK PERPUTARAN SUMBU

Per definisi, momen dan perkalian inersia suatu luas diberikan seperti berikut,

$$I_x = \int y^2 dA, \quad I_y = \int x^2 dA \quad \text{dan} \quad I_{xy} = \int xy dA \quad (8A-1)$$

Ambillah  $x, y$  sebagai pasangan sumbu-sumbu ortogonal di mana momen-momen inersia  $I_x$  dan  $I_y$  dan perkalian inersia  $I_{xy}$  dari luas yang terlihat dalam Gambar 8A-1



$$\begin{aligned} OM &= x & MN &= y \\ OQ &= x' & QN &= y' \\ OP &= x \cos \theta & RN &= y \cos \theta \\ PQ &= y \sin \theta & RQ &= x \sin \theta \end{aligned}$$

Gambar 8A-1 Perputaran sumbu

diambil terhadap sumbu-sumbu ini. Sekarang tinjaulah suatu perputaran positif dari sumbu-sumbu tersebut sebesar sudut  $\theta$  dan tulislah sumbu-sumbu baru tersebut sebagai  $x'$  dan  $y'$ . Koordinat  $(x, y)$  dari suatu luas kecil takberhingga  $dA$  dari irisan planar dapat ditransformasikan menjadi  $(x', y')$  serta ditulis sebagai

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\y' &= y \cos \theta - x \sin \theta\end{aligned}\quad (8A-2)$$

Kemudian, mulai dengan ungkapan yang serupa dengan Persamaan 8A-1,

$$\begin{aligned}I_{x'} &= \int y'^2 dA = \int (y \cos \theta - x \sin \theta)^2 dA \\&= \cos^2 \theta \int y^2 dA + \sin^2 \theta \int x^2 dA - 2 \sin \theta \cos \theta \int xy dA \\&= I_x \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta - I_{xy} \cdot 2 \sin \theta \cos \theta \\&= I_x \frac{(1 + \cos 2\theta)}{2} + I_y \frac{(1 - \cos 2\theta)}{2} - I_{xy} \sin 2\theta\end{aligned}$$

$$\text{atau} \quad I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + (-I_{xy}) \sin 2\theta \quad (8A-3)$$

Dengan cara yang sama,

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - (-I_{xy}) \sin 2\theta \quad (8A-4)$$

$$\text{dan} \quad -I_{x'y'} = -\frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + (-I_{xy}) \cos 2\theta \quad (8A-5)$$

Persamaan-persamaan ini menghubungkan momen dan hasilkali inersia luas (momen kedua) dalam koordinat baru  $x'y'$  ke dalam yang semula dalam koordinat  $xy$  untuk perputaran sumbu sebesar  $\theta$ .

## 8A-2 SUMBU UTAMA DAN MOMEN INERSIA UTAMA

Ketergantungan  $I_{x'}$ ,  $I_{y'}$ , dan  $I_{x'y'}$  terhadap sudut putar  $\theta$  ditunjukkan oleh Persamaan-persamaan 8A-3, 8A-4, dan 8A-5. Berhubung sumbu utama\* didefinisikan sebagai sumbu di mana momen inersia menjadi nol, maka sumbu ini dapat diletakkan dengan membuat  $I_{x'y'}$  sama dengan nol dan memecahkan Persamaan 8A-5 untuk  $\theta$ . Tetapi, suatu perbandingan dapat memperlihatkan bahwa persamaan-persamaan transformasi ini adalah identik dengan persamaan transformasi tegangan dari Bab 8, jika  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\sigma'_x$ , dan  $\tau_{x'y'}$  digantikan dengan  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $-I_{xy}$ ,  $I_{x'}$ , dan  $-I_{x'y'}$ . Jadi, semua teknik yang menggunakan lingkaran Mohr sebagai diutarakan dalam Pasal 8-8 sama manfaatnya kepada persoalan untuk mendapatkan orientasi sumbu-sumbu utama, sebagaimana juga dalam menghitung momen lembam utama yang bersangkutan.

### CONTOH 8A-1

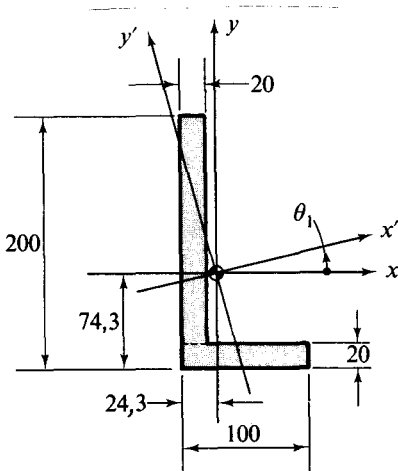
Dengan menggunakan lingkaran Mohr, tentukanlah sumbu-sumbu utama dan momen lembam utama untuk irisan siku dengan kaki-kaki yang tidak sama seperti yang terlihat dalam Gambar 8A-2.

\* Bila titik asal pada titik berat, disebut sumbu utama *titik berat*.

**PENYELESAIAN.**

Siku baja yang diperlihatkan dalam gambar mempunyai ukuran 200 mm × 100 mm × 20 mm tebal. Titik berat dari irisan dapat diturunkan yaitu terletak pada 74,3 mm dari alas dan 24,3 mm dari permukaan sebelah kiri. Suatu pasangan sumbu ortogonal  $x$  dan  $y$  dipasang seperti yang terlihat dalam Gambar 8A-2. Momen dan hasilkali inersia terhadap sumbu-sumbu ini dapat dihitung dengan memisahkan irisan siku tersebut menjadi dua buah segiempat seperti yang terlihat dalam gambar dan kemudian dengan menggunakan teori sumbu sejajar, Persamaan-persamaan 5-2 dan 5-2a.

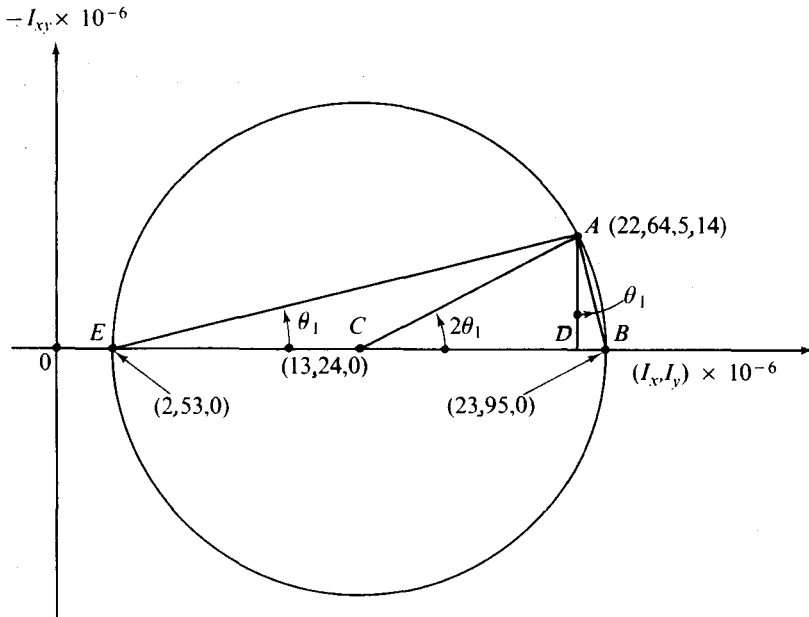
$$\begin{aligned}
 I_x &= (20/12)(180)^3 + (20)(180)(35,7)^2 + (100/12)(20)^3 \\
 &\quad + (100)(20)(64,3)^2 = 22,64 \times 10^6 \text{ mm}^4 \\
 I_y &= (180/12)(20)^3 + (20)(180)(14,3)^2 + (20/12)(100)^3 \\
 &\quad + (100)(20)(25,7)^2 = 3,84 \times 10^6 \text{ mm}^4 \\
 I_{xy} &= (20)(180)(-14,3)(35,7) + (100)(20)(25,7)(-64,3) \\
 &= -5,14 \times 10^6 \text{ mm}^4
 \end{aligned}$$



**Gambar 8A-2** Sebuah siku dengan kaki-kaki yang tidak sama (semua ukuran dalam mm)

Kemudian lingkaran Mohr dapat kita gambarkan seperti yang terlihat dalam Gambar 8A-3 dengan sumbu mendatar menyatakan momen inersia dan sumbu tegak sebagai hasilkali inersia negatif.

1. Titik pusat lingkaran:  $\frac{I_x + I_y}{2} = 13,24 \times 10^6 \text{ mm}^4$
2. Titik A pada lingkaran:  $I_x = 22,64 \times 10^6 \text{ mm}^4$ ,  $-I_{xy} = 5,14 \times 10^6 \text{ mm}^4$
3. Radius lingkaran:  $\left[ \left( \frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + (-I_{xy})^2 \right]^{1/2} = 10,71 \times 10^6 \text{ mm}^4$



Gambar 8A-3 Lingkaran Mohr untuk momen inersia utama

Setelah menggambarkan lingkaran, kita akan memperoleh momen-momen inersia utama yang adalah  $23,95 \times 10^6 \text{ mm}^4$  dan  $2,53 \times 10^6 \text{ mm}^4$ . Sumbu-sumbu utama diperoleh dengan rotasi positif  $\theta$  terhadap pasangan sumbu  $x$  dan  $y$  yang kita andaikan, di mana  $\theta$  dapat diperoleh sebagai

$$\tan \theta_1 = \frac{AD}{DE} = \frac{5,14}{22,64 - 2,53} = 0,256 \quad \text{atau} \quad \theta_1 = 14,33^\circ$$

Sumbu-sumbu utama titik berat diperlihatkan dalam Gambar 8A-2 dan momen-momen inersia utama adalah  $I_{x'} = 23,95 \times 10^6 \text{ mm}^4$  dan  $I_{y'} = 2,53 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .

Perhatikanlah bahwa  $I_x + I_y = I_{x'} + I_{y'}$ , yaitu jumlah momen-momen inersia terhadap dua sumbu titik berat yang saling tegak lurus adalah *invariant*.

Hasil-hasil ini dapat kita peroleh secara analitis dengan menggunakan persamaan-persamaan yang serupa dengan yang kita lakukan untuk mendapatkan tegangan utama, yaitu Persamaan 8-4, dan arah yang bersangkutan, yaitu Persamaan 8-3. Dalam notasi momen inersia, persamaan-persamaan yang diperlukan itu adalah

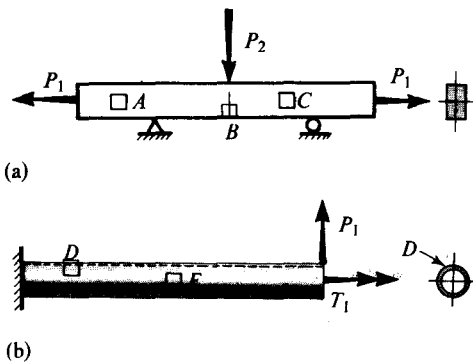
$$(I_{x'})_{\max} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \quad (8A-6)$$

dan 
$$\tan 2\theta_1 = -\frac{I_{xy}}{(I_x - I_y)/2} \quad (8A-7)$$

Untuk lebih terperinci mengenai penggunaan persamaan-persamaan ini, lihat Pasal 8-4.

## SOAL-SOAL UNTUK DISELESAIKAN

8-1. Elemen-elemen kecil takberhingga  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , dan  $E$  dapat dilihat dalam gambar untuk dua macam batang yang berbeda. Gambarkanlah masing-masing elemen ini secara terpisah dan tunjukkan pada elemen yang terisolasi tersebut tegangan yang bekerja padanya. Untuk masing-masing tegangan tunjukkanlah dengan jelas arahnya dan sikapnya dengan tanda panah dan nyatakanlah rumus yang dapat kita pakai dalam perhitungan-perhitungannya. Abaikanlah berat batang tersebut.

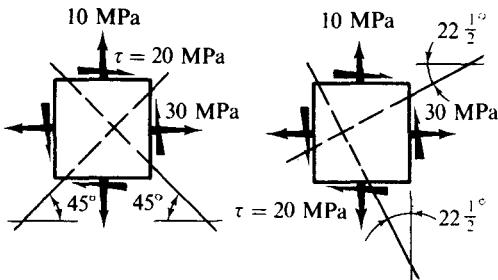
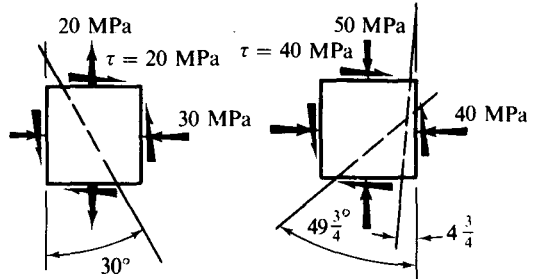


GAMBAR SOAL 8-1

8-2 sampai 8-5. Untuk elemen-elemen kecil takberhingga yang diperlihatkan dalam gambar-gambar soal yang bersangkutan, hitunglah tegangan-tegangan normal dan geser yang bekerja pada bidang-bidang miring yang ditunjukkan. Gunakanlah metoda analisa "pasak" (wedge) yang dibicarakan dalam Contoh 8-1.

Jawab: Soal. 8-2:  $\sigma = +40$  MPa,  $\tau = 10$  MPa;  $\sigma = 0$ ,  $\tau = -10$  MPa.

Soal. 8-3:  $\sigma = -1,2$  MPa,  $\tau = 7,1$  MPa;  $\sigma = +41,2$  MPa,  $\tau = 7,1$  MPa.

GAMBAR  
SOAL 8-2GAMBAR  
SOAL 8-3GAMBAR  
SOAL 8-4GAMBAR  
SOAL 8-5

8-6. Turunkanlah Persamaan 8-2.

8-7. Dengan menggunakan Persamaan 8-1 dan 8-2 kerjakanlah kembali Soal 8-2.

8-8. Dengan menggunakan Persamaan 8-1 dan 8-2 kerjakanlah kembali Soal 8-3.

8-9. Dengan menggunakan persamaan-persamaan yang diturunkan dalam Pasal 8-4, hitunglah tegangan-tegangan utama dan perlihatkanlah sikap mereka dalam elemen yang berorientasi secara tepat, untuk data berikut:  $\sigma_x = +50$  MPa;  $\sigma_y = +10$  MPa; dan  $\tau = +20$  MPa. Kaidah tanda tegangan diberikan menurut yang digambarkan dalam Gambar 8-4(a).

8-10. Kerjakanlah kembali Soal 8-9 dengan mengubah data menjadi  $\sigma_x = -30$  MPa;  $\sigma_y = +10$  MPa;  $\tau = -20$  MPa.

8-11. Dengan menggunakan persamaan-persamaan yang diturunkan dalam Pasal 8-5, hitunglah tegangan geser maksimum (utama) dan tegangan normal yang bersangkutan untuk data yang terdapat dalam Soal 8-10. Perlihatkanlah hasil-hasil tersebut pada sebuah elemen yang terorientasi tepat.

Data-data yang diberikan di bawah untuk Soal-soal 8-12 sampai 8-15 mengikuti kaedah tanda untuk tegangan yang telah ditetapkan dalam Gambar 8-4(a). Dalam masing-masing keadaan tunjukkanlah data tersebut pada sebuah elemen yang kecil takberhingga. Kemudian dengan menggunakan rumus-rumus yang dibuat dalam Pasal-pasal 8-4 dan 8-5, (a) tentukanlah tegangan-tegangan utama dan perlihatkan-

kanlah sikap mereka pada sebuah elemen yang berorientasi tepat; (b) tentukanlah tegangan geser maksimum (utama) dengan tegangan normal yang bersangkutan dan perlihatkanlah hasil-hasil tersebut pada sebuah elemen yang berorientasi secara tepat.

8-12.  $\sigma_x = +100 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_y = 0$ ,  $\tau = -50 \text{ MPa}$ .

8-13.  $\sigma_x = 0$ ,  $\sigma_y = -20 \text{ MPa}$ ,  $\tau = -30 \text{ MPa}$ .

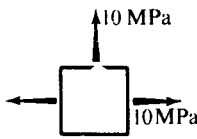
8-14.  $\sigma_x = -10 \text{ MN/m}^2$ ,  $\sigma_y = -40 \text{ MN/m}^2$ ,  $\tau = +20 \text{ MN/m}^2$ . *Jawab:*  $0$ ,  $-50 \text{ MN/m}^2$ ;  $25 \text{ MN/m}^2$ .

8-15.  $\sigma_x = -10.000 \text{ kN/m}^2$ ,  $\sigma_y = +20.000 \text{ kN/m}^2$ ,  $\tau = -20.000 \text{ kN/m}^2$ . *Jawab:*  $30 \text{ kN/m}^2$ ,  $-20 \text{ kN/m}^2$ ;  $25 \text{ kN/m}^2$ .

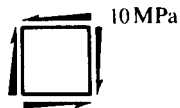
8-16. Dengan menggunakan lingkaran tegangan Mohr, selesaikan bagian (a) dari Soal 8-14.

8-17. Dengan menggunakan lingkaran tegangan Mohr, selesaikanlah bagian (a) dari Soal 8-15.

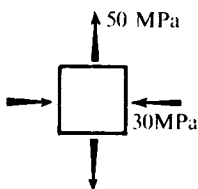
8-18 sampai 8-21. Gambarkanlah lingkaran tegangan Mohr untuk status tegangan yang diberikan dalam gambar-gambar yang bersangkutan dengan soal tersebut. (a). Perlihatkanlah dengan jelas bidang-bidang pada mana tegangan-tegangan utama bekerja, dan untuk masing-masing tegangan tunjukkan dengan tanda panah arah dan sikap dari tegangan tersebut. (b) Sama dengan (a) untuk tegangan geser maksimum dan tegangan normal yang bersangkutan.



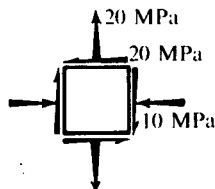
GAMBAR  
SOAL 8 - 18



GAMBAR  
SOAL 8 - 19



GAMBAR  
SOAL 8 - 20



GAMBAR  
SOAL 8 - 21

Data-data yang diberikan di bawah untuk Soal-soal 8-22 sampai 8-28 mengikuti kaidah tanda yang ditetapkan dalam Gambar-gambar 8-4(a) dan 8-9(a). Dalam masing-masing keadaan perlihatkanlah data-data tersebut pada sebuah elemen kecil takberhingga. Kemudian dengan menggunakan pembuatan lingkaran Mohr dan ilmu ukur segitiga, (a) hitunglah tegangan-tegangan utama dan perlihatkanlah sikap mereka pada elemen yang diorientasikan secara tepat; (b) hitunglah tegangan-tegangan geser maksimum (utama) dengan tegangan-tegangan normal yang bersangkutan dan perlihatkanlah hasil-hasil tersebut pada elemen yang diorientasikan secara tepat.

8-22.  $\sigma_x = +60.000 \text{ kN/m}^2$ ,  $\sigma_y = +30.000 \text{ kN/m}^2$ ,  $\tau = +25.000 \text{ kN/m}^2$ . *Jawab:*  $+74,2 \text{ MPa}$ ,  $15,8 \text{ MPa}$ ,  $29\frac{1}{2}^\circ$ ;  $29,2 \text{ MPa}$ ,  $45 \text{ MPa}$ .

8-23. Data sama dengan Soal 8-9.

8-24. Data sama dengan Soal 8-10.

8-25.  $\sigma_x = -30 \text{ MN/m}^2$ ,  $\sigma_y = -40 \text{ MN/m}^2$ ,  $\tau = +30 \text{ MN/m}^2$ . *Jawab:*  $-4,5 \text{ MN/m}^2$ ,  $-65,5 \text{ MN/m}^2$ ,  $40\frac{1}{2}^\circ$ ;  $30,5 \text{ MN/m}^2$ ,  $-35 \text{ MN/m}^2$ .

8-26.  $\sigma_x = -15 \text{ MN/m}^2$ ,  $\sigma_y = +35 \text{ MN/m}^2$ ,  $\tau = +60 \text{ MN/m}^2$ . *Jawab:*  $75 \text{ MPa}$ ,  $-55 \text{ MPa}$ ;  $56,3^\circ$ ;  $65 \text{ MPa}$ ,  $10 \text{ MPa}$ .

8-27.  $\sigma_x = +100 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_y = 0$ ,  $\tau = -50 \text{ MPa}$ .

8-28.  $\sigma_x = 0$ ,  $\sigma_y = -20 \text{ MPa}$ ,  $\tau = -30 \text{ MPa}$ .

8-29. Bila  $\sigma_x = \sigma_1 = 0$  dan  $\sigma_y = \sigma_2 = -20 \text{ MPa}$ , dengan menggunakan lingkaran tegangan Mohr, hitunglah tegangan-tegangan yang bekerja pada suatu bidang yang ditentukan letaknya oleh  $\theta = +30^\circ$ .

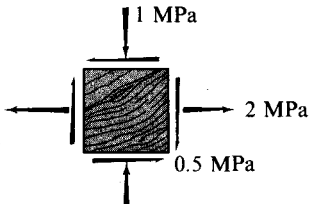
8-30. Dengan menggunakan lingkaran tegangan Mohr, untuk data Soal 8-21, hitunglah tegangan-tegangan yang bekerja pada bidang dengan  $\theta = 30^\circ$ .

8-31. Kerjakanlah kembali soal di atas dengan  $\theta = 20^\circ$ .

8-32. Dengan menggunakan lingkaran tegangan Mohr, kerjakanlah kembali Soal 8-3.

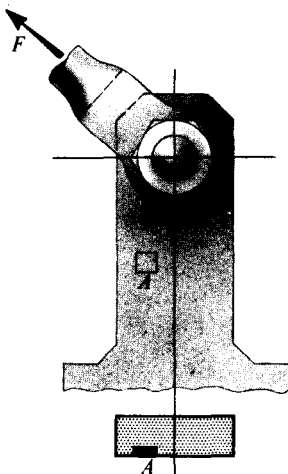
8-33. Pada titik tertentu dalam sebuah bagian bangunan kayu, status tegangan adalah seperti

yang terlihat dalam gambar. Arah dari pada urat kayu membuat sudut  $+30^\circ$  dengan sumbu  $-x$ . Tegangan geser ijin yang sejajar dengan urat adalah 1 MPa untuk kayu ini. Apakah ini diperbolehkan oleh status tegangan ini? Turunkanlah jawaban ini dengan memakai perhitungan.



GAMBAR SOAL 8 – 33

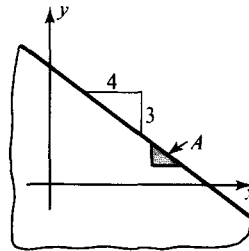
8-34. Sebuah klevis meneruskan gaya  $F$  kepada sebuah braket seperti yang terlihat dalam gambar. Analisa tegangan braket ini memberikan komponen-komponen tegangan berikut yang bekerja pada elemen  $A$ : 10 MPa yang disebabkan oleh lenturan, 15 MPa oleh gaya aksial, dan 6 MPa oleh geser. (Perhatikan bahwa ini hanyalah besar tegangan saja, arah dan sikap tegangan tersebut haruslah ditentukan lewat pemeriksaan). (a) Tunjukkanlah tegangan-tegangan resultante pada sketsa elemen terisolasi  $A$ , (b) Dengan menggunakan lingkaran Mohr untuk status tegangan yang diperoleh dalam (a), tentukanlah tegangan-tegangan utama dan tegangan geser maksimum dengan tegangan normal yang



GAMBAR SOAL 8 – 34

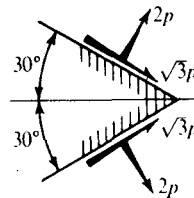
bersangkutan. Perhatikanlah hasil-hasil tersebut pada elemen yang terorientasi tepat.

8-35. Pada titik  $A$  pada ujung yang tidak dibebani dari sebuah benda elastis, yang berorientasi sebagai yang diperlihatkan oleh gambar terhadap sumbu-sumbu  $xy$ , maka tegangan geser maksimum adalah  $3500 \text{ kN/m}^2$ . (a) Hitunglah tegangan-tegangan utama, dan (b) tentukanlah status tegangan pada sebuah elemen yang diorientasikan dengan sisi-sisinya sejajar dengan sumbu-sumbu  $xy$ . Perhatikanlah hasil-hasil tersebut pada sketsa elemen tersebut pada titik  $A$ . (Petunjuk: Suatu jawaban yang efektif dapat diperoleh dengan menggambar lingkaran tegangan Mohr). Jawab: (b)  $\sigma_x = 4480 \text{ kN/m}^2$ .



GAMBAR SOAL 8 – 35

8-36. Besar dan arah tegangan pada dua bidang yang bertemu pada sebuah titik diperlihatkan dalam gambar. Tentukanlah arah dan besar dari tegangan-tegangan utama pada titik ini. Gambarkanlah sketsa hasil-hasil ini pada sebuah elemen.



GAMBAR SOAL 8 – 36

8-37. Turunkanlah kembali Persamaan 8-13 dengan mengandaikan bahwa deformasi geser terjadi pertama-tama, kemudian deformasi dalam arah  $-y$  dan akhirnya deformasi dalam arah  $-x$ .

8-38. Dengan pertolongan Gambar 8-15, buktikanlah bahwa  $\beta = -(\epsilon_x - \epsilon_y) \sin \theta \cos \theta + \gamma_{xy} \cos^2 \theta$ .

8-39. Bila regangan satuan adalah  $\epsilon_x = -0,00012$ ,  $\epsilon_y = +0,00112$ , dan  $\gamma = -0,00020$ , berapakah regangan-regangan utama dan dengan arah mana? Gunakanlah Persamaan-persamaan 8-17 dan 8-18 atau lingkaran regangan Mohr, seperti yang telah kita tunjukkan. *Jawab:*  $+0,00113$ ,  $-0,00013$ ,  $4^\circ 35'$ .

8-40. Bila regangan satuan adalah  $\epsilon_x = -0,0008$ ,  $\epsilon_y = -0,00020$ , dan  $\gamma = +0,00080$ , berapakah regangan utama dan dalam arah mana terjadinya? Pergunakanlah Persamaan-persamaan 8-17 dan 8-18 atau lingkaran Mohr, seperti telah ditunjukkan. *Jawab:*  $0$ ,  $-0,00100$ .

8-41. Bila pengukuran regangan yang diberikan dalam soal di atas dibuat pada sebuah batang baja ( $E = 200.000 \text{ MN/m}^2$  dan  $\nu = 0,3$ ), berapakah besar tegangan-tegangan utama dan dalam arah mana mereka terjadi?

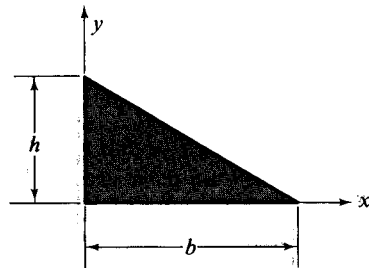
8-42. Pada titik pada sebuah pelat elastis yang mendapat tegangan, keterangan berikut dapat diketahui: regangan geser maksimum  $\gamma_{\max} = 5 \times 10^{-4}$ , dan jumlah tegangan normal pada kedua bidang yang saling tegaklurus yang melalui titik tersebut adalah  $27.500 \text{ kN/m}^2$ . Sifat-sifat elastis dari pelat tersebut adalah  $E = 200.000 \text{ MN/m}^2$ ,  $G = 80.000 \text{ MN/m}^2$ ,  $\nu = 0,25$ . Hitunglah besar tegangan-tegangan utama pada titik tersebut.

8-43. Data untuk sebuah roset sikuempat, yang dipasang pada sebuah batang baja yang mendapat tegangan, adalah  $\epsilon_0^\circ = -0,00022$ ,  $\epsilon_{45^\circ} = +0,00012$  dan  $\epsilon_{90^\circ} = +0,00022$ . Berapakah besar tegangan-tegangan utama dan dalam arah mana mereka bekerja?  $E = 200 \text{ GPa}$  dan  $\nu = 0,3$ .

8-44. Data untuk sebuah roset sudut sama, yang dipasang pada sebuah batang paduan aluminium yang mendapat tegangan, adalah  $\epsilon_0^\circ = +0,00040$ ,  $\epsilon_{60^\circ} = +0,00040$ , dan  $\epsilon_{120^\circ} = -0,00060$ . Berapakah besar tegangan-tegangan utama serta dalam arah mana mereka bekerja?  $E = 70.000 \text{ MN/m}^2$  dan  $\nu = 0,25$ .

8-45. Data untuk sebuah roset regangan dengan empat garis ukur yang terpasang pada sebuah batang paduan aluminium yang mendapat tegangan adalah  $\epsilon_0^\circ = -0,00012$ ,  $\epsilon_{45^\circ} = +0,00040$ ,  $\epsilon_{90^\circ} = +0,00112$ , dan  $\epsilon_{135^\circ} = +0,00060$ . Periksa data tentang kemantapan data tersebut. Kemudian tentukanlah tegangan-tegangan utama dan arah mana mereka bekerja. Gunakanlah harga-harga  $E$  dan  $\nu$  yang diberikan dalam Soal 8-44.

8-46. (a) Hitunglah hasil kali inersia untuk daerah segitiga yang terlihat dalam gambar terhadap sumbu-sumbu yang diberikan. (b) Untuk daerah segitiga yang sama dengan menggunakan Persamaan 5-2(a) dan hasil yang diperoleh dalam (a), tentukanlah hasil kali inersia terhadap sumbu-sumbu tegak dan mendatar yang diambil melalui titik berat. *Jawab:* (a)  $b^2 h^2 / 24$ . (b)  $-b^2 h^2 / 72$ .



GAMBAR SOAL 8 - 46

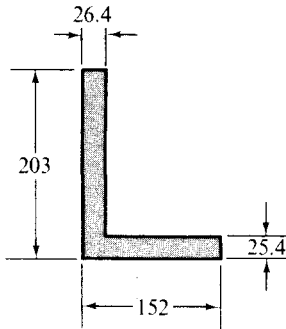
8-47. (a) Bila dalam soal di atas  $b = 200 \text{ mm}$  dan  $h = 100 \text{ mm}$ , hitunglah sumbu-sumbu utama dan momen inersia utama dari daerah tersebut. Gunakanlah hasil-hasil yang diperoleh dalam bagian (b) dari soal di atas dan gunakanlah  $I_0$  untuk sebuah segitiga terhadap suatu sumbu seperti yang diberikan dalam Tabel 2 dari Lampiran Bab ini. (b) Bila sebuah balok yang mempunyai penampang berbentuk segitiga di atas memperoleh suatu momen lentur terhadap sumbu utama sedang tegangan lentur ijin  $\sigma = 100 \text{ MPa}$ , berapakah momen yang dapat diberikan? (Lihat Pasal 7-6).

8-48. Siku yang mempunyai ukuran-ukuran yang terlihat dalam Gambar 8A-2 ditumpu sederhana pada ujung-ujungnya pada tumpuan-tumpuan rol mendatar dan membentang sepanjang  $2 \text{ meter}$ . Berapakah gaya vertikal terpusat  $P$  dapat diberikan di tengah bentangan bila



tegangan ijin untuk bahan tersebut adalah 200 MPa. Abaikanlah berat dari siku tersebut dan gunakanlah hasil-hasil yang bersangkutan yang diperoleh dalam Contoh 8A-1. (Perhatikanlah bahwa gaya vertikal haruslah diberikan melalui pusat geser, lihatlah Gambar 6-22. Lihat pula Pasal 7-6).

8-49. (a) Hitunglah sumbu-sumbu utama dan momen inersia utama untuk daerah penampang sebuah siku yang diperlihatkan dalam gambar. Perhitungan-perhitungan haruslah dibuat dengan menggunakan sumbu-sumbu yang melalui titik berat. (b) Ukuran-ukuran yang diketahui dari irisan penampang, kecuali radius kecil pada ujung-ujung dan sebuah selaput sesuai dengan ukuran-ukuran penampang sebuah



GAMBAR SOAL 8-49

siku  $203 \times 152 \times 25,4$  mm yang terdaftar dalam Tabel 7 Lampiran Bab ini. Dengan menggunakan keterangan yang diberikan dalam tabel itu, hitunglah momen inersia utama dan bandingkanlah dengan hasil-hasil yang diperoleh dalam (a). (Petunjuk: Perhatikanlah bahwa berdasarkan Pasal 13-7 dan Contoh 13-1,  $I_{\min} = Ar_{\min}^2$ ,  $r$  yang terdaftar dalam Tabel 7 untuk sumbu  $z$  adalah  $r_{\min}$ . Selanjutnya, dari syarat invarian,  $I_{\min} + I_{\max} = I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y \equiv I_{xx} + I_{yy}$ , jadi kita telah dapat menyelesaikan  $I_{\max}$ ).

8-50. Hitunglah momen lentur paling besar yang dapat dimuat oleh sebuah siku  $203 \times 152 \times 25,4$  mm tanpa melebihi tegangan 140 MPa. (Lihatlah petunjuk untuk bagian (b) dari soal di atas dan Pasal 7-6).

8-51. Sebuah siku baja  $152 \times 152 \times 12,7$  mm dengan salah satu kakinya diletakkan dalam kedudukan mendatar sedangkan kaki yang lain mengarah ke bawah yang digunakan sebagai sebuah kantilever panjang 2,12 m. Bila suatu gaya ke atas sebesar 4000 N ditimpakan kepada ujung kantilever ini melalui pusat geser, berapakah besar tegangan-tegangan tarik dan tekan maksimum pada ujung yang terpasang? Abaikanlah berat dari siku tersebut. Lihatlah Pasal 7-6 dan petunjuk untuk bagian (b) dari Soal 8-49. (Sifat-sifat dari siku tersebut dapat diperoleh dalam Tabel 6 dari Lampiran bab ini).



# 9 Tegangan Gabungan — Bejana Tekan — Teori Kegagalan

## 9-1 PENDAHULUAN

Sebagaimana telah menjadi jelas dari bab-bab yang lalu, suatu deskripsi mengenai status tegangan pada sebuah titik dari sebuah bagian struktur yang mendapat tegangan dapat kita peroleh dengan menggunakan rumus-rumus konvensional yang dapat pula mencakup tegangan-tegangan normal *dan* geser. Dalam Bab 8 telah kita bahas pula metoda-metoda yang resmi mengenai deskripsi lain dari status tegangan pada titik yang sama dalam bentuk-bentuk tegangan utama, atau tegangan geser utama dengan tegangan normal yang bersangkutan. Dalam bab ini, metoda yang melukiskan kembali status tegangan dalam bentuk-bentuk tegangan utama akan kita gunakan pada beberapa keadaan tertentu dari batang yang mengalami tegangan. Sebagai contoh, akan kita pelajari tegangan-tegangan utama yang terdapat pada sebuah poros melingkar dan sebuah balok bila mereka mendapatkan beberapa syarat pembebanan yang kita kenal. Untuk ini kita akan memperlihatkan, adanya titik-titik tegangan utama biaksial, yaitu kedua tegangan utama berbeda dari nol. Lebih lanjut, karena pembahasan tegangan ijin yang terdahulu didasarkan kepada tegangan utama sumbu tunggal (uniaksial), yang ditentukan dari pengujian tarik dan tekan yang sederhana, maka perlawanan bahan terhadap tegangan sumbu ganda (biaksial) akan kita bahas di bawah judul teori kekuatan atau kegagalan dari bahan. Untuk mengembangkan pokok masalah ini, akan kita buat rumus-rumus tegangan untuk bejana tekan berdinding tipis, karena percobaan-percobaan bejana tekan memberikan keterangan mengenai sifat bahan di bawah pengaruh tegangan sumbu ganda. Pada permulaan bab ini, kita akan menentukan tegangan-tegangan pada bidang miring dari batang lurus yang dipengaruhi suatu gaya aksial.

## 9-2 PENYELIDIKAN TERHADAP TEGANGAN PADA SEBUAH TITIK

Untuk mendapatkan tegangan utama atau pun tegangan pada bidang miring pada

sebuah titik dari sebuah batang yang dibebani, prosedur dasar yang sama berulang-ulang telah kita gunakan sebelum ini, akan kita lakukan pula (Pasal 1-9). Dalam persoalan-persoalan statis tertentu, gaya-gaya reaksi kita dapatkan lebih dahulu. Lalu kita isolasikan sebuah segmen dari benda dengan membuat irisan yang tegaklurus terhadap sumbunya *melalui titik* yang kita selidiki. Kemudian kita tentukan sistem gaya yang diperlukan untuk mempertahankan keseimbangan dari segmen itu. Berikutnya kita tentukan besar tegangan dengan rumus-rumus konvensional. Lalu kita tunjukkan tegangan-tegangan yang telah dihitung pada elemen yang telah terisolasi dari batang tersebut. Sikap tegangan-tegangan yang dihitung ditandai pada elemen tersebut dengan tanda-tanda panah yang sesuai dengan sikap gaya-gaya dalam pada potongan tersebut. Dua buah sisi dari elemen ini adalah sejajar sedang kedua sisi yang lain tegaklurus dengan sumbu batang yang kita selidiki. *Hubungan tertentu antara sisi-sisi elemen ini dengan batang yang sesungguhnya haruslah dipahami dengan jelas oleh penelaah.* Sesudah sketsa dari sebuah elemen kita siapkan dan tegangan-tegangan dari jenis yang sama digabungkan, maka kita dapat menentukan tegangan pada bidang dengan orientasi yang lain melalui titik yang sama. Untuk tujuan ini, kita dapat menggunakan rumus-rumus analitis maupun lingkaran tegangan Mohr. Dalam hal ini besaran yang kita cari adalah tegangan utama ataupun tegangan geser maksimum.

Dalam tiga contoh yang berikut, kita akan mengkaji batang yang berbeban aksial, poros melingkar dalam puntiran dan balok sikuempat dengan gaya terpakai yang melintang, untuk mendapatkan tegangan utama dan tegangan yang bekerja pada bidang miring.

#### CONTOH 9-1

Tentukanlah tegangan yang bekerja pada bidang dengan kemiringan tertentu dalam batang berbeban aksial yang luas penampangnya tetap.

#### PENYELESAIAN

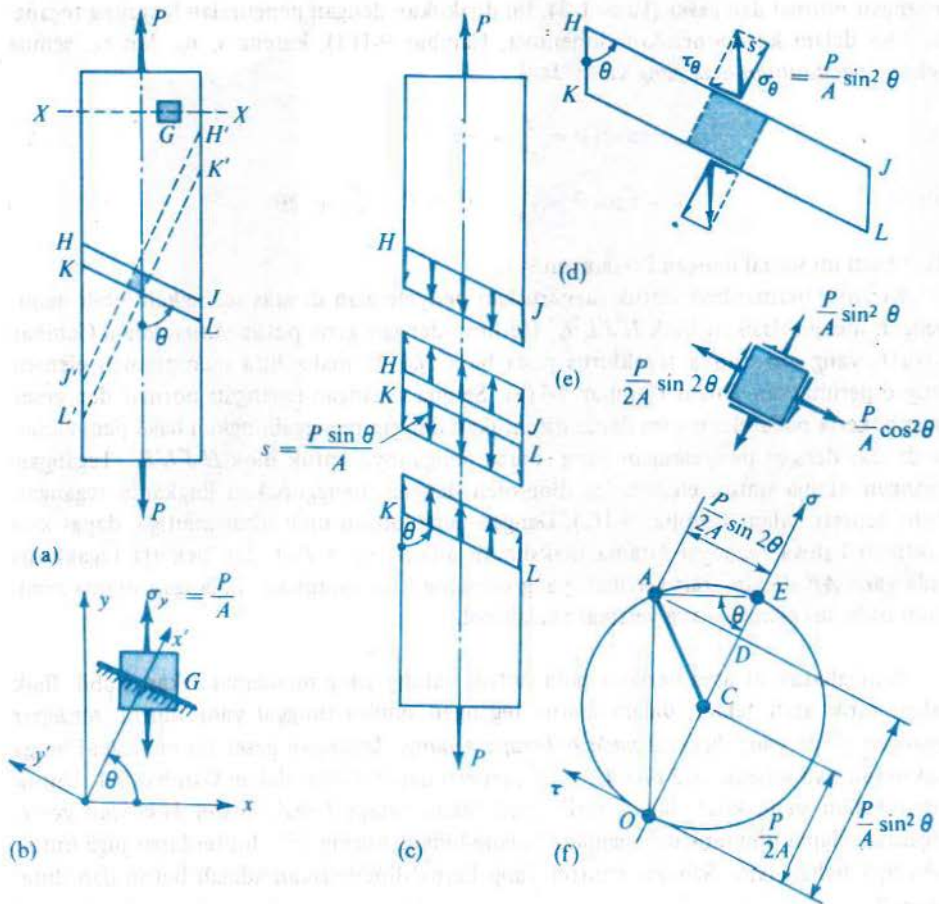
Tinjaulah batang berbentuk prisma yang memperoleh gaya tarik aksial seperti dalam Gambar 9-1(a). Dengan membuat irisan  $X-X$  tegaklurus terhadap sumbu batang melalui titik umum  $G$  dan dengan menggunakan Persamaan 1-1, kita mendapatkan tegangan  $\sigma = P/A$ , di mana  $A$  adalah luas penampang batang. Selanjutnya, karena tegangan normal ini merupakan satu-satunya tegangan yang bekerja pada elemen tersebut, Gambar 9-1(b) maka ia adalah tegangan utama. Dengan menulis tegangan ini sebagai  $\sigma_y$ , dan dengan memperhatikan bahwa  $\sigma_x = 0$  dan  $\tau_{xy} = 0$ , maka tegangan-tegangan normal dan geser yang bekerja pada suatu bidang miring yang ditentukan oleh sumbu  $x'$  yang tegaklurus terhadap bidang ini, dapat kita peroleh dengan menggunakan Persamaan-persamaan 8-1 dan 8-2 :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x'} &= \sigma \sin^2 \theta = \frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma}{2} \cos 2\theta \\ \tau_{x'y'} &= + \frac{\sigma}{2} \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (9-1)$$

di mana tanda-tanda besaran di atas mengikuti kaidah yang telah diambil dalam Gambar 8-4(b). Dari Persamaan 9-1, dapat kita lihat bahwa tegangan maksimum atau utama ter-



jadi bila  $\theta = 90^\circ$ . Persamaan-persamaan ini memperkuat kenyataan bahwa status tegangan pada sebuah titik dapat digambarkan dalam cara yang tidak terbatas.



Gambar 9-1

#### PENYELESAIAN YANG LAIN

Selain dari pemecahan soal ini dengan rumus-rumus yang telah kita kembangkan, dianjurkan pula untuk mengerjakan kembali soal tersebut dengan azas-azas dasar. Jadi, tinjaulah batang yang sama, Gambar 9-1(a), dan buatlah pada batang tersebut dua bidang yang sejajar  $HJ$  dan  $KL$  yang mempunyai kemiringan sebesar sudut  $\theta$  dengan garis vertikal. *Setiap* serat vertikal dalam blok  $HJLK$ , yang terlihat dalam keadaan terpisah dalam Gambar 9-1(c), bertambah panjang dengan besar yang sama. Semua serat ini dihadapkan kepada gaya yang mempunyai intensitas yang sama. Jadi, meskipun hal ini belum pernah dilakukan sebelumnya dalam buku ini, tegangan  $s$  yang bekerja dalam

arah vertikal pada suatu bidang miring dapat ditulis sebagai  $s = P/(A \sin \theta)$ , karena  $A/\sin \theta$  adalah luas penampang bidang miring dari batang tersebut. Cara pernyataan tegangan ini luar biasa, dan oleh karena itu tegangan itu diuraikan menjadi tegangan-tegangan normal dan geser (Pasal 1-3). Ini dilakukan dengan penguraian langsung tegangan  $s$  ke dalam komponen-komponennya, Gambar 9-1(d), karena  $s$ ,  $\sigma_\theta$  dan  $\tau_\theta$ , semua bekerja pada satuan luas yang sama. Jadi

$$\sigma_\theta = s \sin \theta = \frac{P}{A} \sin^2 \theta$$

dan

$$\tau_\theta = s \cos \theta = \frac{P}{A} \sin \theta \cos \theta = \frac{P}{2A} \sin 2\theta$$

Hasil-hasil ini sesuai dengan Persamaan 9-1.

Kiranya bermanfaat untuk meneruskan penyelesaian di atas selangkah lebih maju. Dengan mengisolasi blok  $H'J'L'K'$  (terlihat dengan garis putus-putus dalam Gambar 9-1(a)), yang sisi-sisinya tegaklurus pada blok  $HJLK$ , maka kita memperoleh elemen yang diperlihatkan dalam Gambar 9-1(e). Semua tegangan-tegangan normal dan geser yang bekerja pada elemen ini dapat ditentukan dengan menggabungkan hasil penyelesaian di atas dengan penyelesaian yang serupa dengannya untuk blok  $H'J'L'K'$ . Tegangan-tegangan utama untuk elemen ini diperoleh dengan menggunakan lingkaran tegangan Mohr seperti dalam Gambar 9-1(f). Dengan pertolongan ilmu ukur segitiga, dapat kita buktikan bahwa tegangan utama maksimum adalah  $\sigma_1 = P/A$  dan bekerja tegaklurus pada garis  $AE$  dalam arah vertikal, yang memang kita harapkan. Tegangan utama minimum pada sisi elemen yang vertikal adalah nol.

Pembahasan di atas berlaku pula untuk batang yang mendapat tekan stabil. Baik dalam tarik atau tekan, dalam status tegangan sumbu tunggal yang murni, *terdapat tegangan geser yang bekerja pada beberapa bidang*. Tegangan geser ini mencapai harga maksimumnya sebesar  $\sigma/2$  bila  $\theta = \pm 45^\circ$ , seperti dapat dilihat dalam Gambar 9-1. Untuk bahan-bahan yang kuat dalam tarik atau tekan tetapi *lemah dalam kekuatan geser*, kegagalan dapat diharapkan sepanjang bidang-bidang miring  $45^\circ$ . Ini terdapat juga untuk beberapa bahan lain. Sebagai contoh yang harus diperhatikan adalah beton dan duralumin.\*

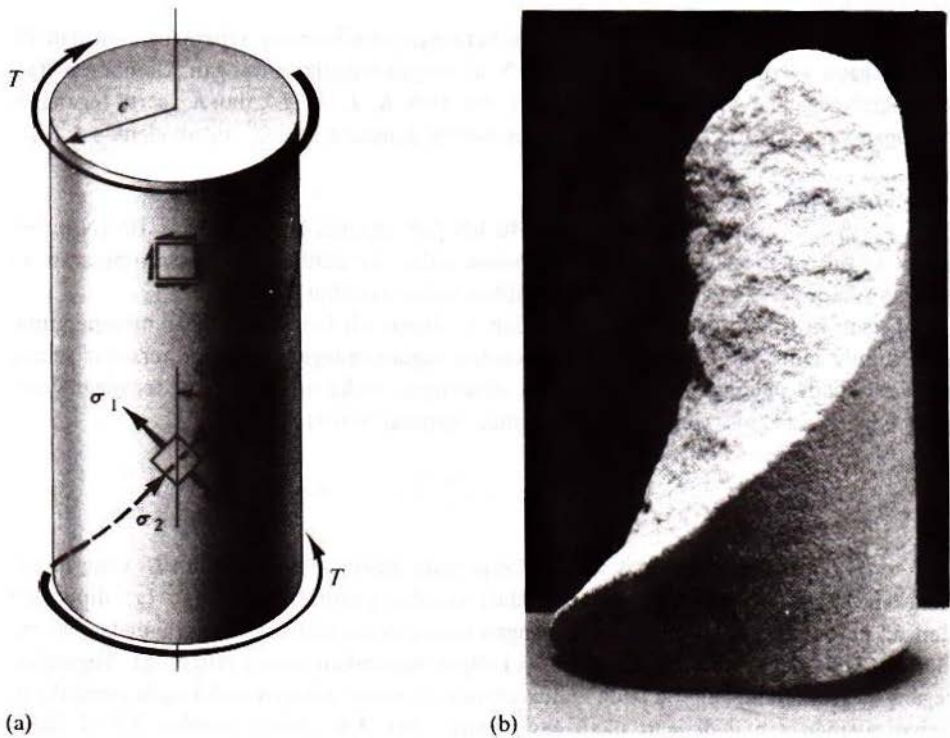
## CONTOH 9-2

Tentukanlah tegangan-tegangan utama yang terdapat dalam poros melingkar yang mendapatkan momen puntir  $T$ , Gambar 9-2(a).

## PENYELESAIAN

Dalam poros melingkar, tegangan geser maksimum terdapat dalam lapisan tipis paling luar (tidak pada permukaan luar) dan dengan Persamaan 3-3, menjadi  $\tau_{\max} = Tc/I_p$ , di mana  $c$  adalah radius poros dan  $I_p$  merupakan momen inersia kutubnya. Status tegangan geser murni ini terlihat bekerja pada sebuah elemen dalam Gambar 9-2(a).

\* Secara seksama kegagalan tidak terjadi pada bidang-bidang  $45^\circ$ , karena tegangan normal yang muncul bersamaan dengan tegangan geser juga mempengaruhi pecahnya bahan. Kenyataan ini diuraikan dalam teori kegagalan Mohr.



**Gambar 9-2** (a) Gambaran lain mengenai tegangan untuk sebuah poros yang mengalami puntiran; (b) cuplikan bagian tengah dari batu pasir sesudah pengujian puntiran. (Percobaan oleh Profesor D. Pritz).

Tetapi menurut Pasal 8-6, status tegangan geser murni berubah menjadi tegangan-tegangan utama tarik dan tekan yang besarnya sama dengan tegangan geser dan bekerja sepanjang diagonal geser yang bersangkutan. Karena itu, tegangan-tegangan utama adalah  $\sigma_1 = +Tc/I_p$  dan  $\sigma_2 = -Tc/I_p$  yang bekerja dalam arah yang diperlihatkan dalam gambar.

Transformasi tegangan di atas memungkinkan kita memperkirakan jenis kegagalan yang terjadi dalam bahan yang lemah dalam tarik. Bahan-bahan seperti ini akan gagal oleh cukilan sepanjang garis yang tegak lurus terhadap arah  $\sigma_1$ . Sebuah contoh dari kegagalan seperti ini untuk sebuah cuplikan batu pasir dapat dilihat dalam Gambar 9-2(b); poros besi cor mempunyai kegagalan pula dengan cara yang sama.† Kegagalan tersebut terjadi sepanjang helix (garis solenoida), seperti yang terlihat dalam Gambar 9-2(a) dengan garis putus-putus. Poros yang terbuat dari bahan-bahan yang kekuatan gesernya lemah, seperti besi tuang, akan patah melintang.

† Kapur biasa bersifat yang serupa pula. Hal ini dapat diperlihatkan dalam ruang kelas dengan melintir kapur tersebut sampai pecah.



## CONTOH 9-3

Sebuah balok sikuempat yang diabaikan beratnya membentang sepanjang 1 m dan dibebani gaya vertikal ke bawah  $P = 80$  kN di tengah-tengah bentangan, Gambar 9-3(a). Hitunglah tegangan-tegangan utama pada titik-titik  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $L'$ , dan  $K'$ , serta tegangan-tegangan yang bekerja pada sebuah bidang miring dengan  $\theta = +30^\circ$  untuk elemen  $L'$ .

## PENYELESAIAN

Pada irisan  $KK'$  sebuah geseran sebesar 40 kN dan momen lentur sebesar 10 kN diperlukan untuk menjaga segmen balok tersebut dalam keseimbangan. Besaran-besaran ini dengan sikap mereka yang benar dapat dilihat dalam Gambar 9-3(c).

Tegangan utama pada titik-titik  $K$  dan  $K'$  diperoleh langsung dengan mempergunakan rumus lenturan, Persamaan 5-1. Karena tegangan-tegangan geser tersebar secara parabolis pada penampang sebuah balok sikuempat, maka tidak terdapat tegangan geser yang bekerja pada elemen-elemen ini, Gambar-gambar 9-3(d) dan (h).

$$\sigma_K \text{ atau } K' = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{S} = \frac{6M}{bh^2} = \frac{6(10)}{(0,04)(0,3)^2} = 16,67 \times 10^3 \text{ kPa}$$

Tegangan-tegangan normal yang bekerja pada elemen-elemen  $L$  dan  $L'$  yang diperlihatkan dalam sketsa-sketsa pertama dari Gambar-gambar 9-3(e) dan (g) diperoleh dengan perbandingan langsung dari tegangan-tegangan normal yang bekerja pada elemen-elemen  $K$  dan  $K'$  (atau Persamaan 5-1(a) dapat digunakan secara langsung). Tegangan-tegangan geser yang bekerja pada kedua elemen ini sama. Sikap mereka pada permukaan kanan elemen sesuai dengan sikap geser pada irisan  $KK'$  dalam Gambar 9-3(c). Besar tegangan geser ini diperoleh dengan menggunakan Persamaan 6-6,  $\tau = VA_{fghi}\bar{y}/(It)$ . Untuk penggunaannya dalam persamaan ini, luas  $A_{fghi}$  dengan  $\bar{y}$  yang sesuai diperlihatkan dengan daerah gelap dalam Gambar 9-3(b).

$$\sigma_L \text{ atau } L' = \frac{0,14}{0,15} \times \sigma_K = \pm 15,56 \times 10^3 \text{ kPa}$$

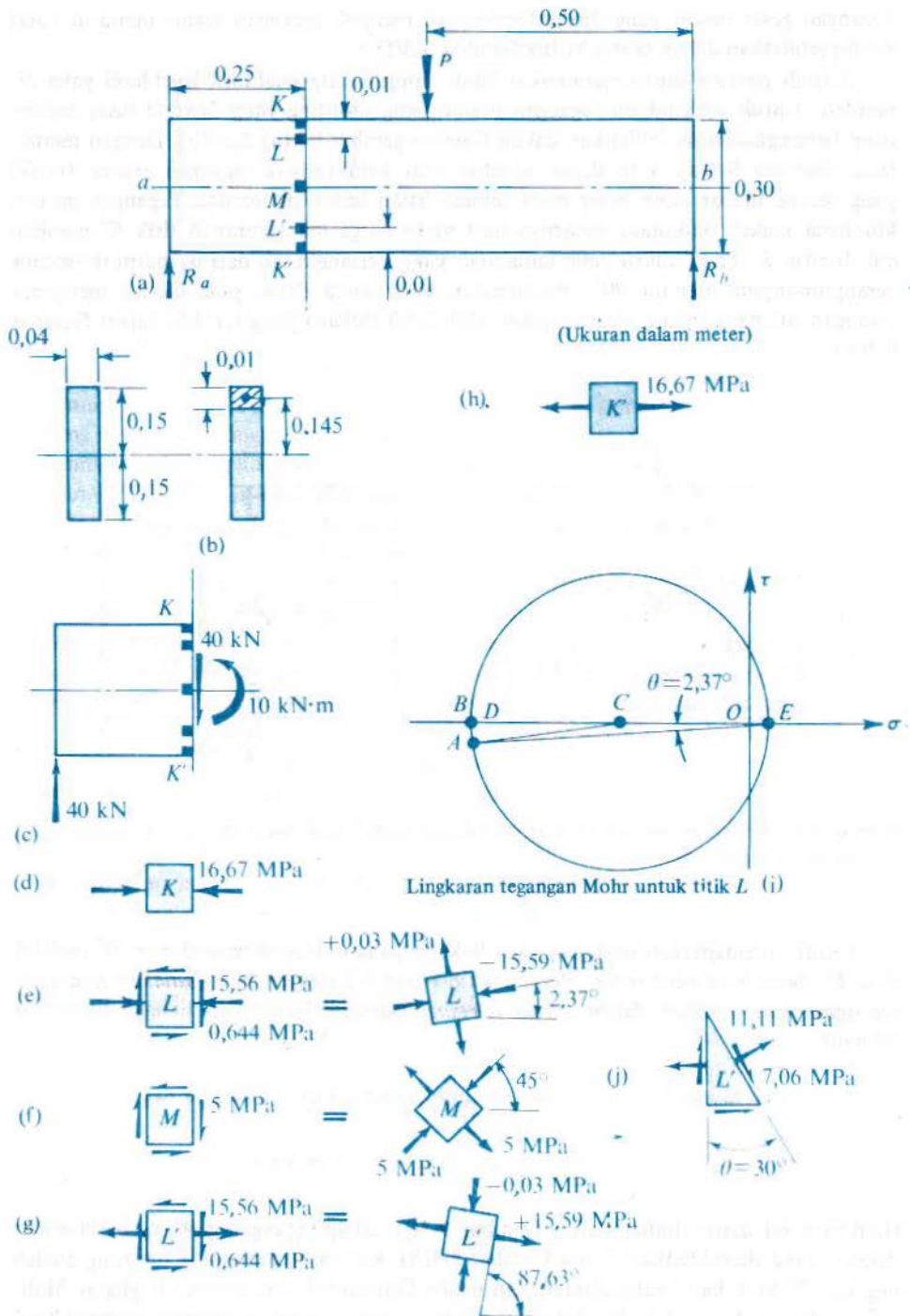
$$\tau_L \text{ atau } L' = \frac{VA_{fghi}\bar{y}}{It} = \frac{(40)(0,04)(0,01)(0,145)}{(1/12)(0,04)(0,3)^3(0,04)} = 644 \text{ kPa}$$

Untuk mendapatkan tegangan utama di titik  $L$ , kita mempergunakan lingkaran tegangan Mohr. Penggambarannya ditunjukkan dalam Gambar 9-3(i) serta hasil-hasil yang diperoleh terlihat dalam sketsa kedua dari Gambar 9-3(e). Perhatikanlah bahwa invariansi jumlah tegangan normal adalah  $\sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2$  atau  $-15,56 + 0 = -15,56 + 0,03$ . Penyelesaian yang serupa untuk tegangan-tegangan utama pada titik  $L'$  memberikan hasil yang diperlihatkan dalam sketsa kedua Gambar 9-3(g).

Titik  $M$  terletak pada sumbu netral balok, jadi tidak ada tegangan lentur bekerja pada elemen yang bersangkutan yang diperlihatkan dalam sketsa pertama Gambar 9-3(f). Tegangan geser pada permukaan elemen sebelah kanan pada titik  $M$  bekerja dalam arah yang sama seperti gaya geser dalam pada irisan  $KK'$ . Besarnya dapat diperoleh dengan menggunakan Persamaan 6-6 atau langsung menggunakan Persamaan 6-7, yaitu,

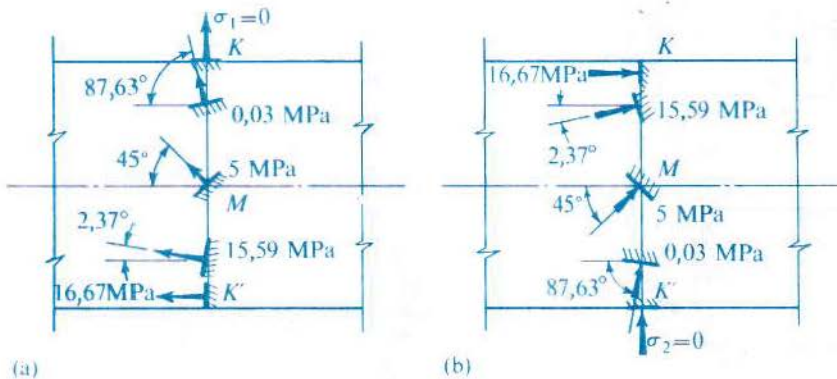
$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{V}{A} = \frac{1,5(40)}{0,04(0,3)} = 5 \times 10^3 \text{ kPa}$$





Tegangan geser *murni* yang ditransformasikan menjadi tegangan utama menurut Pasal 8-6 diperlihatkan dalam sketsa kedua Gambar 9-3(f).

Adalah penting untuk memeriksa lebih lanjut secara kualitatif hasil-hasil yang diperoleh. Untuk maksud ini tegangan utama yang dihitung *yang bekerja pada bidang yang bersangkutan* diperlihatkan dalam Gambar-gambar 9-4(a) dan (b). Dengan memeriksa Gambar 9-4(a), kita dapat melihat sifat karakteristik tegangan utama (tarik) yang secara aljabar lebih besar pada sebuah irisan balok sikuempat. Tegangan ini makin lama makin berkurang besarnya dari suatu harga maksimum di titik  $K'$  menjadi nol di titik  $K$ . Pada waktu yang sama arah yang bersangkutan dari  $\sigma_1$  berputar secara berangsur-angsur menuju  $90^\circ$ . Pengamatan yang sama dapat pula dibuat mengenai tegangan utama  $\sigma_2$  yang secara aljabar lebih kecil (tekan) yang terlihat dalam Gambar 9-4(b).



**Gambar 9-4** (a) Sifat tegangan utama  $\sigma_1$  yang secara aljabar lebih besar. (b) Sifat tegangan utama  $\sigma_2$  yang secara aljabar lebih kecil.

Untuk mendapatkan tegangan yang bekerja pada bidang dengan  $\theta = +30^\circ$  melalui titik  $L'$ , dapat kita pergunakan Persamaan 8-1 dan 8-2 *dengan menggunakan tegangan-tegangan yang terlihat dalam sketsa pertama Gambar 9-3(g)* dan dengan membuat  $2\theta = 60^\circ$ .

$$\sigma_\theta = \frac{+15,56}{2} + \frac{+15,56}{2} \cos 60^\circ + (-0,644) \sin 60^\circ = +11,11 \text{ MPa}$$

$$\tau_\theta = \frac{-15,56}{2} \sin 60^\circ + (-0,644) \cos 60^\circ = -7,06 \text{ MPa}$$

Hasil-hasil ini dapat dilihat dalam Gambar 9-3(j). Sikap tegangan geser  $\tau_\theta$  berlawanan dengan yang diperlihatkan dalam Gambar 8-4(b), karena besaran yang dihitung adalah negatif. "Teknik baji" yang diterangkan dalam Contoh 8-1 atau metoda lingkaran Mohr seperti diterangkan dalam Pasal 8-8 dapat kita gunakan untuk mendapatkan hasil-hasil yang sama.

### \*9-3 BATANG DALAM STATUS TEGANGAN DUA-DIMENSI

Kita dapat mempelajari benda dalam status tegangan dua-dimensional dalam ruang lingkup rumus-rumus yang dikembangkan dalam buku ini, seperti yang kita lakukan dalam contoh yang lalu. Sebagian besar titik-titik dalam benda yang mendapatkan tegangan dapat kita selidiki besar dan arah tegangan utama. Kemudian, dengan mempelajari sifat umum tegangan-tegangan tersebut, kita dapat saling menghubungkan titik-titik yang dipilih untuk memberikan pemahaman visual mengenai pelbagai aspek dari data-data yang dihitung. Umpamanya, titik-titik tegangan utama yang secara aljabar adalah sama, tanpa memperhatikan sikap mereka, bila dihubungkan, akan memberikan sebuah "peta" atau *kontur (garis bentuk) tegangan*. Tiap titik yang terletak pada sebuah kontur tegangan mempunyai sebuah tegangan utama dengan besar yang sama secara aljabar.

Demikian pula kita dapat menghubungkan titik-titik dengan arah tegangan utama minimum yang membentuk *sudut yang tetap* dengan sumbu- $x$ .\* Lebih lanjut, berhubung tegangan-tegangan utama adalah saling tegaklurus, maka arah tegangan utama maksimum yang melalui titik-titik yang sama membentuk pula sebuah sudut yang tetap dengan sumbu- $x$ . Garis yang dihubungkan merupakan tempat titik-titik sepanjang mana tegangan-tegangan utama mempunyai arah-arrah yang *saling sejajar*. Garis ini disebut *garis isoklin* (isoclinic line). Kata sifat isoklinik diambil dari dua buah kata Yunani, *isos* yang berarti sama dan *klino* yang artinya kelandaian atau kemiringan. Ketiga garis isoklin dapat diperoleh dengan pemeriksaan ke dalam balok prismatik sikuempat yang mendapat pembebanan lintang yang bekerja tegaklurus terhadap sumbunya. Garis-garis tersebut yang sesuai dengan batas-batas atas dan bawah dari balok membentuk garis-garis isoklinik, pada perbatasan, di mana tegangan lentur merupakan tegangan utama dan bekerja sejajar dengan batas.† Di lain pihak, tegangan lentur adalah nol pada sumbu netral, dan di sini hanya terdapat tegangan geser murni. Tegangan geser murni ini berubah menjadi tegangan utama, yang semuanya bekerja pada sudut  $45^\circ$  dengan sumbu balok. Jadi, garis isoklin yang lain (isoklin  $45^\circ$ ) terletak pada sumbu balok. Garis-garis isoklin lain merupakan kurva dan lebih sukar ditentukan.

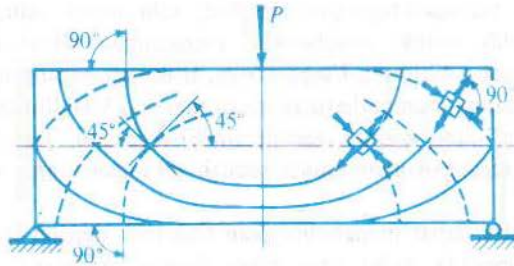
Kumpulan kurva yang lain dapat kita gambarkan untuk sebuah benda yang mendapat tegangan di mana besar dan sikap tegangan utama pada kebanyakan titik kita ketahui. Suatu lengkungan yang garis singgungnya merupakan perubahan arah tegangan utama disebut *lintasan tegangan utama* atau garis isostatik. Seperti halnya garis isoklin, maka lintasan tegangan utama *tidak* menghubungkan titik-titik yang sama tegangannya, tetapi lebih menunjukkan arah tegangan utama. Berhubung tegangan utama pada setiap titik adalah saling tegaklurus, maka lintasan tegangan utama untuk kedua tegangan utama tersebut membentuk suatu keluarga lengkungan yang ortogonal

\* Sudut-sudut ini biasanya diukur dalam arah berlawanan dengan putaran jarum jam dari sumbu- $x$  menuju garis aksi tegangan utama minimum yang terdekat. Sudut-sudut ini berubah-ubah dari  $0^\circ$  sampai  $90^\circ$ . Metoda yang lain, mengenai hal yang sama, terdiri dari pengukuran sudut secara berlawanan dengan putaran jarum jam dari suatu garis vertikal menuju garis aksi tegangan utama yang secara aljabar lebih besar.

† Bila momen lentur adalah positif, maka garis yang sesuai dengan batas atas balok membentuk garis isoklin  $0^\circ$ , sedang batas bawah sesuai dengan isoklin  $90^\circ$ .



(saling tegaklurus).\* Sebagai contoh dari lintasan tegangan untuk balok sikuempat yang dibebani gaya terpusat pada tengah bentangan dapat dilihat dalam Gambar 9-5. Lintasan tegangan utama yang berhubungan dengan tegangan tarik diperlihatkan sebagai garis dalam gambar; sedang yang tegangan tekan oleh garis putus-putus. Pola lintasan tersebut (tidak terlihat) sama sekali terganggu pada tumpuan dan titik tangkap beban  $P$ .



Gambar 9-5 Lintasan tegangan utama untuk balok sikuempat

#### \*9-4 METODA ANALISA TEGANGAN FOTOELASTIS

Status tegangan dalam setiap persoalan tegangan dua-dimensional dapat dinyatakan dalam bentuk kontur tegangan, garis isoklin, dan lintasan tegangan utama yang dibicarakan dalam pasal yang lalu. Lebih lanjut, penting untuk diperhatikan bahwa penggunaan gaya yang sama dengan cara yang sama pula terhadap dua benda yang serupa secara geometris, tetapi terbuat dari *bahan-bahan elastis yang berbeda*, dapat menghasilkan distribusi tegangan yang sama pula. Distribusi tegangan tersebut tidak dipengaruhi† oleh tetapan elastis bahan. Karena itu untuk menentukan tegangan secara eksperimental, dengan maksud untuk mendapatkan tegangan dalam anggota yang sesungguhnya, maka uji coba kita buat dari bahan yang cocok untuk jenis pengujian yang akan dilakukan. Gelas, selluloida, dan khususnya *Bakelit* dari derajat tertentu mempunyai sifat-sifat optik yang diperlukan untuk tugas fotoelastik. Baru-baru ini, bahan-bahan tambahan seperti karet polyurethana, Plexiglas, resin epoksi dan resin Columbia (CR-39) telah pula digunakan. Dalam contoh yang diberi tegangan yang terbuat dari salah satu bahan ini, tegangan utama *untuk sementara mengubah sifat-sifat optik* dari bahan. Perubahan sifat-sifat optik dapat dideteksi dan dihubungkan dengan tegangan utama yang menyebabkannya. Teknik eksperimental dan analitis yang diperlukan untuk penelaahan soal-soal dengan cara ini dikenal sebagai *metoda analisis tegangan fotoelastik*. Yang akan diberikan di sini hanyalah garis besar metoda ini,\* beserta ulasan beberapa catatan mengenai cahaya.

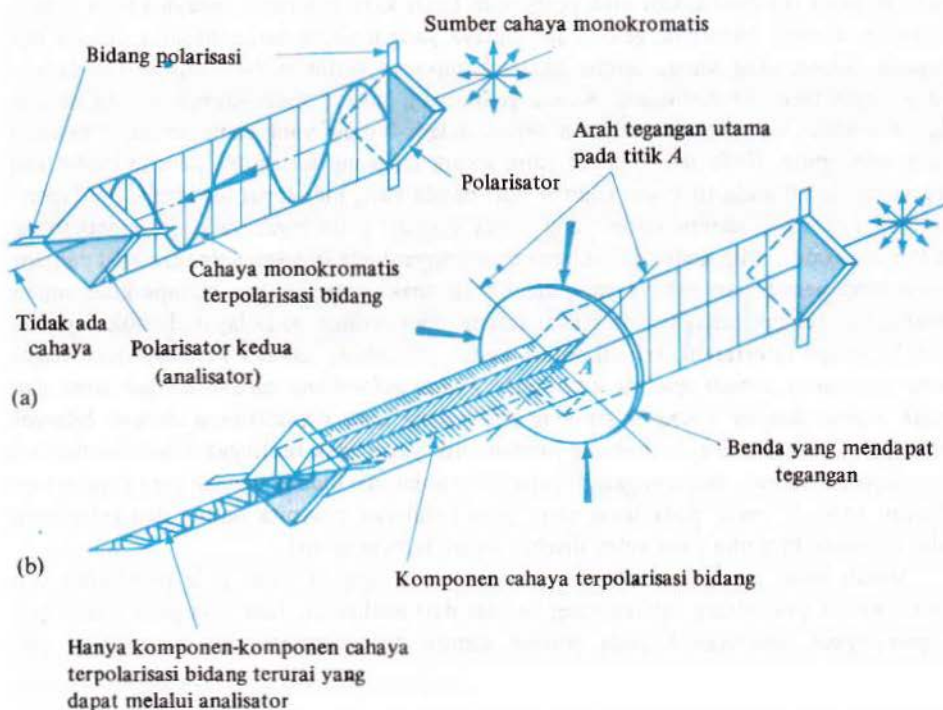
\* Keadaan yang agak serupa kita temui dalam mekanika fluida di mana dalam soal-soal aliran fluida "dua dimensional", *garis aliran* dan *garis ekuipotensial* membentuk sistem lengkungan ortogonal — *jaringan aliran*.

† Untuk memperlihatkan hal ini benar, sesungguhnya, benda-benda haruslah tersambung dengan sederhana, yaitu tanpa lubang-lubang di dalam.

\* Agar lebih terperinci lihatlah M.M. Frocht, *Photoelasticity*, vol. I dan II, New York: Wiley, 1941 dan 1948.

Cahaya merambat dalam medium tertentu dalam suatu garis lurus dengan kecepatan yang tetap. Untuk maksud ini, sifat dari cahaya dapat diterangkan dengan memperhatikan sinar tunggal dari cahaya sebagai kumpulan gelombang-gelombang yang kacau yang berjalan dalam sejumlah bidang yang mengandung sinar tersebut. Dengan membatasi getaran gelombang tersebut kepada suatu bidang tunggal, maka kita memperoleh *cahaya berpolarisasi bidang*. Hal ini dapat dilakukan dengan menyinarkan cahaya melalui sebuah *polarisator*, yang dapat berupa lapisan pelat, prisma Nicol atau elemen "Polaroid" yang dibuat secara komersial. Bidang polarisator melalui mana getaran melintang (transversal) dari cahaya dirambatkan disebut *bidang polarisasi* (plane of polarization). Diagram skematik dari definisi-definisi yang baru lalu terlihat dalam Gambar 9-6(a), di mana polarisator kedua, yang disebut analisator, diperlihatkan pula. Perhatikan bahwa bila bidang polarisasi kedua polarisator tersebut tegak lurus antara satu sama lain, maka *tidak ada cahaya* yang ke luar dari analisator. Pengaturan analisator terhadap polarisator disebut *penyilangan*.

Bila sumber cahaya\* yang dipergunakan adalah monokromatik, yaitu terdiri dari satu warna, maka getaran transversal cahaya polarisasi bidang adalah beraturan, karena panjang gelombang dalam medium untuk salah satu warna adalah konstan. Ketika merambat melalui medium yang sama, getaran transversal ini dilukiskan dengan gelombang sinusoidal dengan amplitudo dan frekuensi yang konstan.



Gambar 9-6 Metoda analisis tegangan fotoelastik

\* Lampu uap merkuri biasa digunakan untuk tujuan ini.



Dengan memasukkan contoh yang telah mengalami pelunakan yang terbuat dari bahan tembus cahaya yang sesuai antara polarisator dan analisator dalam susunan yang terlihat dalam Gambar 9-6(a), maka gejala baru dapat kita amati. Tetapi dengan memberikan tegangan kepada contoh, sifat optik bahan tersebut akan berubah, dan dua gejala dapat terjadi:†

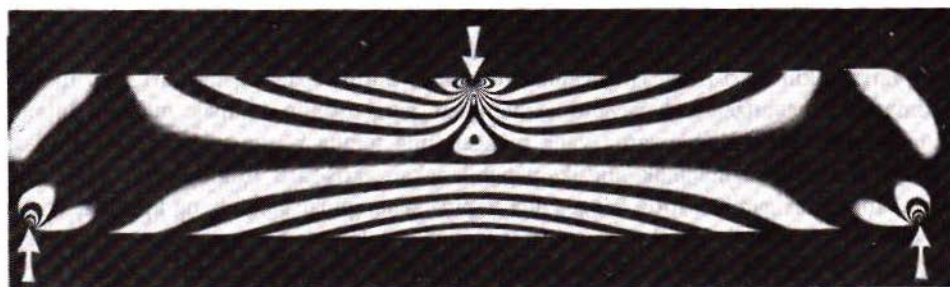
1. Pada masing-masing titik dari benda yang mendapat tegangan, gelombang cahaya polarisasi *diuraikan* ke dalam dua komponen yang saling tegaklurus sesamanya, yang terletak pada bidang tegangan utama yang terjadi pada titik itu.
2. Kecepatan linier masing-masing komponen gelombang cahaya tersebut *diperlambat* melalui contoh yang mendapat tegangan dalam perbandingan yang langsung dalam hubungannya dengan tegangan utama.

Kenyataan-kenyataan ini merupakan dasar metoda analisis tegangan fotoelastik. Suatu gambaran skematik sifat gelombang terpolarisasi bidang yang monokromatis ketika melalui benda yang mendapat tegangan dan analisator dapat dilihat dalam Gambar 9-6(b). Dalam contoh yang mendapat tegangan, gelombang terpolarisasi bidang diuraikan ke dalam dua komponen yang bidang-bidangnya berimpit dengan bidang-bidang tegangan utama, seperti pada titik *A*. Komponen-komponen getaran sinusoidal ini ke luar dari contoh dengan frekuensi yang sama tetapi *tidak sefasa*. Efek yang terakhir ini disebabkan oleh perbedaan besar keterlambatan cahaya kedua bidang tegangan utama. Akhirnya, gelombang cahaya yang muncul dari analisator dibawa lagi kepada bidang yang sama, karena hanya komponen tertentu dari cahaya terpolarisasi yang dapat terus ke analisator. Kedua gelombang cahaya monokromatis yang ke luar dari analisator bergetar dalam tidak sefasa dalam bidang yang sama dengan frekuensi yang sama pula. *Beda fasa* mereka yang secara langsung sebanding dengan perbedaan tegangan utama pada titik semacam *A* dari benda yang mendapat tegangan, akan memberikan beberapa kemungkinan yang dapat diamati pada layar yang ditempatkan sesudah analisator. Bila kedua gelombang mempunyai beda fasa sama dengan satu panjang gelombang penuh dari cahaya yang digunakan, maka mereka akan memperkuat antara sesamanya, hingga cahaya yang sangat terang akan terlihat pada layar. Untuk kejadian lain, beberapa interferensi terjadi antara kedua gelombang cahaya. *Penghapusan cahaya yang sempurna terjadi apabila amplitudo kedua gelombang cahaya adalah sama dan tidak sefasa dengan setengah panjang gelombang atau perkaliannya dengan bilangan bulat ganjil*. Karena itu, berhubung jumlah titik yang tidak terhingga dalam benda yang mendapat tegangan, mempengaruhi cahaya terpolarisasi bidang dengan cara yang serupa dengan titik *A*, maka pada layar akan jelas kelihatan pita-pita terang dan gelap yang silih berganti. Pita-pita yang gelap disebut *fringe* (cincin gelap).

Makin besar perbedaan antara tegangan utama, makin besar pula perbedaan fasa antara kedua gelombang cahaya yang ke luar dari analisator. Jadi, bila gaya *secara berangsur-angsur* diberikan kepada contoh sampai tegangan-tegangan mempunyai per-

† Gejala yang pertama ditemukan oleh Sir David Brewster dalam tahun 1816. Hubungan yang kuantitatif dibuat oleh G. Wertheim pada tahun 1854. Perkembangan modern fotoelastis serta pemakaiannya dalam keteknikan mungkin sangat berhutang budi kepada dua orang profesor Inggris, F.G. Coker dan L.N.G. Filon, yang melakukan pokok permasalahan ini dan dipublikasikan pada tahun 1930.

bedaan yang cukup untuk menghasilkan suatu beda fasa sebesar setengah panjang gelombang antara kedua gelombang cahaya pada titik yang sama, maka pada layar akan muncul fringe yang pertama. Kemudian bila besar gaya terpakai dinaikkan, maka fringe pertama tadi akan bergeser ke kedudukan yang baru, sedang *fringe yang lain dengan "ordo yang lebih tinggi"* muncul pula pada layar. Fringe yang kedua sesuai dengan tegangan-tegangan utama yang menghasilkan perbedaan fasa  $1\frac{1}{2}$  panjang gelombang. Proses ini dapat diteruskan selama contoh bersifat secara elastis, hingga fringe makin bertambah banyak muncul pada layar. Sebuah gambar foto dengan beberapa fringe untuk sebuah balok segiempat yang dibebani pada pertengahan rentangan dapat dilihat dalam Gambar 9-7. Dalam suatu percobaan yang terpisah fringe dapat dihitung dengan sebuah batang yang mendapat gaya tarik atau batang yang mengalami lenturan murni. Tegangan untuk batang yang sederhana ini dapat dihitung secara teliti. Kita perlu membuat contoh-contoh yang telah dikalibrasi dari bahan yang sama dengan contoh yang diselidiki. Dengan data kalibrasi tersebut, batang yang lebih rumit yang mendapat pembebanan yang rumit pula dapat kita selidiki. Untuk masing-masing orde fringe perbedaan tegangan-tegangan utama,  $\sigma_1 - \sigma_2$ , dapat diketahui dari kalibrasi; jadi, fringe menyatakan sebuah "peta" dari perbedaan tegangan-tegangan utama. Menurut Persamaan 8-8, perbedaan dalam tegangan utama dibagi dengan dua adalah sama dengan tegangan geser maksimum; karenanya fringe menyatakan pula sebagai tempat tegangan geser utama.



Gambar 9-7 Gambar foto cincin (fringe) balok sikuempat

Gambar foto fringe dari sebuah benda yang mengalami tegangan dan data kalibrasi cukup untuk menentukan besar tegangan geser maksimum atau utama. Kita dapat pula memperoleh tegangan utama pada suatu titik dari batas *yang tidak dibebani*. Pada batas bebas, salah satu tegangan utama yang bekerja tegak lurus terhadap perbatasan haruslah nol, sedang ordo dari fringe harus dapat dihubungkan langsung dengan tegangan utama yang lain. Kita haruslah melakukan tugas percobaan tambahan untuk dapat menentukan tegangan normal yang jauh dari perbatasan.

Satu metoda dalam penyelesaian soal tersebut ialah mendapatkan beberapa *pengukuran yang sangat teliti mengenai perubahan ketebalan contoh yang mengalami tegangan* pada sejumlah titik. Pengukuran ini, yang dapat kita tulis sebagai  $\Delta t$ , di mana  $t$  merupakan tebal contoh, dapat dihubungkan dengan tegangan utama; yakni membentuk



hukum Hooke yang diperluas (Persamaan 2-6) dengan  $\sigma_z = 0$  yang kita peroleh sebagai berikut

$$\Delta t = -\nu \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{E} \right) t \quad \text{atau} \quad \sigma_1 + \sigma_2 = -\frac{E}{\nu t} \Delta t$$

Kemudian, dari percobaan tambahan pada bahan yang sama di bawah tegangan tarik sederhana di mana  $\sigma_1 \neq 0$  dan  $\sigma_2 = 0$ , sebuah grafik kalibrasi baru dapat kita buat yang memperlihatkan jumlah tegangan utama terhadap  $\Delta t$ . Dari keterangan yang kita peroleh dari kedua percobaan ini, kita dapat membuat sebuah "peta" dari jumlah tegangan utama untuk contoh yang kita selidiki. Dengan menggabungkan "peta" ini dengan "peta" perbedaan antara tegangan-tegangan utama yang kita peroleh dari gambar foto fringe, maka besar tegangan utama pada suatu titik contoh yang mendapat tegangan dapat kita tentukan.

Keterangan tambahan harus kita peroleh dalam gambar fringe untuk menentukan arah tegangan utama. Keterangan ini diberikan oleh garis isoklin. Ini adalah sebuah garis hitam yang sesuai dengan letak titik-titik di mana arah salah satu tegangan utama dalam benda bertegangan bersamaan dengan bidang cahaya terpolarisasi yang ke luar dari polarisator. Sinar yang melalui titik-titik ini dalam contoh bertegangan tidak dapat diuraikan dan terhapus oleh analisator. Dengan memutar polarisator ke dalam beberapa kedudukan yang diketahui dan menjaga agar analisator dilalui oleh sinar, maka garis-garis isoklin dapat ditentukan. Garis-garis ini mungkin sukar dibedakan dari fringe, karena keduanya muncul secara bersamaan pada layar. Suatu metoda untuk membedakan garis isoklin dari fringe, menggunakan cahaya putih sebagai pengganti sinar monokromatis. Penggunaan cahaya putih membuat garis isoklin tampak menjadi hitam, sedang fringe menjadi berwarna yang mengandung semua warna spektral tampak dari cahaya putih. Di lain pihak, untuk menghilangkan garis-garis isoklin yang tidak kita inginkan dalam gambar foto fringe, dua keping seperempat gelombang kita masukkan ke dalam sistem optis tersebut. Keping seperempat gelombang menguraikan cahaya terpolarisasi bidang menjadi dua komponen yang saling tegak lurus sesamanya; satu komponen berbeda fasa seperempat gelombang dengan yang lainnya. Penggabungan komponen-komponen ini menghasilkan suatu "cahaya yang berpolarisasi melingkar". Salah satu keping ini diletakkan antara polarisator dan spesimen, sedang yang satu lagi antara spesimen dan analisator. Gambar foto yang terlihat dalam Gambar 9-7 diperoleh dengan menggunakan metoda ini.

Dengan bantuan metoda-metoda analitis, gambar foto serangkaian garis-garis isoklinik dan fringe sudah cukup untuk menyelesaikan persoalan fotoelastik tanpa perlu mendapatkan jumlah tegangan utama secara eksperimental. Prosedur ini sangat terperinci dan sulit dikerjakan, dan untuk mendapatkan keterangan lebih lanjut pembaca dianjurkan untuk melihat buku-buku tentang fotoelastisitas.

Metoda analisis tegangan fotoelastik serbaguna dan telah dipergunakan untuk menyelesaikan banyak soal. Hampir semua penyelesaian faktor konsentrasi tegangan dibuat dengan fotoelastisitas. Ketidaktelitian rumus-rumus dasar mekanika bahan pada gaya terpusat jelas dapat diatasi oleh gambar foto fringe. Umpamanya, dalam Gambar 9-7, berdasarkan rumus dasar, fringe pada parohan sebelah atas balok haruslah sama



dengan parohan bawah. Perhatikan pula gangguan lokal tegangan pada tumpuan dalam gambar foto yang sama.

Metoda fotoelastik sangat baik diterapkan pada soal-soal tegangan dua-dimensi. Sedang persoalan yang tiga-dimensional telah pula dapat ditelaah dengan teknik-teknik yang khusus. Perluasan metoda tersebut kepada persoalan bukan elastis dan plastis sampai sekarang masih belum terselesaikan. Metoda fringe Moire merupakan metoda optis yang lain yang mendapatkan banyak keberhasilan. Metoda ini tidak akan kita bicarakan di sini.\*

## 9-5 BEJANA TEKAN DINDING TIPIS

Penyelidikan-penyelidikan di atas mengenai tegangan utama dalam beberapa bagian struktur yang mendapat tegangan menggambarkan berbagai hal di mana tegangan sumbu ganda terdapat. Di lain pihak, semua filsafat yang lalu mengenai tegangan ijin didasarkan pada uji tarik atau puntiran sederhana. Karena itu sebelum pembahasan disain bagian struktur dikerjakan, kita penting meraih beberapa kesimpulan mengenai pengaruh tegangan sumbu ganda pada perlawanan terhadap kegagalan berbagai bahan. Berhubung jawaban terhadap pertanyaan ini kita peroleh dari percobaan dengan bejana tekan berdinding tipis, maka metoda untuk menelaah mereka haruslah kita kembangkan dahulu. Perhatian akan kita batasi kepada dua jenis dari bejana-bejana ini, yakni bejana tekan silindris dan sferis (berbentuk bola).\* Kedua jenis bejana tekan ini betul-betul penting dalam industri; jadi pokok permasalahan ini sendiri praktis penting sekali.

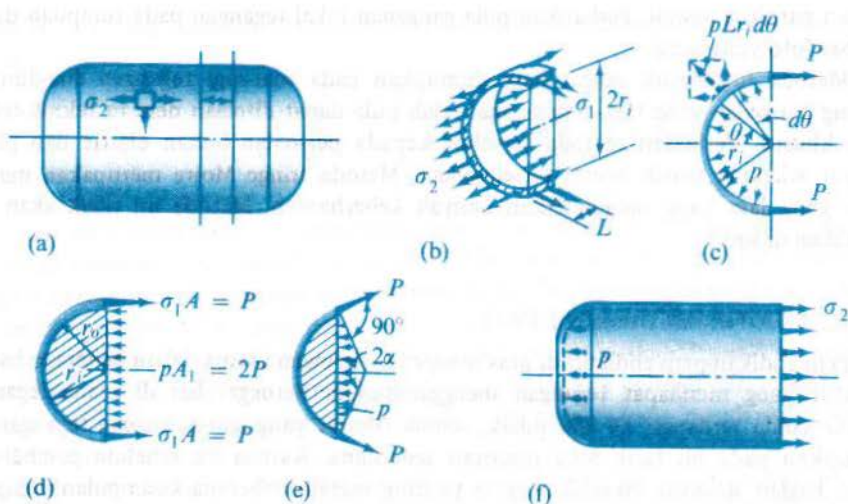
Dinding bejana tekan berdinding tipis yang ideal bekerja sebagai membran, yakni, tidak terjadi lenturan dari dinding tersebut. Bola merupakan bentuk yang ideal untuk bejana tekan tertutup bila isinya mempunyai berat yang diabaikan. Sedang bejana silindris baik juga kecuali pada titik sambung dengan ujung-ujung, suatu hal yang akan kita ulas lebih terperinci kemudian.

Penelaahan bejana tekan akan kita mulai dengan meninjau bejana tekan silindris seperti sebuah ketel, sebagai yang terlihat dalam Gambar 9-8(a). Sebuah segmen dipisah tersendiri dari bejana ini dengan membuat dua bidang tegaklurus terhadap sumbu silinder tersebut dan sebuah bidang tambahan yang membujur melalui sumbu yang sama, seperti yang terlihat dalam Gambar 9-8(b). Keadaan simetri meniadakan terjadinya tegangan geser dalam bidang irisan, karena tegangan geser mengakibatkan penyimpanan tabung yang tidak bersamaan. Karena itu tegangan yang terjadi pada irisan silinder tersebut hanyalah tegangan-tegangan normal  $\sigma_1$  dan  $\sigma_2$  yang terlihat dalam Gambar 9-8(b). Tegangan ini merupakan *tegangan utama*. Tegangan-tegangan ini yang dikalikan dengan masing-masing luas di mana mereka bekerja, akan menjaga elemen silinder tersebut berada dalam keseimbangan dalam melawan tekanan dalam.

Ambillah tekanan dalam yang melebihi tekanan luar yaitu  $p$  Pa (tekanan ukur), dan misalkan radius dalam silinder sebesar  $r_i$ . Kemudian *gaya* pada suatu luas yang kecil tak-

\* Lihat umpamanya, P.S. Theocaris, "Moire Fringes: A Powerful Measuring Device," *Applied Mechanics Review*, May 1962, vol. 15.

† Untuk membahas lebih luas mengenai sifat membran dari selubung putar simetris sumbu lihatlah E. Popov, *Introduction to Mechanics of Solids*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1968.



Gambar 9-8 Diagram analisis bejana tekan silindris

berhingga  $Lr_i d\theta$  (di mana  $d\theta$  adalah sudut kecil takberhingga) dari silinder tersebut yang disebabkan oleh tekanan dalam yang bekerja tegaklurus adalah  $pLr_i d\theta$ , Gambar 9-8(c). Komponen gaya ini yang bekerja dalam arah yang mendatar adalah  $(pLr_i d\theta) \cos \theta$ ; jadi gaya perlawanan total sebesar  $2P$  yang bekerja pada segmen silindris adalah

$$2P = 2 \int_0^{\pi/2} pLr_i \cos \theta d\theta = 2pr_i L$$

Lagi-lagi dari keadaan simetri, setengah gaya total ini mendapat perlawanan pada potongan melalui silinder sebelah atas dan setengah lagi pada yang sebelah bawah. Tegangan normal  $\sigma_2$  yang bekerja dalam arah yang sejajar dengan sumbu silinder tidak masuk ke dalam integrasi di atas.

Selain memperoleh gaya  $2P$  yang disebabkan oleh tekanan dalam dengan integrasi, seperti yang kita lihat di atas, kita dapat pula melakukan prosedur yang lebih sederhana yang setara. Dari sudut tinjauan lain, kedua gaya  $P$  melawan gaya yang dibentuk oleh tekanan dalam  $p$ , yang bekerja tegaklurus terhadap luas proyeksi  $A_1$  dari segmen silindris kepada bidang garis tengah silinder, seperti Gambar 9-8(d). Luas ini dalam Gambar 9-8(b) adalah  $2r_i L$ , jadi  $2P = A_1 p = 2r_i L p$ . Gaya ini mendapat perlawanan dari gaya-gaya yang terbentuk dalam bahan dalam potongan yang membujur, dan berhubung radius luar silinder adalah  $r_o$ , maka luas kedua potongan yang membujur adalah  $2A = 2L(r_o - r_i)$ . Selanjutnya, jika tegangan normal rata-rata yang bekerja pada potongan yang membujur adalah  $\sigma_1$ , maka gaya yang mendapat perlawanan dari dinding silinder adalah  $2L(r_o - r_i)\sigma_1$ . Dengan mempersamakan kedua gaya, maka  $2r_i L p = 2L(r_o - r_i)\sigma_1$ .

Berhubung  $r_o - r_i$  sama dengan  $t$ , yaitu tebal dinding silinder, maka pernyataan terakhir dapat disederhanakan menjadi



$$\sigma_1 = \frac{pr_i}{t} \quad (9-2)$$

Tegangan normal yang diberikan oleh Persamaan 9-2 acapkali disebut sebagai *tegangan keliling* (circumferential stress) atau *tegangan gelung* (hoop stress). Persamaan 9-2 hanya berlaku untuk dinding silinder yang tipis, karena memberikan tegangan *rata-rata* dalam gelungan. Tetapi, dalam Bab 16 akan kita lihat bahwa tebal dinding dapat mencapai sepersepuluh radius dalam hingga kesalahan dalam menggunakan Persamaan 9-2 masih akan kecil. Berhubung Persamaan 9-2 terutama dipergunakan untuk bejana berdinding tipis maka  $r_i \approx r_o$ , tanda huruf dari radius biasanya dapat dihilangkan.

Persamaan 9-2 dapat pula diturunkan dengan membuat dua irisan yang membujur pada silinder, seperti yang terlihat dalam Gambar 9-8(e). Dalam pemecahan ini, gaya  $P$  dalam gelung haruslah kita tinjau bekerja secara menyinggung pada silinder. Dalam keadaan keseimbangan statis komponen mendatar gaya  $P$  mengimbangi komponen mendatar tekanan dalam.

Tegangan normal yang lain  $\sigma_2$  yang bekerja dalam bejana tekan silindris akan bekerja *secara membujur* seperti yang terlihat dalam Gambar 9-8(b) dan kita dapat menentukannya dengan memecahkan persoalan gaya aksial yang sederhana. Dengan membuat sebuah irisan melalui bejana yang tegak lurus terhadap sumbu silinder, maka diagram benda bebas dapat kita lihat pada Gambar 9-8(f). Gaya yang dibentuk oleh tekanan dalam tersebut adalah  $p\pi r_i^2$  dan gaya yang terbentuk oleh tegangan membujur  $\sigma_2$  dalam dinding adalah  $\sigma_2(\pi r_o^2 - \pi r_i^2)$ . Dengan menyamakan kedua gaya ini dan menyelesaikannya untuk  $\sigma_2$ ,

$$p\pi r_i^2 = \sigma_2(\pi r_o^2 - \pi r_i^2)$$

$$\sigma_2 = \frac{pr_i^2}{r_o^2 - r_i^2} = \frac{pr_i^2}{(r_o + r_i)(r_o - r_i)}$$

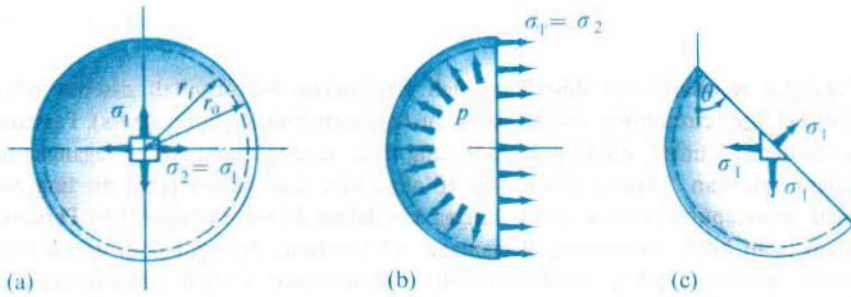
Tetapi,  $r_o - r_i = t$ , yaitu tebal dinding silinder, dan karena penurunan rumus ini terbatas pada bejana berdinding *tipis*, maka  $r_o \approx r_i \approx r$ ; jadi

$$\sigma_2 = \frac{pr}{2t} \quad (9-3)$$

Perhatikanlah bahwa untuk bejana tekan *silindris*  $\sigma_2 \approx \sigma_1/2$ .

Suatu metoda analisis yang serupa dapat kita gunakan untuk menurunkan ungkapan bejana tekan sferis yang berdinding tipis. Dengan membuat irisan melalui pusat bola dari Gambar 9-9(a), maka setengah bola yang terlihat dalam Gambar 9-9(b) dapat kita pisahkan secara tersendiri. Dengan menggunakan notasi yang sama dengan di atas, maka sebuah persamaan yang identik dengan Persamaan 9-3 dapat kita turunkan. Tetapi untuk sebuah bola, maka *setiap irisan yang melalui titik pusat bola memberikan hasil yang sama*. Tegangan utama yang sama bekerja pada elemen bola, bagaimana pun kemiringan yang terdapat pada sisi elemen tersebut, Gambar 9-9(c). Jadi, untuk bejana tekan sferis berdinding tipis kita peroleh

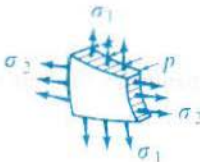
$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \quad (9-3a)$$



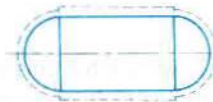
Gambar 9-9 Bejana tekan sferis

### \*9-6 CATATAN MENGENAI BEJANA TEKAN DINDING TIPIS

Status tegangan untuk sebuah elemen dari bejana tekan dinding tipis seperti yang diberikan oleh Persamaan-persamaan 9-2, 9-3 dan 9-3(a) telah kita tinjau sebagai sumbu ganda (biaksial), meskipun tekanan dalam yang bekerja pada dinding mengakibatkan tegangan tekan lokal yang sama dengan tekanan ini. Sebenarnya yang terdapat di dalam bejana tersebut adalah status tegangan triaksial, seperti yang terlihat dalam Gambar 9-10. Tetapi untuk bejana tekan dinding tipis tegangan yang belakangan ini jauh lebih kecil dari  $\sigma_1$  dan  $\sigma_2$  dan dengan alasan ini tegangan ini umumnya diabaikan. Tegangan berarti yang bekerja pada elemen-elemen yang berorientasi secara tepat untuk bejana-bejana tekan silindris dan sferis dapat dilihat masing-masing dalam Gambar-gambar 9-8(a) dan 9-9(a).



Gambar 9-10 Sebuah elemen bejana tekan dinding tipis ditinjau dalam status tegangan biaksial (sumbu ganda)



Gambar 9-11 Garis putus-putus memperlihatkan kecenderungan silinder untuk mengembangkan akibat pengaruh tekanan dalam (gambar melebihi ukuran yang sesungguhnya), sedang ujung-ujung mengembang dengan besar yang berbeda

Untuk tekanan dalam, diameter dan tebal dinding yang sama, tegangan maksimum dalam bejana sferis hampir seperdua tegangan maksimum yang terdapat dalam bejana silindris. Perhatikan pula bahwa lingkaran tegangan Mohr untuk tegangan utama dalam bejana sferis berubah menjadi satu titik. Ini berarti bahwa tanpa memperhatikan kemiringan bidang dalam elemen yang diselidiki, tegangan normal masih tetap konstan dan tidak terdapat tegangan geser.\* Kesimpulan yang sama kita capai dengan membuat

\* Dengan melihat pada elemen kecil takberhingga dari *pinggir sebelah atas*, kita memperoleh orientasi baru dari elemen tersebut. Untuk orientasi baru ini, tegangan geser maksimum sebesar  $\sigma_1/2$  dapat kita lihat terjadi dalam bahan tersebut.



bidang pemotongan yang tertentu melalui titik pusat bola, seperti dilakukan dalam Gambar 9-9(c).

Diskontinuitas aksi membran terdapat pada titik waktu bagian silindris bejana tekan dengan ujung-ujungnya. Di bawah aksi tekanan dalam, silinder tersebut cenderung untuk memuai, seperti ditunjukkan oleh garis putus-putus dalam Gambar 9-11, sedang ujung-ujung memuai dengan besar yang berbeda, sesuai dengan tegangan yang berbeda. Deformasi yang tidak sama ini mengakibatkan terjadinya tegangan-tegangan lentur dan geser setempat di sekitar sambungan, karena antara ujung dan dinding silinder harus terdapat kontinuitas fisis. Karena pertimbangan ini pada bejana tekan dibuat ujung-ujung yang melengkung secara layak. Ujung yang datar tidak dikehendaki.\*

Kebanyakan bejana tekan dibuat dari sambungan lembaran-lembaran melengkung yang terpisah. Suatu metoda untuk menyelesaikan hal ini adalah dengan melakukan pengelasan busur api antara dua bahan seperti yang terlihat dalam Gambar 9-12. Alur ke dalam mana logam pengelasan akan ditanamkan disiapkan dengan berbagai cara, tergantung dari tebal pelat. Yang dinamakan sambungan temu bentuk *V*-tunggal dapat dilihat dalam Gambar 9-12. Jenis lain dari las temu dipergunakan pula. Tata nama dari las tersebut tergantung kepada pembuatan alur. Umpamanya, bila alur-*V* dibuat pada kedua sisi, seperti kita lakukan pada pelat yang tebal, maka las tersebut dinamakan sambungan temu-*V* ganda. Nama-nama lain adalah sambungan temu kerucut tunggal, sambungan temu kerucut ganda, sambungan temu berbentuk-*U*<sub>1</sub> tunggal dan seterusnya. Perhitungan untuk las tersebut dibuat dengan menentukan tegangan tarik ijin pada las tersebut, yang kita anggap mempunyai *kedalaman yang sama dengan tebal pelat*. Tegangan ijin biasanya dinyatakan sebagai persentase tertentu dari kekuatan pelat padat asal dari bahan induk. Faktor persentase sangat bervariasi, tergantung kepada pengerjaannya. Untuk pekerjaan yang biasa, kita dapat menggunakan pengurangan 20% dari tegangan ijin untuk pengelasan tersebut dibandingkan dengan pelat padat. Untuk faktor ini daya guna (efisiensi) sambungan tersebut dikatakan sebagai 80%. Pada pekerjaan dengan derajat mutu yang tinggi, beberapa persyaratan memperbolehkan daya guna 100% untuk sambungan las.



Gambar 9-12 Sambungan temu berbentuk *V*-tunggal

Sebagai kesimpulan perlu ditekankan bahwa rumus-rumus yang diturunkan untuk bejana tekan ber dinding tipis dalam pasal yang lalu haruslah dipergunakan hanya untuk kasus *tekanan dalam*. Bila sebuah bejana dirancang untuk tekanan luar, seperti untuk tangki hampa atau kapal selam, maka ketidak stabilan (penekukan) dinding dapat terjadi, hingga perhitungan yang didasarkan kepada rumus-rumus di atas tidak akan berarti.

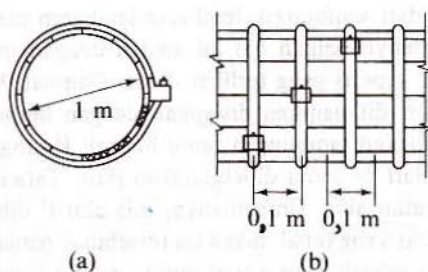
Penggunaan Persamaan 9-2, 9-3 dan 9-3a adalah sangat langsung hingga tidak perlu dilukiskan contoh-contoh untuk pemecahan. Tetapi suatu metoda analisis yang serupa

\* Buku peraturan Bejana Tekan Tahan Api ASME (ASME Unfired Pressure Vessel Code) memberikan keterangan praktis mengenai disain ujung-ujung; sedang teori yang diperlukan di luar jangkauan buku ini. Meskipun ada pembatasan ini, rumus-rumus dasar yang dikembangkan di sini untuk silinder ber dinding tipis adalah cocok untuk kebanyakan kasus.

yang bermanfaat untuk soal yang berhubungan dengan di atas, akan kita bahas sekarang.

#### CONTOH 9-4

Tentukanlah tekanan  $p$  yang dapat dimuati oleh pipa papan kayu yang terlihat dalam Gambar 9-13. Anggaplah bahwa papan kayu tersebut berukuran yang memadai untuk membentangi antara gelang baja bulat 10 mm dengan ujung-ujung yang menyembul† yang berjarak 0,1 m antara sesamanya. Anggaplah tegangan ijin dalam gelang baja adalah 165 MPa dan abaikanlah pengaruh perusakan kayu oleh gelang tersebut.



Gambar 9-13

#### PENYELESAIAN

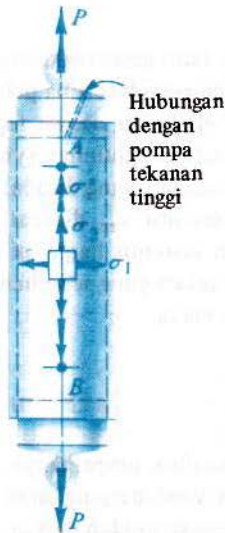
Persoalan ini dapat kita telaah dengan cara yang sama seperti yang terdapat pada bejana tekan silindris. Berhubung gelang-gelang berjarak 0,1 m antara sesamanya, maka masing-masing gelang memberikan perlawanan terhadap gaya yang terbentuk oleh tekanan sepanjang sepersepuluh meter linier pipa, Gambar 9-13(b). Kemudian, dengan meninjau sebuah segmen dari pipa tersebut yang panjangnya 0,1 m serupa dengan yang kita lihat dalam Gambar 9-8(b), maka gaya dalam yang cenderung untuk memecahkan pipa dalam jarak ini adalah  $2r_i L p = 2(0,5)0,1p = 0,1p$  N. Gaya ini mendapat perlawanan dari dua daerah penampang gelang. Luas setiap gelang berdiameter 10 mm tersebut adalah  $78,5 \text{ mm}^2 = 78,5 \times 10^{-6} \text{ m}^2$ ; jadi baik untuk  $(78,5 \times 10^{-6})(165 \times 10^6) = 12.950$  N. Dengan menyamakan gaya pemecahan tersebut dengan kedua gaya perlawanan dalam gelang, maka kita peroleh tekanan ijin dalam pipa, yaitu,  $0,1p = 2(12.950)$  hingga  $p = 259.000 \text{ Pa} = 259 \text{ kPa}$ .

#### 9-7 TEORI KEGAGALAN: CATATAN PENDAHULUAN

Kebanyakan keterangan mengenai ketangguhan dan kerusakan bahan terhadap perlakuan gaya-gaya aksial ganda datang dari percobaan-percobaan pada silinder berdinding tipis. Suatu susunan tertentu untuk percobaan-percobaan seperti ini terlihat dalam Gambar 9-14. Ujung-ujung silinder berdinding tipis dari bahan yang sedang diselidiki ini ditutup dengan penutup yang kuat. Ini membentuk bejana tekan silindris yang berongga dalam. Dengan menekan ruang yang ada sampai mencapai titik luluh atau titik pecah,

† Diameter batang pada ujung-ujung menjadi besar oleh tempaan, yakni "menyembul" (upset) dengan maksud menjaga diameter batang nominal pada garis ulir.





Gambar 9-14 Susunan percobaan untuk memperoleh perbandingan terkendali antara tegangan-tegangan utama.

maka elemen dinding mendapatkan tegangan sumbu ganda dengan suatu perbandingan tetap  $\sigma_1/\sigma_2 = 2$ . Dengan menggunakan gaya tarik tambahan  $P$  pada penutup, maka tegangan  $\sigma_2$  akan naik menjadi harga yang dapat ditentukan lebih dahulu  $\sigma_2 + \sigma''$ . Dengan menggunakan gaya tekan, tegangan  $\sigma_2$  dapat pula dikurangi atau dihilangkan. Tegangan tekan yang sebenarnya dalam arah yang membujur tidak kita kehendaki, karena tabung tersebut dapat pecah. Dengan menjaga agar perbandingan antara tegangan-tegangan utama menjadi tetap sebelum mencapai titik kegagalan, maka kita akan memperoleh data yang kita inginkan pada suatu bahan. Percobaan-percobaan yang serupa dapat pula kita gunakan dengan tabung yang secara bersamaan mendapat momen puntir, gaya aksial dan tekanan. Suatu penafsiran data-data ini, bersama semua bukti percobaan lain yang berhubungan, termasuk pengujian-pengujian tarik sederhana, membolehkan kita merumuskan teori-teori kegagalan untuk berbagai bahan yang mendapat tegangan gabungan.

Sayang sekali, pada waktu ini kriteria kuantitatif terhadap ketangguhan atau keretakan bahan yang dipengaruhi oleh status tegangan multiaksial belumlah sempurna. Beberapa pertanyaan masih belum terjawab dan merupakan bagian cuplikan yang giat dari penelitian bahan-bahan. Di samping belum ada jawaban yang lengkap yang dapat diberikan oleh salah satu teori, muncullah beberapa teori kegagalan atau kekuatan yang berlaku untuk kelompok-kelompok bahan tertentu. Pertama-tama kita akan membahas dua kriteria yang diterima secara luas untuk mengetahui sifat tak elastis bahan-bahan liat di bawah tegangan gabungan. Kemudian ini akan diikuti dengan mengemukakan kriteria keretakan untuk bahan-bahan rapuh. Harus kita perhatikan bahwa dalam pengelompokan bahan-bahan dengan cara ini, sesungguhnya kita membahas keadaan rapuh atau liat dari bahan, karena sifat ini sangat dipengaruhi baik oleh suhu maupun status tegangan itu sendiri. Jawaban yang lebih lengkap terhadap pertanyaan seperti ini adalah di luar jangkauan buku ini.

## 9-8 TEORI TEGANGAN GESER MAKSIMUM

Teori tegangan geser maksimum,\* atau secara sederhana teori geser maksimum merupakan hasil pengamatan yang dalam bahan yang liat, gelincir terjadi selama peluluhan sepanjang bidang yang berorientasi secara kritis. Ini memberi kesan bahwa tegangan geser maksimum memainkan peranan kunci dan dianggap bahwa peluluhan (yielding) bahan tersebut tergantung hanya kepada tegangan geser maksimum yang dicapai dalam sebuah elemen. Karena itu, sewaktu-waktu harga kritis tertentu  $\tau_{cr}$  dicapai, maka peluluhan dalam suatu elemen mulai terjadi.† Untuk bahan tertentu harga ini dibuat sama dengan tegangan geser luluh dalam pengaruh tarik atau tekan yang sederhana. Jadi menurut Persamaan 8-6, bila  $\sigma_x = \pm \sigma_1 \neq 0$ , dan  $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ , maka

$$\tau_{max} \equiv \tau_{cr} = \left| \pm \frac{\sigma_1}{2} \right| = \frac{\sigma_{yp}}{2} \quad (9-4)$$

yang berarti bahwa bila  $\sigma_{yp}$  yaitu tegangan titik luluh kita peroleh, umpamanya, dalam pengujian tarik sederhana, maka tegangan geser maksimum yang bersangkutan besarnya adalah setengah. Kesimpulan ini dapat pula kita ambil dengan mudah dari lingkaran tegangan Mohr.

Untuk menggunakan kriteria tegangan geser maksimum pada suatu status tegangan sumbu ganda tertentu, mula-mula haruslah kita tentukan lebih dahulu tegangan geser maksimum tersebut kemudian barulah kita samakan dengan  $\tau_{max}$  yang diberikan oleh Persamaan 9-4. Dengan menyatakan tegangan geser maksimum untuk status tegangan yang diberikan dalam bentuk tegangan utama, kemudian menghapuskan angka 2 yang terdapat pada penyebut, maka kita sampai kepada kriteria luluh yang berikut :

$$|\sigma_1| \leq \sigma_{yp} \quad \text{dan} \quad |\sigma_2| \leq \sigma_{yp} \quad (9-5)$$

$$\text{dan} \quad |\sigma_1 - \sigma_2| \leq \sigma_{yp} \quad (9-6)$$

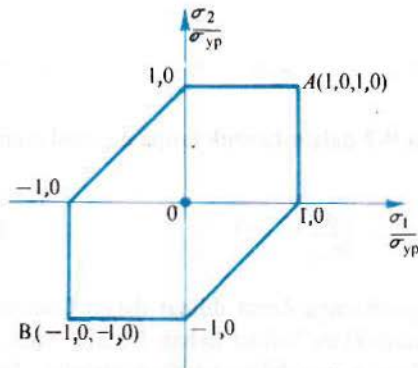
Persamaan 9-5 berlaku hanya bila  $\sigma_1$  dan  $\sigma_2$  mempunyai *tanda yang sama*, sedang Persamaan 9-6 berlaku hanya bila  $\sigma_1$  dan  $\sigma_2$  mempunyai *tanda yang berlawanan*. Dalam kasus sumbu ganda, bila tegangan-tegangan utama mempunyai tanda yang sama, maka tegangan geser maksimum diperoleh dengan meninjau elemen sepanjang sumbu tegangan yang lebih kecil (lihat Gambar 8-13); untuk tegangan-tegangan utama yang berlawanan tanda, maka tegangan geser yang terbesar diberikan oleh  $(\sigma_1 - \sigma_2)/2$ .

Untuk peluluhan mendatang ketidaksamaan Persamaan-persamaan 9-5 dan 9-6 haruslah diganti dengan kesamaan. Dengan meninjau  $\sigma_1$  dan  $\sigma_2$  sebagai koordinat

\* Teori ini muncul mula-mula atas usul C.A. Coulomb dalam tahun 1773. Dalam tahun 1868 H. Tresca mengemukakan hasil karyanya mengenai arus logam di bawah pengaruh tekanan tinggi di depan Akademi Perancis. Sekarang teori ini acap kali membuat namanya.

† Dalam kristal-kristal tunggal gelincir terjadi disepanjang bidang yang dipilih dan arah yang dipilih pula. Dalam mempelajari gejala ini komponen efektif tegangan geser menyebabkan gelincir harus ditentukan secara hati-hati. Di sini kita anggap bahwa karena orientasi banyak kristal adalah sembarang maka bahan tersebut mempunyai sifat isotropik, hingga dengan menentukan  $\tau_{max}$  kita memperoleh tegangan geser kritis.





Gambar 9-15 Kriteria luluh berdasarkan keadaan tegangan geser maksimum

sebuah titik dalam ruangan tegangan  $\sigma_1$ - $\sigma_2$ , maka persamaan-persamaan ini menentukan pembatasan segienam dari Gambar 9-15. Tegangan yang berada dalam segienam ini menunjukkan tidak ada peluluhan bahan yang terjadi, yaitu bahan tersebut bersifat elastis. Status tegangan yang berhubungan dengan titik-titik yang terdapat pada segienam memperlihatkan bahwa bahan tersebut dalam keadaan meluluh. Tidak ada titik-titik yang terdapat di luar segienam.

Perhatikan bahwa menurut teori geser maksimum, bila ditambahkan tegangan-tegangan tarik atau tekan hidrostatik, yakni tegangan seperti  $\sigma'_1 = \sigma'_2 = \sigma'_3$ , maka diperkirakan tidak ada perubahan tanggapan dari bahan itu. Penambahan tegangan-tegangan ini hanyalah menggeser lingkaran tegangan Mohr, seperti dalam Gambar 8-13 sepanjang sumbu  $\sigma$  sedang  $\tau_{\max}$  tetap sama. Hal ini akan kita ulas lebih lanjut dalam pasal yang berikut.

Kriteria luluh yang baru acapkali kita turunkan disebut sebagai *syarat luluh Tresca* dan merupakan salah satu hukum plastisitas yang banyak dipergunakan.

## 9-9 TEORI DISTORSI ENERGI MAKSIMUM

Kriteria lain mengenai peluluhan bahan-bahan liat yang isotropik yang diterima secara luas ialah yang berdasarkan konsep energi.\* Dalam pendekatan ini energi elastis total dibagi ke dalam dua bagian: satu yang berhubungan dengan perubahan volumetrik bahan sedang yang lain yang menyebabkan distorsi (gangguan) geser. Dengan menyamakan energi distorsi geser pada titik luluh dalam pengaruh tegangan tarik sederhana dengan yang di bawah pengaruh tegangan gabungan, kita dapat membuat kriteria luluh untuk tegangan gabungan.

Kita dapat melihat† bahwa syarat luluh untuk bahan plastis secara ideal di bawah status tegangan triaksial dapat kita peroleh dalam bentuk-bentuk tegangan utama

\* Usaha pertama untuk menggunakan energi total sebagai kriteria peluluhan dibuat oleh E. Beltrami dari Italia dalam tahun 1885. Dalam bentuk yang sekarang teori tersebut diajukan oleh M.T. Huber dari Polandia dalam tahun 1904 dan dikembangkan lebih lanjut dan diterangkan oleh R. von Mises (1913) dan H. Hencky (1925), keduanya dari Jerman dan Amerika Serikat.

† Lihat, umpamanya E. P. Popov, *Introduction to Mechanics of Solids*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1968.

sebagai

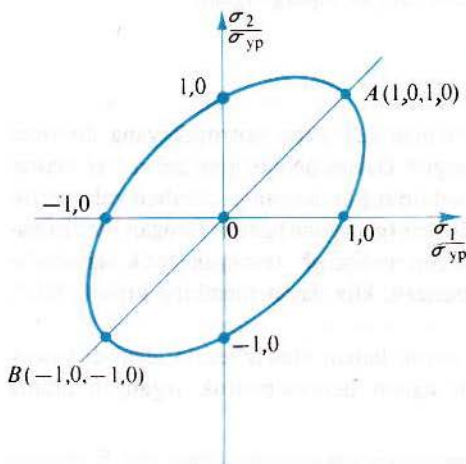
$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_{yp}^2 \quad (9-7)$$

Untuk tegangan bidang  $\sigma_3 = 0$ , maka Persamaan 9-7 dalam bentuk tanpa dimensi menjadi

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{yp}}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{yp}} \frac{\sigma_2}{\sigma_{yp}}\right) + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{yp}}\right)^2 = 1 \quad (9-8)$$

Ini merupakan persamaan sebuah ellips, yang gambarnya dapat dilihat dalam Gambar 9-16. Tegangan yang terletak dalam ellips menunjukkan bahwa bahan bersifat secara kenyal. Titik-titik pada ellips menunjukkan bahwa bahan dalam keadaan meluluh. Ini merupakan penafsiran yang sama dengan yang diberikan sebelumnya untuk Gambar 9-15. Pada keadaan tanpa pembebanan, bahan tersebut bersifat secara elastis,

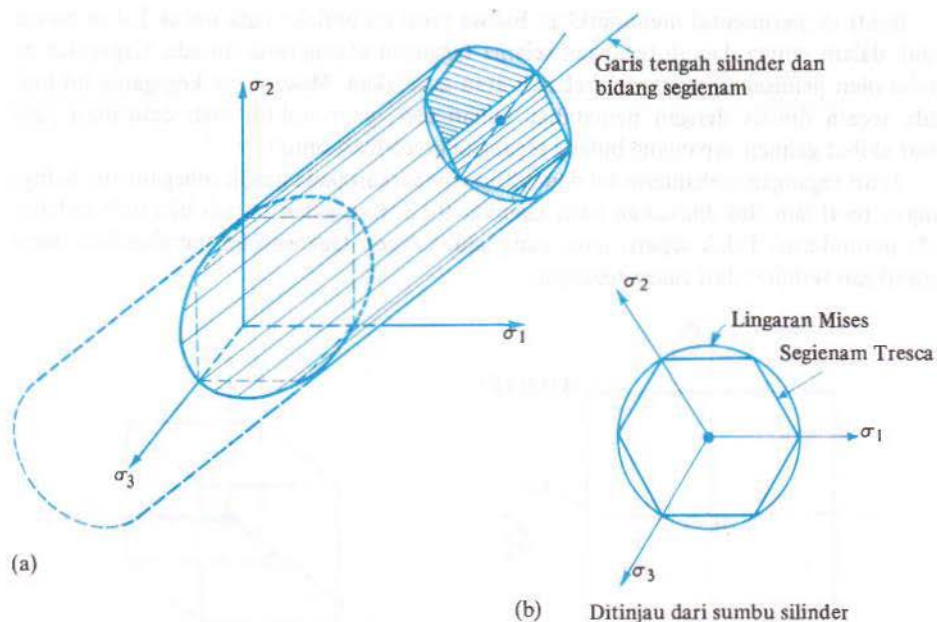
Adalah penting untuk diperhatikan bahwa teori ini tidak memperkirakan perubahan tanggapan bahan tersebut bila ditambahkan tegangan-tegangan tarik atau tekan hidros-tatik. Ini melihat kenyataan bahwa berhubung hanya perbedaan tegangan yang ter-sangkut dalam Persamaan 9-7, maka penambahan tegangan konstan masing-masing tidak mempengaruhi syarat luluh. Untuk alasan inilah dalam ruang tegangan tiga dimensi, permukaan luluh menjadi berbentuk silinder di mana kosinus sudut antara ketiga arah dengan sumbunya adalah sama dengan  $1/\sqrt{3}$ . Silinder yang demikian dapat dilihat dalam Gambar 9-17. Ellips dalam Gambar 9-16 hanyalah merupakan perpotongan antara silinder dengan bidang  $\sigma_1$ - $\sigma_2$ . Kita dapat pula melihat bahwa permukaan luluh untuk kriteria tegangan geser maksimum adalah sebuah segienam yang sesuai dimasukkan ke dalam tabung seperti pada Gambar 9-17.



Gambar 9-16 Kriteria luluh yang berdasarkan kepada energi distorsi maksimum

Syarat luluh yang diungkapkan oleh Persamaan 9-7 dapat dilihat sebagai invarian tegangan yang lain. Ini juga merupakan suatu fungsi yang kontinu. Gambaran ini membuat penggunaan dari hukum peluluhan plastis ini untuk tegangan gabungan sangat

$yp$  = yield point = titik luluh = titik leleh



Gambar 9-17 Permukaan luluh untuk status tegangan tiga-dimensional

menarik dari sudut pandangan teoretis. Hukum yang luas penggunaannya ini acap kali disebut sebagai syarat luluh *Huber-Hencky-Mises* atau singkatnya *syarat luluh von Mises*.\*

## 9-10 TEORI TEGANGAN NORMAL MAKSIMUM

Teori tegangan normal maksimum atau singkatnya teori tegangan maksimum† menegaskan bahwa terjadinya kegagalan atau keretakan suatu bahan apabila tegangan normal maksimum pada suatu titik mencapai suatu harga kritis tanpa meninjau tegangan yang lain. Untuk memberlakukan kriteria kita hanya harus menentukan tegangan utama terbesar saja. Harga tegangan kritis  $\sigma_{ult}$  biasanya ditentukan dalam percobaan tarik, di mana kegagalan suatu contoh ditentukan baik oleh pemuatan panjang yang berlebihan besarnya maupun keretakan. Biasanya yang belakangan ini yang dilakukan.

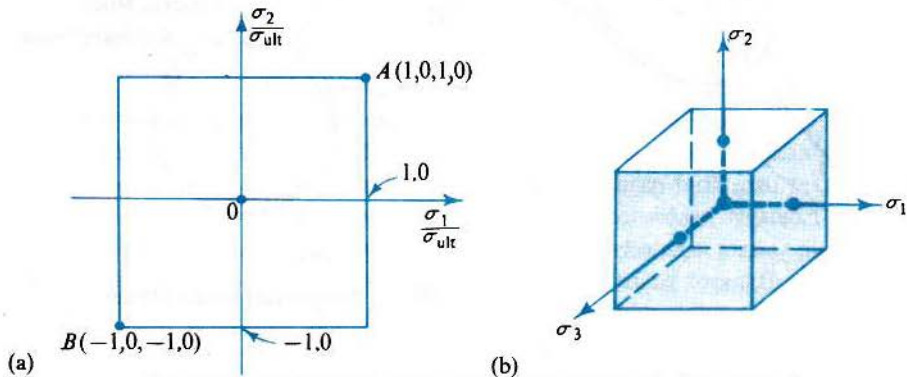
\* Pada waktu yang lalu syarat ini sering juga disebut sebagai *teori tegangan geser oktahedron*. Lihat A. Nadai, *Theory of Flow and Fracture of Solids*, New York: Mc. Graw-Hill, 1950, hal. 104, atau F. B. Seely and J. O. Smith, *Advanced Mechanics of Materials* (2nd ed.), New York: Wiley, 1952, hal. 61.

† Teori ini umumnya merupakan hasil karya W.J.M. Rankine, seorang pendidik terkenal bangsa Inggris (1820–72). Suatu teori yang serupa yang didasarkan kepada tegangan maksimum, daripada tegangan, yang merupakan kriteria dasar dari kegagalan yang diusulkan oleh ahli elastisitas yang besar bangsa Perancis, B. de Saint Venant (1797–1886). Bukti eksperimental tidak menguatkan pendekatan yang terakhir.



Bukti eksperimental menunjukkan bahwa teori ini berlaku baik untuk bahan-bahan rapuh dalam semua daerah tegangan selama tegangan utama tarik itu ada. Kegagalan ditandai oleh pemisahan, atau pembelahan atau keretakan. Mekanisme kegagalan ini berbeda secara drastis dengan pematahan bahan ulet, yang diikuti oleh deformasi yang besar akibat gelincir sepanjang bidang tegangan geser maksimum.

Teori tegangan maksimum ini dapat kita gambarkan pada grafik sebagaimana halnya dengan teori lain. Ini dilakukan pada Gambar 9-18. Kegagalan terjadi bila titik terletak pada permukaan. Tidak seperti teori yang lalu, kriteria tegangan ini memberikan suatu permukaan terbatas dari ruang tegangan.



Gambar 9-18 Selubung patahan berdasarkan kriteria tegangan maksimum

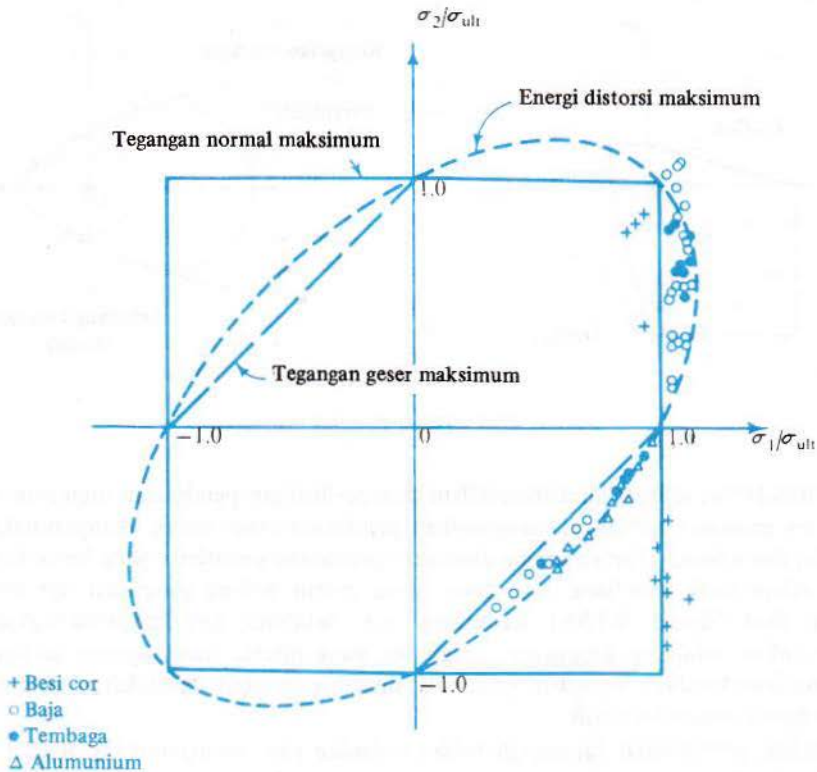
### 9-11 PERBANDINGAN TEORI; TEORI-TEORI LAIN

Perbandingan beberapa hasil percobaan klasik dengan teori kelulutan dan kepatahan yang dikemukakan di atas dapat dilihat dalam Gambar 9-19.\* Terutama perhatikanlah kesesuaian yang baik antara teori energi distorsi maksimum dan hasil-hasil eksperimental untuk bahan-bahan liat. Tetapi teori tegangan normal maksimum muncul paling baik untuk bahan-bahan rapuh dan dapat membahayakan bagi bahan-bahan liat.

Semua teori untuk tegangan uniaksial (sumbu tunggal) cocok dengan di atas, karena pengujian tarik sederhana merupakan standar perbandingan. Karena itu bila salah satu tegangan utama pada sebuah titik lebih besar dibandingkan dengan yang lainnya, maka semua teori memberikan hasil yang secara praktis sama. Perbedaan antara teori-teori tersebut paling besar dalam kuadran kedua dan keempat, di mana kedua tegangan utama secara numerik adalah sama.

Dalam mengembangkan teori yang dibahas di atas kita menganggap bahwa sifat bahan yang berada di dalam tarik dan tekan adalah serupa artinya plot yang tampak dalam beberapa gambar terdahulu mempunyai dua sumbu simetri. Pada pihak lain, kita ketahui bahwa beberapa bahan seperti batu, besi cor, beton dan tanah mempunyai

\* Titik-titik eksperimental yang terlihat pada gambar ini didasarkan kepada percobaan-percobaan klasik oleh beberapa penyelidik. Gambar tersebut diambil dari himpunan yang dibuat oleh G. Murphy, *Advanced Mechanics of Materials*, New York: McGraw-Hill, 1964, hal. 83.

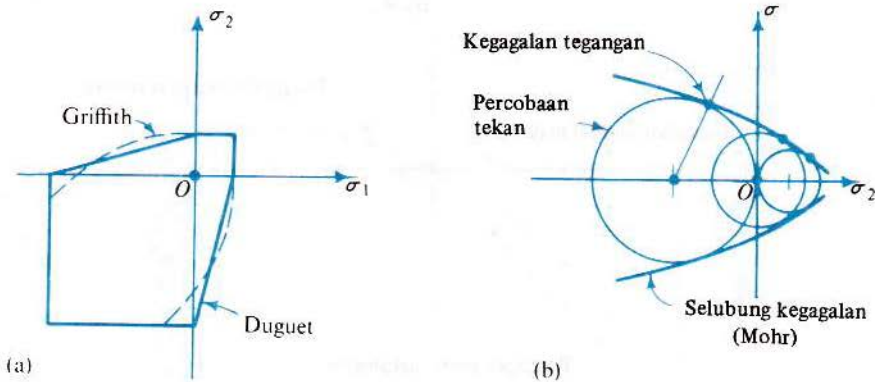


Gambar 9-19 Perbandingan kriteria luluh dan patah dengan data pengujian

sifat-sifat yang berbeda secara radikal tergantung dari sikap tegangan yang diberikan. Perbaikan paling dahulu terhadap teori geser maksimum oleh C. Duguet dalam tahun 1885 untuk mencapai persesuaian dengan percobaan terlihat dalam Gambar 9-20(a). Perbaikan ini memperkenalkan kekuatan tinggi beberapa bahan bila diberi tekanan sumbu ganda. A. A. Griffith,\* dalam satu pengertian, memperbaiki penjelasan mengenai pengamatan di atas dengan memperkenalkan pemikiran mengenai energi permukaan pada retak mikroskopis dan memperlihatkan kesungguhan yang lebih besar dari tegangan tarik dibanding tegangan tekan berkenaan dengan kegagalan. Menurut teori ini keretakan yang ada akan merambat dengan cepat bila kecepatan rata-rata pembebasan energi regangan kenyal yang ada lebih besar dari kenaikan energi permukaan keretakan. Konsep Griffith yang asli telah diperluas oleh G. R. Irwin.†

\* A. A. Griffith, "The Phenomena of Rupture and Flow of Solids," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A*, 1920, vol. 221, hal. 163–98.

† G. R. Irwin, "Fracture Mechanics," *Proceedings, First Symposium on Naval Structural Mechanics*, Long Island City, N.Y.: Pergamon Press, 1958, hal. 557. Lihat juga, *A Symposium on Fracture Toughness Testing and Its Applications*, American Society for Testing and Materials Special Technical Publication No. 381, American Society for Testing and Materials and National Aeronautics and Space Administration, 1965.



Gambar 9-20 Kriteria kemungkinan retak

Otto Mohr, sebagai tambahan dalam memperlihatkan pembuatan lingkaran tegangan yang memakai namanya, mengusulkan pendekatan lain untuk memperkirakan kegagalan suatu bahan. Pertama-tama dilakukan percobaan-percobaan yang berbeda seperti satu dalam tarik sederhana, satu dalam geser murni, sedang yang satu lagi mengenai tekan; lihat Gambar 9-20(b). Kemudian suatu selubung dari lingkaran-lingkaran ini menentukan selubung kegagalan. Lingkaran yang ditarik menyinggung selubung ini memberikan keadaan kegagalan pada titik singgung tersebut. Pendekatan ini sangat disukai dalam mekanika tanah.

Selain mempelajari tanggapan bahan terhadap plot tegangan-ruang seperti dalam Gambar 9-20, maka invarian tegangan ( $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ ) dan tegangan yang diberikan oleh Persamaan 9-7 dapat kita gunakan sebagai sumbu-sumbu koordinat. Kriteria retak yang berfaedah telah kita buat dari pembahasan-pembahasan yang berdasarkan kepada pendekatan ini.\*

Kadang-kadang kriteria luluh dan patah yang kita bahas di atas tidak menyenangkan untuk digunakan. Dalam hal-hal seperti itu, kurva interaksi seperti dalam Gambar 7-6 dapat kita gunakan sebaik-baiknya. Kurva jenis ini yang ditentukan secara eksperimental, kecuali dipersukar oleh gejala setempat ataupun tekukan, adalah setara dengan kriteria kekuatan yang dibicarakan di sini.

Dalam disain batang dalam bab yang berikut, kita akan mulai melakukan kebiasaan untuk mematuhi benar kriteria luluh dan patah yang dibuat di sini, meskipun kita tidak meragukan lagi bahwa teori ini memberi dasar yang rasional untuk disain.

#### SOAL-SOAL UNTUK DISELESAIKAN

9-1. Sebuah batang baja berpenampang bujur-sangkar 50 mm mendapat gaya tarik aksial. Bila tegangan geser maksimum yang disebabkan oleh

gaya ini adalah  $80.000 \text{ kN/m}^2$ , berapakah besar gaya terpakai?

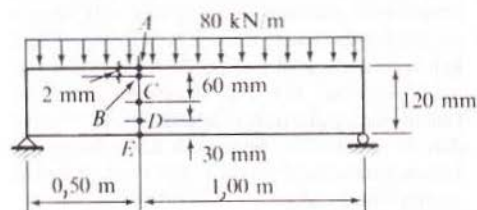
\* B. Bresler and K. Pister, "Failure of Plain Concrete Under Combined Stresses," *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 1957, vol. 122, hal. 1049.



9-2. Sebuah silinder beton yang diuji dalam kedudukan tegak mengalami kegagalan pada tegangan tekan sebesar 30 MPa. Kegagalan tersebut terjadi pada bidang  $30^\circ$  dengan sumbu tegak. Pada sketsa yang jelas perlihatkanlah tegangan-tegangan normal dan geser yang bekerja pada bidang kegagalan tersebut. *Jawab:*  $\tau = 13,0 \text{ MN/m}^2$ .

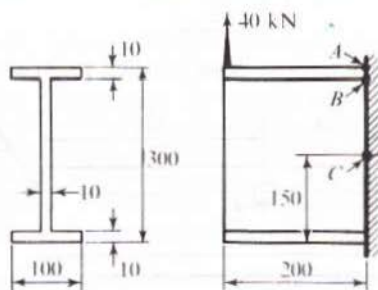
9-3. Sebuah tiang kayu  $50 \times 100 \text{ mm}$  mempunyai urat kayu yang mengarah dengan sudut  $25^\circ$  dengan sumbunya. Bila untuk kayu ini tegangan geser ijin yang arahnya sejajar dengan urat adalah  $600 \text{ kN/m}^2$ , berapakah gaya aksial ijin untuk tiang ini yang dikendalikan oleh tegangan geser? *Jawab:* 7,83 kN.

9-4. Sebuah balok sederhana lebar  $50 \times 120 \text{ mm}$  dan tinggi 1,50 m dan menumpu beban yang terdistribusi secara merata sebesar  $80 \text{ kN/m}$  termasuk beratnya sendiri. Tentukanlah tegangan-tegangan utama serta arah mereka pada titik-titik A, B, C, D, dan E pada irisan yang terlihat dalam gambar. *Jawab:*  $\sigma_C = \pm 5 \text{ MPa}$ .



GAMBAR SOAL 9 - 4

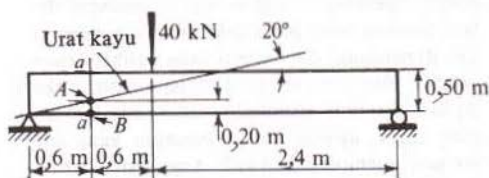
9-5. Sebuah kantilever balok-I yang sangat pendek dibebani seperti yang terlihat dalam gambar. Tentukanlah tegangan-tegangan utama serta arah mereka pada titik-titik A, B, dan C. Titik B terletak dalam badan pada sambungan dengan flens. Abaikanlah berat balok dan abai-



GAMBAR SOAL 9 - 5

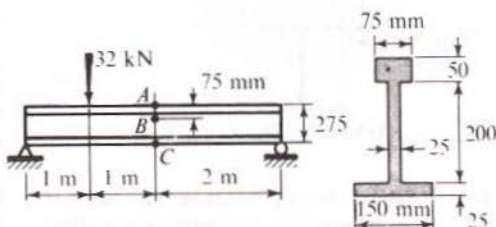
kan pula pengaruh dari konsentrasi tegangan. Momen inersia  $I$  terhadap sumbu netral untuk seluruh luas irisan adalah  $60 \times 10^6 \text{ mm}^4$ . Pergunakanlah rumus yang teliti untuk menentukan tegangan geser.

9-6. Sebuah balok kayu sikuempat  $100 \times 500 \text{ mm}$  menumpu beban  $40 \text{ kN}$  seperti yang terlihat dalam gambar. Pada irisan  $a-a$  urat kayu tersebut membuat sudut  $20^\circ$  dengan sumbu balok. Hitunglah tegangan geser sepanjang urat kayu pada titik-titik A dan B yang disebabkan oleh gaya terpusat terpakai. *Jawab:*  $\tau_A = 835 \text{ kN/m}^2$ .



GAMBAR SOAL 9 - 6

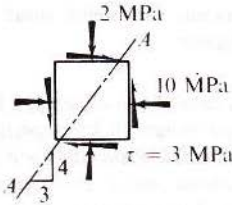
9-7. Sebuah balok besi cor dibebani seperti yang terlihat dalam gambar. Tentukanlah tegangan-tegangan utama pada ketiga titik A, B dan C yang disebabkan oleh gaya terpakai. Momen inersia dari daerah luas penampang terhadap sumbu netral adalah  $124 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .



GAMBAR SOAL 9 - 7

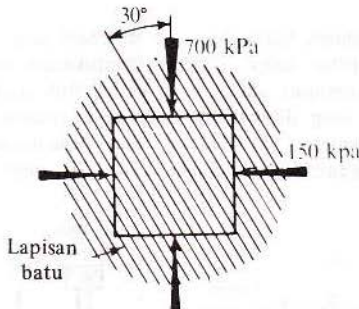
9-8. Pada sebuah titik tertentu dalam bangunan pertukangan kayu, status tegangan yang disebabkan oleh gaya-gaya terpakai akan terlihat dalam skets. Batu dari mana bangunan ini dibuat adalah berlapis dan geser sepanjang bidang yang sejajar dengan bidang A-A adalah lemah. Apakah status tegangan ini memperbolehkan? Anggaplah bahwa tegangan ijin dalam batu dalam setiap arah adalah 1,5 MPa dalam tarik dan 14 MPa dalam tekan dan bahwa tegangan

geser ijin yang sejajar dengan bidang  $A-A$  adalah 2,3 MPa.



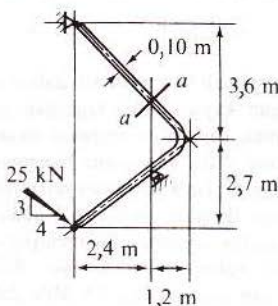
GAMBAR SOAL 9 – 8

9-9. Sesudah pemancangan sebuah bangunan berat, diperkirakan bahwa status tegangan dalam pondasi batu pada dasarnya akan bersifat dua dimensional dan seperti yang terlihat dalam gambar. Bila batu tersebut berlapis-lapis, maka lapisan tersebut membuat sudut  $30^\circ$  dengan garis tegak, apakah status tegangan yang memenuhi memperbolehkan? Anggaplah bahwa koefisien gesekan statis dari batu terhadap batu adalah 0,50, dan seluas bidang lapisan, kohesi adalah sebesar  $85 \text{ kN/m}^2$ .



GAMBAR SOAL 9 – 9

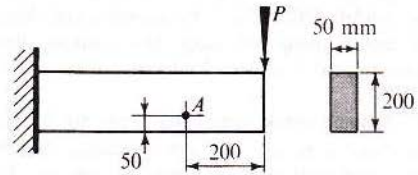
9-10. Sebuah batang bengkok bujursangkar 0,10 m mendapat beban seperti yang terlihat



GAMBAR SOAL 9 – 10

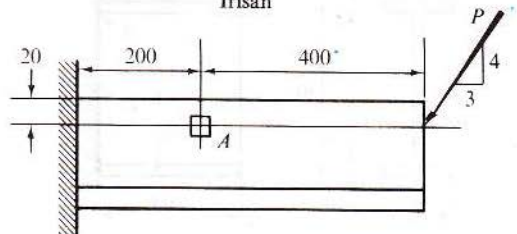
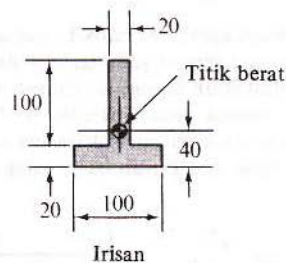
dalam gambar. Tentukanlah status tegangan pada titik yang terletak pada sumbu batang ini pada irisan  $a-a$  yang disebabkan oleh gaya miring terpakai. Perhatikanlah hasil-hasil tersebut pada elemen yang kecil takberhingga. Tegangan utama tidak diperlukan.

9-11. Tegangan geser maksimum pada titik  $A$  dalam balok, lihat gambar, adalah 900 kPa. Tentukanlah besar gaya  $P$ . Anggaplah balok tersebut tidak mempunyai berat.



GAMBAR SOAL 9 – 11

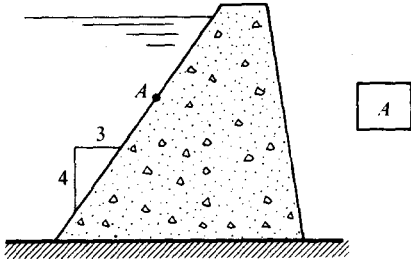
9-12. Konsol yang terlihat dalam gambar di-bebani oleh gaya terpusat  $P$ , yang menghasilkan tekan aksial dan lenturan, tapi tidak ada puntiran. (a) Buatlah suatu elemen yang memperlihatkan status tegangan pada titik  $A$  dalam bentuk gaya terpakai. (b) Bila regangan mendatar (membujur) pada titik  $A$  adalah  $2 \times 10^{-4} \text{ m/m}$  dan  $E = 200 \text{ GPa}$ , berapakah besar beban  $P$ ? Untuk batang ini  $I = 5,33 \times 10^6 \text{ mm}^4$  terhadap sumbu titik berat.



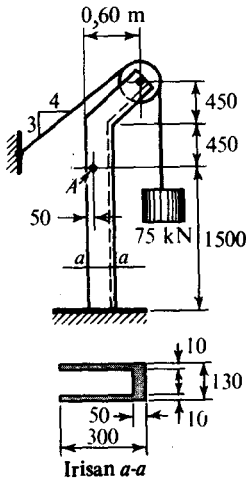
GAMBAR SOAL 9 – 12



9-13. Pada titik  $A$  pada permukaan sebelah hulu sebuah bendungan tekanan air adalah  $-2$  MPa. Suatu tegangan tekan terukur yang sejajar dengan permukaan adalah  $-3$  MPa. Hitunglah tegangan-tegangan  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  dan  $\tau_{xy}$  dan tunjukkanlah arah mereka dalam elemen yang terlihat dalam gambar. *Jawab:*  $\sigma_x = 2,36$  MPa.



GAMBAR SOAL 9 – 13

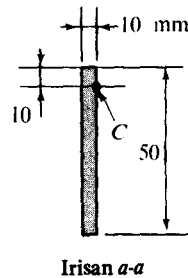
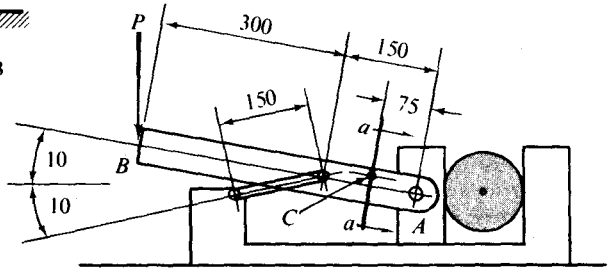


GAMBAR SOAL 9 – 14

9-14. Sebuah kerek khusus dibebani dengan beban 75 kN tergantung dengan kabel dapat dilihat dalam gambar. Tentukanlah status tegangan pada titik  $A$  yang disebabkan oleh beban ini. Perhatikanlah hasil-hasil tersebut pada elemen dengan permukaan-permukaan horisontal dan vertikal.  $I$  dari daerah irisan penampang sekitar sumbu netral adalah  $91 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .

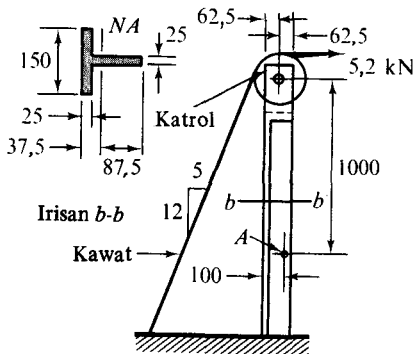
9-15. Dengan menggunakan gaya vertikal  $P$  jepitan berengsel yang seperti terlihat dalam gambar, mendesakkan gaya sebesar 5 kN pada ob-

jek berbentuk silinder. Penopang yang bergerak meluncur dalam sebuah penuntun yang menjaganya dapat bergerak ke atas. (a) Tentukanlah besar gaya vertikal terpakai  $P$ , dan komponen gaya ke bawah yang terbentuk pada engsel  $A$ , (b) tentukanlah tegangan-tegangan yang disebabkan oleh gaya topang aksial, geser lintang dan momen lentur yang bekerja pada sebuah elemen pada titik  $C$  dari irisan  $a-a$ , (c) gambarkan sebuah elemen pada titik  $C$  dengan sisi-sisi yang sejajar dan tegaklurus pada sumbu anggota  $BA$  dan perlihatkanlah tegangan-tegangan yang bekerja pada elemen tersebut, (d) dengan menggunakan lingkaran Mohr tentukanlah tegangan utama terbesar dan tegangan geser maksimum di titik  $C$ .


 Irisan  $a-a$ 

GAMBAR SOAL 9 – 15

9-16. Sebuah balok-T yang vertikal dibebani seperti yang terlihat dalam gambar. Hitunglah tegangan-tegangan normal dan geser yang bekerja pada sebuah elemen di titik  $A$  yang disebabkan oleh pembebanan terpakai. Buatlah skets elemen tersebut dan tunjukkan pada skets tersebut arah tegangan-tegangan yang dihitung. Luas penampang balok adalah  $6250 \text{ mm}^2$ , dan  $I$  sekitar sumbu netral adalah  $8,16 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .



GAMBAR SOAL 9 – 16

9-17. Sebuah batang pendek berdiameter 40 mm mendapatkan gaya aksial sebesar  $20\pi$  kN dan momen puntir sebesar  $0,2\pi$  kN.m. Tentukanlah tegangan-tegangan geser maksimum (utama), dan tunjukkanlah hasil-hasil tersebut pada elemen yang diorientasikan secara tepat.

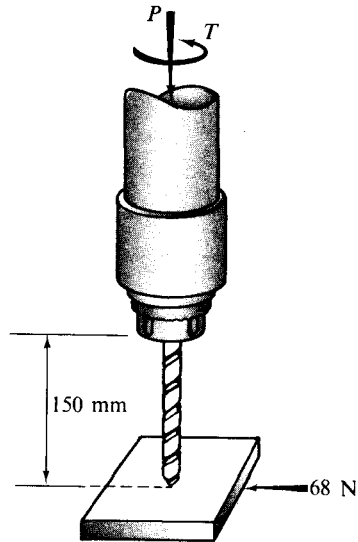
9-18. Sebuah poros berdiameter 40 mm mendapatkan gaya tarik aksial sebesar 40π kN. Berapakah momen puntir (torsi) yang dapat diberikan kepada poros ini sebagai tambahan pada gaya aksial ini tanpa melebihi tegangan geser maksimum (utama) yang besarnya 130 MPa?

9-19. Sebuah irisan dari poros berdiameter 40 mm secara bersamaan meneruskan momen puntir 314 N.m dan momen lentur 314 N.m. Tentukanlah besar tegangan geser utama.

\*9-20. Sebuah poros berdiameter 20 mm secara bersamaan mendapatkan momen puntir dan momen lentur murni. Diketahui bahwa pada setiap irisan poros tersebut, tegangan utama tarik terbesar yang disebabkan oleh pembebanan terpakai adalah 160 MPa, dan bahwa pada titik yang sama terjadi pula tegangan tarik yang terbesar yang disebabkan oleh lenturan, yang besarnya 120 MPa. Tentukanlah momen lentur terpakai dan momen puntir terpakai. *Jawab:*  $M = 30\pi$  N.m,  $T = 40\pi$  N.m.

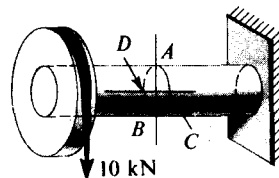
9-21. Sebuah mata gundi berdiameter 12 mm ( $A = 113 \text{ mm}^2$ ,  $I = 1020 \text{ mm}^4$ ,  $J = 2040 \text{ mm}^4$ ) dimasukkan ke dalam cekam seperti terlihat dalam gambar. Selama pengerjaan pengeboran suatu gaya aksial  $P = 6,78$  kN dan momen pun-

tir  $T = 27,2$  N.m bekerja pada mata gundi tersebut. Bila suatu gaya mendatar 68 N secara tidak sengaja bekerja pada pelat yang sedang dibor, berapakah besar tegangan utama terbesar yang terbentuk pada atas mata gundi? Tentukanlah titik tegangan kritis pada gundi dengan pemeriksaan. *Jawab:*  $-160$  MPa.



GAMBAR SOAL 9 – 21

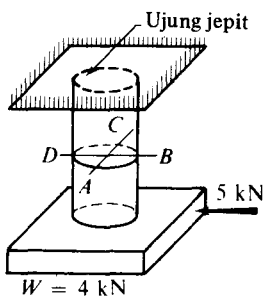
9-22. Sebuah poros melingkar padat diberi beban seperti yang terlihat dalam gambar. Pada irisan ABCD tegangan-tegangan yang disebabkan oleh gaya 10 kN, dan berat poros dan drum bundar diperoleh sebagai berikut: tegangan lentur maksimum adalah  $40 \text{ MN/m}^2$ , tegangan puntir maksimum  $30 \text{ MN/m}^2$ , dan tegangan geser maksimum yang disebabkan oleh  $V$  adalah  $6 \text{ MN/m}^2$ . (a) Buatlah elemen-elemen pada titik-titik A, B, C, dan D dan tunjukkanlah besar dan arah dari tegangan-tegangan yang bekerja pada elemen-elemen tersebut. Dalam masing-masing kasus, nyatakanlah arah dari mana elemen tersebut diamati. (b) Dengan mengguna-



GAMBAR SOAL 9 – 22

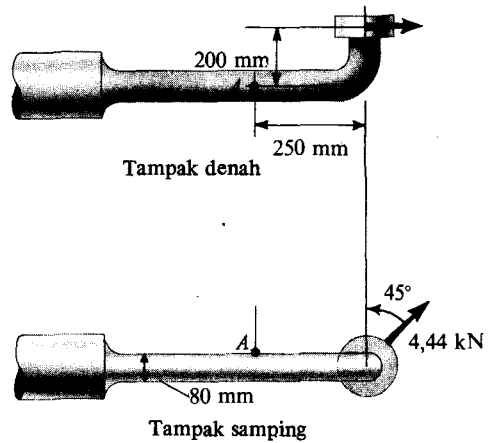
kan lingkaran Mohr, dapatkanlah arah dan besar tegangan-tegangan utama dan tegangan geser maksimum pada titik *A*. *Jawab:* (b)  $\tau = 36,1$  MPa.

9-23. Sebuah batang melingkar berdiameter 50 mm dengan blok sikuempat yang terpasang pada ujung bebasnya tergantung seperti yang terlihat dalam gambar. Juga sebuah gaya mendatar dilakukan secara eksentris pada blok tersebut seperti terlihat dalam gambar. Analisis tegangan pada irisan *ABCD* memberikan hasil-hasil yang berikut: tegangan lentur maksimum adalah 10 MPa, tegangan puntiran maksimum adalah 3 MPa, tegangan geser maksimum yang disebabkan oleh *V* adalah 4 MPa, sedang tegangan aksial langsung adalah 2 MPa. (a) Buatlah sebuah elemen pada titik *A* dan tunjukkanlah besar dan arah tegangan-tegangan yang bekerja padanya (sisi atas dari elemen haruslah berimpit dengan irisan *ABCD*). (b) Dengan menggunakan lingkaran Mohr, dapatkanlah arah dan besar tegangan geser maksimum (utama) dan tegangan normal yang bersangkutan pada titik *A*. *Jawab:* 1,41 MPa, +1 MPa,  $22\frac{1}{2}^\circ$ .



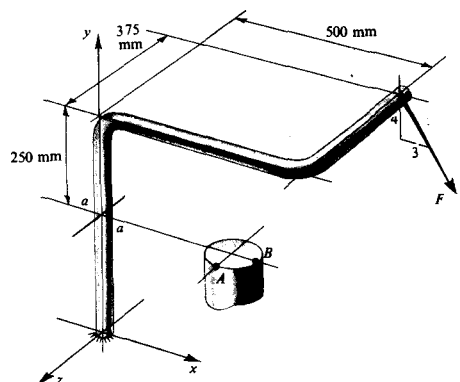
GAMBAR SOAL 9 – 23

9-24. Sebuah konsol mesin dibebani dengan gaya miring sebesar 4,44 kN seperti yang terlihat dalam gambar. Hitunglah tegangan-tegangan utama pada titik *A*. Perlihatkanlah hasil-hasil tersebut pada elemen yang berorientasi dengan tepat. Abaikanlah berat bagian struktur tersebut. *Jawab:*  $-17,3$  MPa.

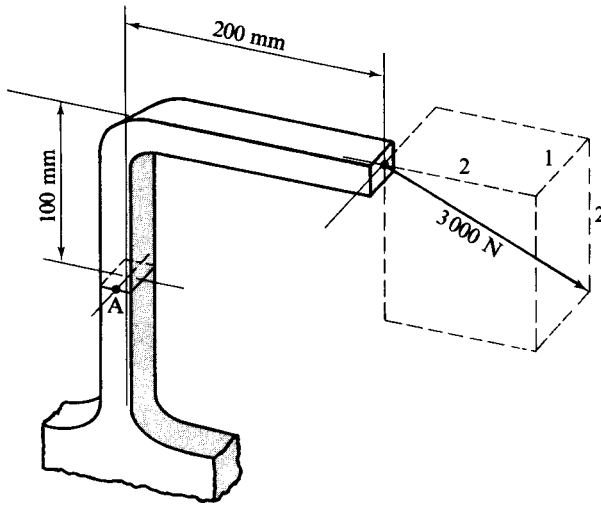


GAMBAR SOAL 9 – 24

9-25. Sebuah batang berdiameter 50 mm mendapatkan pada ujung bebasnya suatu gaya miring  $F = 225\pi$  N sebagai yang terlihat dalam gambar. (Gaya *F* dalam tampak denah bekerja dalam arah sumbu-*x*). Tentukanlah besar dan arah tegangan-tegangan yang disebabkan oleh *F* pada elemen-elemen *A* dan *B* pada irisan *a-a*. Perlihatkanlah hasil-hasil tersebut pada elemen-elemen yang jelas berhubungan dengan titik-titik pada batang. Tegangan utama tidak dibutuhkan.



GAMBAR SOAL 9 – 25

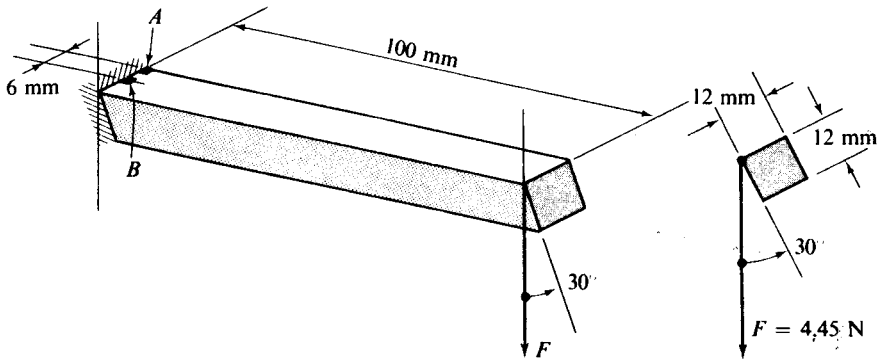


GAMBAR SOAL 9 – 26

9-26. Sebuah batang sikuempat bengkok mendapat suatu gaya miring sebesar 3000 N seperti yang terlihat dalam gambar. Penampang batang tersebut  $12 \times 12$  mm. (a) Tentukanlah status tegangan pada titik A yang disebabkan oleh gaya terpakai dan perhatikanlah hasil-hasil tersebut pada sebuah elemen. (b) Hitunglah tegangan utama maksimum. *Jawab:* (a) +333 MPa, 578 MPa.

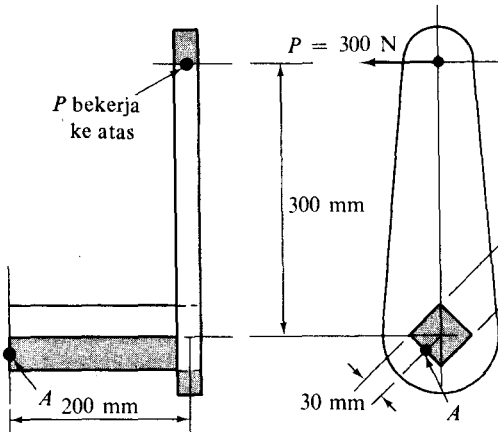
9-27. Sebuah batang sikuempat mendatar  $12 \times 12$  mm yang mempunyai panjang 100 mm dipasang pada sebuah ujungnya dengan sebuah

tumpuan kaku. Dua sisi batang yang berhadapan membuat sudut  $30^\circ$  dengan garis vertikal seperti yang terlihat dalam gambar. Dengan memakai suatu alat tambahan (tidak terlihat) gaya vertikal  $F = 4,45$  N diberikan bekerja melalui sebuah sudut batang. (Lihat gambar). Hitunglah tegangan pada titik-titik A dan B yang disebabkan oleh gaya terpakai  $F$ . Abaikanlah konsentrasi tegangan. Perhatikanlah hasil-hasil tersebut pada elemen-elemen dilihat dari atas. Transformasi tegangan untuk memperoleh tegangan utama tidak diperlukan.



GAMBAR SOAL 9 – 27

9-28. Sebuah batang berpenampang bujur-sangkar  $60 \times 60$  mm dipasang pada sebuah tumpuan kaku seperti yang terlihat dalam gambar. Hitunglah status tegangan pada titik  $A$  yang disebabkan oleh gaya terpakai  $P$  sebesar 300 N yang diberikan kepada engkol tersebut. Abaikanlah konsentrasi tegangan dan lihatlah elemen  $A$  dari luar.

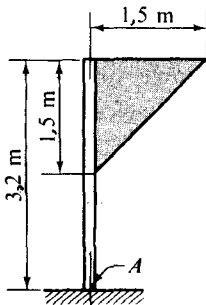


TAMPAK DENAH

TAMPAK UJUNG

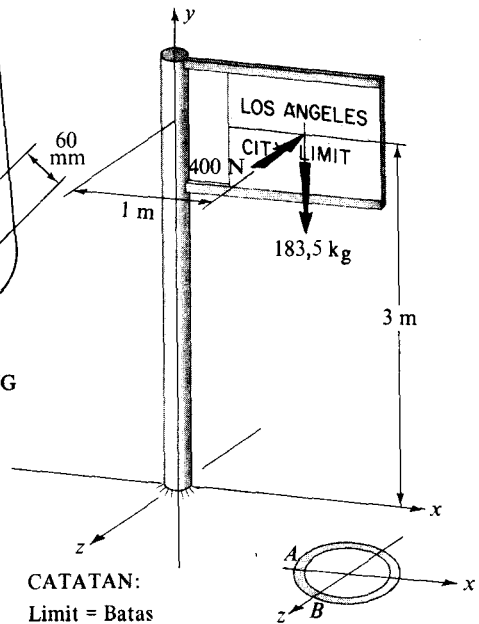
GAMBAR SOAL 9 – 28

9-29. Sebuah rambu segitiga padat dipasang pada pipa baja berberat standar O.D. 144,3 mm seperti yang terlihat dalam gambar. Berapakah tegangan utama yang terdapat di titik  $A$  bila angin dengan intensitas  $2,4 \text{ kN/m}^2$  berhembus pada rambu tersebut dari arah pembaca? Abaikanlah berat dari pipa, rambu, dan pengaruh angin terhadap pipa itu sendiri. Abaikan pula sedotan angin pada sisi yang depan.



GAMBAR SOAL 9 – 29

9-30. Sebuah rambu 183,5 kg ditumpu oleh pipa baja berberat standar O.D. 73 mm seperti yang terlihat dalam gambar. Gaya angin mendatar maksimum yang bekerja pada rambu ini diperkirakan sebesar 400 N. Tentukanlah status tegangan yang disebabkan oleh pembebanan ini pada titik-titik  $A$  dan  $B$  pada ujung yang terpasang. Tegangan utama tidak diperlukan. Tunjukkanlah hasil-hasil ini pada skets elemen terpotong dari pipa pada titik-titik ini. Elemen-elemen ini harus dilihat dari luar pipa.



CATATAN:  
Limit = Batas

GAMBAR SOAL 9 – 30

9-31. Kira-kira berapakah tekanan pemecahan untuk sebuah tabung baja tanpa kampuh penarik dingin yang diameter luarnya adalah 60 mm dan tebal dindingnya 2 mm? Tegangan ultimat dari baja adalah  $380 \text{ MN/m}^2$ .

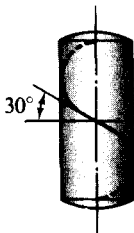
9-32. Sebuah "penstock" yaitu pipa yang membawa air ke turbin hidroliksi, bekerja pada ketinggian 90 m. Bila diameter penstock adalah 0,75 m dan tegangan ijin 50 MPa, berapakah tebal dinding yang diperlukan? (Tegangan ijin dibuat rendah untuk melengkapi korosi).

9-33. Sebuah tangki berkonstruksi las temu untuk penyimpanan bensin mempunyai diame-

ter 12 m dan tinggi 5 m. Pilihlah tebal pelat untuk baris bawah dari pelat-pelat tersebut. Berikan tegangan tarik sebesar 135 MPa untuk baja serta anggaplah daya guna las adalah 80%. Tambahkan kira-kira 3 mm kepada tebal dinding yang dihitung untuk mengimbangi korosi. Abaikanlah tegangan lokal pada sambungan dinding vertikal dengan dasar. (Berat jenis bensin yang akan disimpan adalah 0,721). *Jawab:* 5 mm.

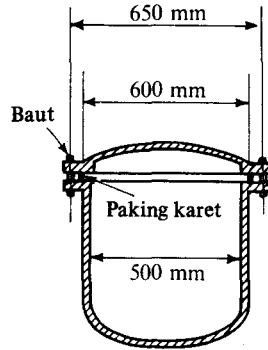
9-34. Sebuah bejana tekan sferis dari baja yang mempunyai diameter dalam sebesar 650 mm dibuat dari dua parohan bola yang dilas antara keduanya. Bila efisiensi sambungan las tersebut adalah 75% dan tegangan tarik ijin baja adalah  $70.000 \text{ kN/m}^2$ , berapakah seharusnya tebal dinding bejana ini untuk menahan tekanan dari 2 MPa?

9-35. Sebuah bejana tekan silindris dengan diameter 2,5 m dan tebal dinding 12 mm bekerja pada tekanan dalam 1,5 MPa. Bila pelat-pelat tersebut mendapatkan las temu pada sebuah spiral heliks  $30^\circ$  (lihat gambar), tentukanlah tegangan-tegangan yang bekerja tegak lurus dan menyinggung las tersebut. *Jawab:* 97,7 MPa, 33,8 MPa.



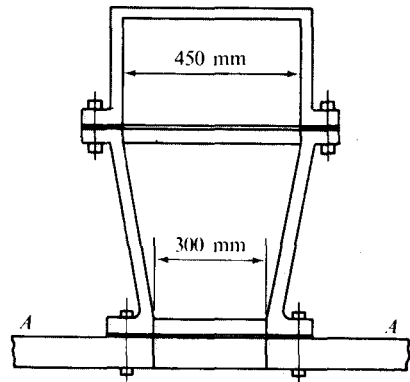
GAMBAR SOAL 9 – 35

9-36. Untuk sebuah laboratorium industri suatu unit percobaan harus mempekerjakan sebuah bejana tekan yang ukuran-ukurannya terlihat dalam gambar. Bejana tersebut bekerja pada tekanan dalam 0,7 MPa. Bila untuk unit ini 20 buah baut harus dipergunakan pada sebuah lingkaran baut berdiameter 650 mm, berapakah ukuran baut-baut yang diperlukan? Ambillah tegangan tarik ijin untuk baut tersebut pada  $125 \text{ MN/m}^2$ ; tetapi anggaplah bahwa pada kaki ulir baut faktor konsentrasi adalah 2%.



GAMBAR SOAL 9 – 36

9-37. Ruang udara sebuah pompa, yang pandangan dari sebelah irisan penampang dapat dilihat dalam gambar, terdiri dari dua potong. Hitunglah jumlah baut-baut 19 mm (luas bersih  $195 \text{ mm}^2$ ) yang diperlukan untuk memasang ruang tersebut kepada silinder pada bidang A-A. Tegangan tarik ijin dalam baut adalah 40 MPa, dan tekanan air dan udara adalah 1,5 MPa.



GAMBAR SOAL 9 – 37

9-38. Sebuah tangki air terbuat dari papan kayu mempunyai diameter 5 m dan tinggi 4 m. Tentukanlah jarak antara gelang-gelang baja  $30 \times 6 \text{ mm}$  bila tegangan tarik ijin baja dibuat pada 90 MPa. Gunakanlah jarak antara gelang yang serba sama dalam tiap meter tinggi tangki. *Jawab:* 0,17 m, 0,22 m, dan seterusnya.

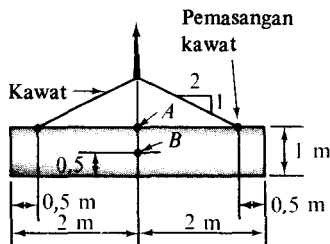
9-39. Sepotong tabung yang berdiameter 250 mm dengan tebal dinding 4 mm ditutup

pada ujung-ujungnya seperti yang terlihat dalam Gambar 9-14. Kemudian kumpulan ini diletakkan ke dalam mesin penguji dan dihadapkan secara bersamaan kepada gaya tarik aksial  $P$  dan tekanan dalam dari 2 MPa. Berapakah besar gaya terpakai  $P$  bila titik-titik ukur  $A$  dan  $B$ , mula-mula secara tepat saling berjarak 200 mm, yang kemudian menjadi jarak 200,04 mm setelah semua gaya-gaya tersebut bekerja?  $E = 200 \text{ GPa}$  dan  $\nu = 0,25$ .

9-40. Sebuah bejana tekan silindris berdiameter luar 3 m, dipergunakan untuk pengolahan karet, panjangnya adalah 10 m. Bila bagian silindris dari bejana tersebut terbuat dari pelat baja setebal 24 mm dan bejana tersebut bekerja pada tekanan dalam 800 kPa, tentukanlah perpanjangan total dari kelilingnya dan kenaikan ukuran diameter yang disebabkan oleh tekanan kerja  $E = 200 \text{ GPa}$  dan  $\nu = 0,3$ .

9-41. Sebuah ketel terbuat dari pelat baja 12 mm mempunyai diameter 1,2 m dan panjangnya 2,5 m. Ketel ini mendapatkan tekanan dalam dari 3 MPa. Berapakah besar perubahan tebal pelat yang diakibatkan oleh tekanan ini?  $E = 200 \text{ GPa}$  dan  $\nu = 0,25$ . *Jawab:*  $-0,0034 \text{ mm}$

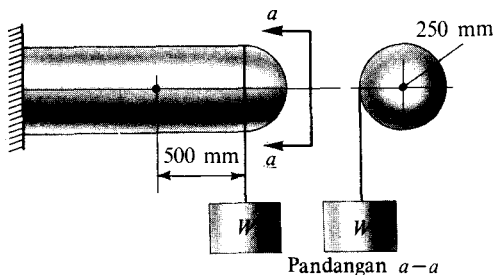
9-42. Sebuah tangki udara tekan diangkat dari tanah dengan kran angkat seperti yang terlihat dalam gambar. Tangki tersebut mempunyai panjang 4 m, diameter 1 m dan tebal dinding sebesar 6 mm. Tekanan di dalam tangki adalah 360 kPa. Anggaplah tangki beserta isinya mempunyai berat 150 kg per meter linier. Tentukanlah tegangan-tegangan utama pada titik-titik  $A$  dan  $B$  dan perlihatkanlah hasil-hasil tersebut pada elemen kecil takberhingga.



GAMBAR SOAL 9 – 42

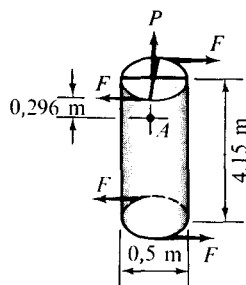
9-43. Sebuah bejana tekan baja berdiameter 500 mm dan mempunyai tebal dinding 5 mm bekerja pula sebagai kantilever berbeban eksen-

tirs seperti yang terlihat dalam gambar. Bila tekanan dalam adalah 2 MPa dan gaya terpakai  $W = 125,7 \text{ kN}$ , tentukanlah status tegangan pada titik  $A$ . Perlihatkanlah hasil-hasil tersebut pada elemen kecil takberhingga. Tegangan-tegangan utama tidak diperlukan. Abaikanlah berat dari bejana tersebut. *Jawab:*  $\sigma_x = 50 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_y = 100 \text{ MPa}$ ,  $\tau = 48 \text{ MPa}$ .



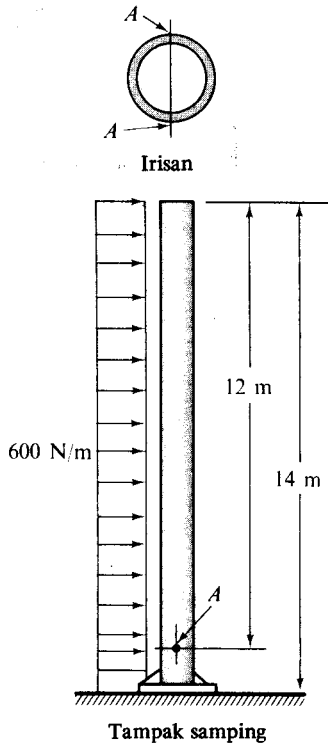
GAMBAR SOAL 9 – 43

9-44. Sebuah tangki yang terbuka di atas dan tertutup di bawahnya mempunyai diameter 500 mm, tebal dinding 10 mm dan panjang 4,15 m seperti yang terlihat dalam gambar. Tangki ini diisi dari atas dengan air raksa yang berat jenisnya  $135 \text{ kN/m}^3$ . Bila tangki ini diangkat dari tanah dengan sebuah kawat dan secara bersamaan dihadapkan kepada momen-momen puntir yang sama dari  $13,5 \text{ kN}\cdot\text{m}$  tapi berlawanan arah pada atas dan bawah, berapakah besar dan arah tegangan-tegangan utama pada titik  $A$ , yang terletak 0,296 m dari atas tangki? Abaikanlah berat tangki tersebut. Secara perkiraan,  $I = 562,5 \times 10^6 \text{ mm}^4$  dan  $J = 1125 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .



GAMBAR SOAL 9 – 44

9-45. Sebuah kolom pembagi, yang panjangnya 14 m, terbuat dari pipa baja standar yang diameter dalamnya 304,2 mm dan beratnya adalah



GAMBAR SOAL 9 – 45

73,75 kg/m. (Lihatlah Tabel 8 dari Lampiran). Pipa ini bekerja dalam kedudukan tegak seperti yang ditunjukkan oleh skets. Bila pipa ini mendapat tekanan dalam dari 4,11 MPa, dan mendapat beban angin sebesar 600 N per meter tinggi, berapakah status tegangan pada titik A? Perlihatkanlah dengan jelas tegangan-tegangan yang telah anda hitung pada elemen yang terpisah; tegangan-tegangan utama tidak perlu dicari.

9-46. Dalam penyelidikan riset tertentu mengenai kemuluran dari timbal, kita perlu melakukan pengawasan terhadap status tegangan elemen sebuah tabung. Dalam salah satu kasus seperti ini, sebuah tabung silinder yang panjang dengan ujung-ujung yang tertutup mendapat tekanan dan secara bersamaan pula mendapat suatu momen puntir. Tabung tersebut mempunyai diameter luar 100 mm dan tebal dinding 6 mm. Berapakah besar tegangan-tegangan utama pada permukaan luar dinding silinder bila rongga mendapat tekanan 1,5 MPa dan momen puntir terpakai luar sebesar 200 N·m? *Jawab:* 12,0 MPa, 4,2 MPa.



# 10 Disain Batang dengan Kriteria Kekuatan

## 10-1 PENDAHULUAN

Pemilihan atau disain sebuah batang tergantung kepada kekuatannya, atau kekakuannya (lendutan) atau kestabilannya. Salah satu kriteria ini dapat mempengaruhi ukuran sebuah batang. Tetapi yang akan kita tinjau dalam bab ini hanyalah persyaratan *kekuatan* dari batang yang statis tertentu yang berdasarkan anggapan bahan tersebut bersifat elastis. Jadi, tujuan utama dari bab ini, adalah untuk membuat prosedur yang sederhana dan cepat yang dapat kita pergunakan dalam soal-soal disain praktis untuk memilih batang dengan kekuatan yang memadai. Beberapa rumus yang dikembangkan dalam bab-bab yang terdahulu dan keterangan mengenai tegangan utama dan teori kegagalan yang telah dibahas dalam bab yang lalu, membentuk dasar untuk disain batang dengan kriteria kekuatan. Pembahasan bab ini akan memperlihatkan bahwa dalam beberapa kasus, prosedur disain yang biasa lebih kasar dari pengetahuan teoritis yang ada, tetapi prosedur-prosedur demikian biasanya tidak membahayakan.

Bab ini hanya berisi tinjauan singkat mengenai disain batang yang mendapat pembebanan secara aksial dan puntiran, sebagaimana halnya pokok ini telah kita bicarakan sebelumnya. Tetapi kali ini diperlukan beberapa ulasan tambahan, karena pembahasan yang lalu mengenai transformasi tegangan pada sebuah titik memberikan gambaran yang lebih lengkap mengenai tegangan dalam. Ini akan kita ikuti dengan suatu pengembangan yang terperinci dari kriteria disain balok yang cepat.

## 10-2 DISAIN BATANG BEBAN AKSIAL

Batang tarik yang berbeban aksial serta batang tekan pendek\* didisain dengan menggunakan Persamaan 1-1a, yaitu  $A = P/\sigma_{ijin}$ . Irisan *kritis* untuk batang yang dibebani

\* Batang tekan yang ramping akan dibahas dalam Bab 13.

secara aksial terjadi pada irisan dari luas penampang yang minimum, di mana tegangan adalah maksimum. Bila daerah luas penampang yang diskontinuitas secara mendadak ditentukan dengan syarat-syarat disain, maka penggunaan Persamaan 2-11,  $\sigma_{\max} = KP/A$ , adalah tepat. Penggunaan rumus yang terakhir perlu dalam disain bagian mesin yang memperhitungkan konsentrasi tegangan lokal di mana kegagalan fatig dapat terjadi.

Di samping tegangan normal yang diberikan oleh persamaan-persamaan di atas, maka tegangan geser yang bekerja pada bidang miring dapat pula terjadi dalam status tegangan uniaksial (sumbu-tunggal). Jadi bila sekiranya suatu bahan kekuatan gesernya lemah dibandingkan dengan kekuatan tarik atau tekannya, maka bahan tersebut akan gagal sepanjang bidang yang mendekati bidang tegangan geser maksimum. Misalnya bagian struktur beton atau besi cor di bawah pengaruh tekan uniaksial dan duralumin di bawah tarik uniaksial akan mengalami kegagalan pada bidang-bidang yang miring terhadap arah beban.

Tanpa memandang jenis kegagalan yang sesungguhnya dapat terjadi, maka tegangan ijin untuk disain batang berbeban aksial biasanya didasarkan kepada tegangan *normal*. Prosedur disain ini adalah konsisten. Tegangan normal maksimum yang dapat ditahan oleh suatu bahan pada titik kegagalan berhubungan secara langsung dengan kekuatan *ultimat* bahan tersebut. Jadi meskipun kegagalan yang sebenarnya dapat terjadi pada suatu bidang miring, tegangan normal maksimum dapat kita tinjau sebagai tegangan normal ultimat.

### 10-3 DESAIN BATANG PUNTIRAN

Rumus-rumus yang bersangkutan untuk desain batang dalam puntiran telah kita buat dalam Bab 3. Untuk poros melingkar, pemecahan Persamaan 3-5, yaitu  $I_p/c = T/\tau_{\max}$ , pada suatu irisan kritis memberikan parameter yang diperlukan,  $I_p/c$ , untuk memperoleh kekuatan yang memadai. Karena poros terutama digunakan sebagai bagian mesin-mesin, maka Persamaan 3-3b, yaitu  $\tau_{\max} = KT_c/I_p$  haruslah dapat dipergunakan dalam banyak kasus. Persamaan 3-3b, dengan faktor konsentrasi tegangan  $K$ , harus berhati-hati terhadap tegangan geser lokal yang tinggi yang terdapat pada perubahan daerah luas penampang.

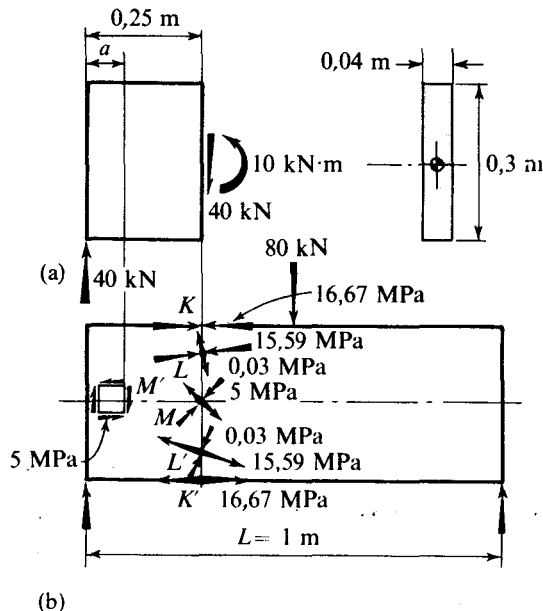
Kebanyakan batang puntiran didisain dengan memilih *tegangan geser ijin*, yang disubstitusikan untuk  $\tau_{\max}$  dalam Persamaan 3-5 atau 3-3b. Ini sama dengan penggunaan yang sebenarnya dari teori kegagalan geser maksimum. Akan tetapi adalah baik kita mengingatkan kembali bahwa status tegangan geser murni yang terjadi dalam puntiran dapat ditransformasikan ke dalam tegangan utama.\* Pada beberapa bahan, kegagalan dapat dikarenakan oleh salah satu tegangan utama ini. Umpamanya, sebuah bagian struktur yang terbuat dari besi cor, yaitu bahan yang tegangan tekannya kuat, tetapi lemah dalam tarik dibandingkan dengan geser, akan mengalami kegagalan dalam pengaruh tarik.

\* Dengan memutar elemen sebesar  $45^\circ$ , maka tegangan tarik-tekan yang diperoleh sama secara numerik dengan tegangan geser, Pasal 8-6.

#### 10.4 KRITERIA DISAIN BALOK PRISMATIK

Bila suatu balok dihadapkan pada *lenturan murni*, maka serat-seratnya berada dalam status tegangan uniaksial. Selanjutnya, bila sebuah balok adalah prismatic, yakni luas penampang dan bentuk adalah tetap, maka irisan kritis terjadi pada irisan yang momen lenturnya paling besar. Dengan memberikan tegangan ijin, modulus irisan dari balok demikian dapat ditentukan dengan menggunakan Persamaan 5-5,  $S = M/\sigma_{\max}$ . Kemudian, begitu modulus irisan yang diperlukan kita ketahui, sebuah balok dengan ukuran-ukuran yang tepat dapat pula kita pilih. Tetapi bila balok menahan geser sebagai tambahan terhadap lenturan, maka disain dari balok tersebut akan lebih berpengaruh.

Tinjaulah balok sikuempat prismatic dari Contoh 9-3 pada irisan yang berjarak 0,25 m dari tumpuan sebelah kiri, di mana balok tersebut meneruskan momen lentur *dan* geser, seperti yang terlihat dalam Gambar 10-1(a). Tegangan-tegangan utama pada titik-titik  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $L'$  dan  $K'$  pada irisan ini telah kita peroleh sebelumnya dan akan kita gambarkan kembali dalam Gambar 10-1(b). Bila irisan ini merupakan irisan kritis, kita dapat melihat bahwa disain balok ini yang berdasarkan kepada teori tegangan normal maksimum, akan ditentukan oleh tegangan pada *serat-serat* terluar karena tidak ada tegangan-tegangan lain yang melebihi tegangan ini. Untuk balok prismatic, tegangan ini hanya tergantung pada besar momen lentur dan yang terbesar pada suatu irisan di mana terjadi momen lentur maksimum. Karena itu dalam disain yang biasa *tidaklah* penting untuk melakukan analisis tegangan gabungan untuk titik-titik di dalamnya. Dalam contoh yang kita tinjau tersebut, momen lentur maksimum terdapat di tengah-tengah bentangan. Hal ini dapat kita sama-ratakan ke dalam suatu aturan dasar untuk disain balok: *Sebuah irisan kritis untuk balok prismatic yang memuat gaya transversal*



Gambar 10-1

*yang bekerja tegaklurus pada sumbunya, akan terjadi bila momen lentur mencapai harga maksimum mutlaknya.\**

Kriteria di atas mengenai disain balok prismatik belumlah lengkap karena perhatian secara khusus kita arahkan pada tegangan-tegangan yang disebabkan oleh momen. Dalam beberapa kasus, tegangan geser yang disebabkan oleh geser pada suatu irisan dapat pula menentukan disain tersebut. Dalam contoh yang kita tinjau tersebut, Gambar-gambar 10-1(a) dan (b), besar dari geseran tetap konstan pada setiap irisan pada balok. Pada suatu jarak kecil  $a$  dari tumpuan sebelah kanan, gaya geser maksimum masih sebesar 40 kN, sedang momen lentur adalah  $40a$  kN·m, jadi kecil. Tegangan geser maksimum pada sumbu netral yang sesuai dengan  $V = 40$  kN adalah sama pada titik  $M'$  seperti pada titik  $M$ .<sup>\*</sup> Karena itu, berhubung dalam soal yang umum tegangan lentur adalah kecil, maka tegangan ini tidak dapat mempengaruhi pemilihan suatu balok, sedang *suatu irisan kritis lain dari balok prismatik terjadi di mana gaya geser adalah maksimum*. Dalam mempergunakan kriteria ini kita biasa bekerja langsung dengan tegangan geser maksimum yang dapat kita peroleh dari Persamaan 6-6,  $\tau = VQ/(It)$ , dan tidak dari transformasi  $\tau_{\max}$  yang diperoleh menjadi tegangan-tegangan utama. Untuk balok segi-empat dan balok-I, tegangan geser maksimum yang diberikan oleh Persamaan 6-6, berubah sederhana menjadi Persamaan-persamaan 6-7 dan 6-9, masing-masing adalah  $\tau_{\max} = (3/2)(V/A)$  dan  $(\tau_{\max})_{\text{pendekatan}} = V/A_{\text{badan}}$ .

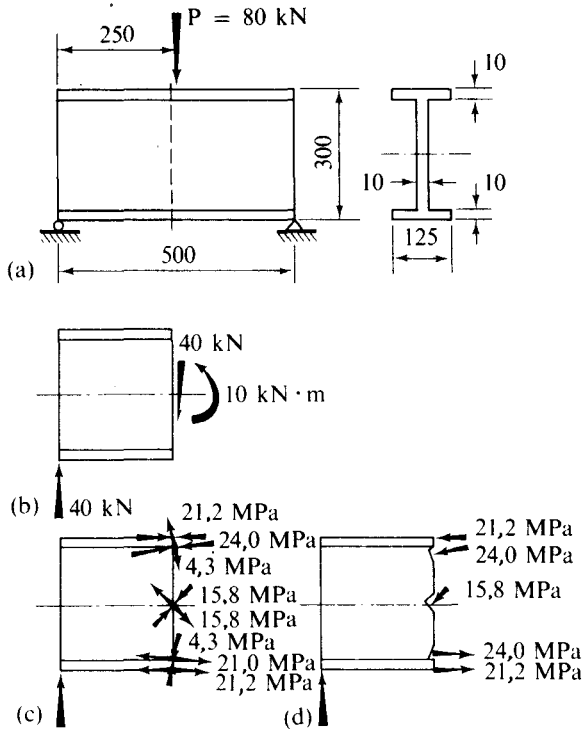
Apakah irisan di mana momen lentur maksimum atau irisan di mana gaya geser adalah maksimum yang mengatur pemilihan suatu balok prismatik, tergantung pada pembebanan dan bahan yang dipergunakan. Untuk kebanyakan bahan, tegangan geser ijin lebih kecil daripada tegangan lentur ijin. Umpamanya, untuk baja, perbandingan antara tegangan-tegangan ijin ini adalah kira-kira 0,6 sedang untuk beberapa kayu dapat se-*rendah* 1/15.<sup>†</sup> Tanpa memperhatikan perbandingan antara tegangan ini, *tegangan lentur biasanya mengatur pemilihan suatu balok*. Hanya balok yang merentang jarak pendek yang gaya gesernya mengatur disain. Untuk balok yang pendek, gaya-gaya terpakai dan reaksi mempunyai lengan momen yang kecil, hingga momen lentur perlawanan yang diperlukan menjadi kecil. Di lain pihak, gaya geser bisa besar bila gaya terpakai besar pula.

Kedua kriteria disain balok akan teliti bila kedua irisan kritis berada ditempat yang berlainan. Tetapi dalam beberapa hal momen lentur maksimum dan geser maksimum dapat terjadi pada irisan yang *sama* dalam balok tersebut. Dalam keadaan yang demikian, kadang-kadang tegangan gabungan yang lebih tinggi dari  $\sigma_{\max}$  dan  $\tau_{\max}$ , seperti diberikan oleh Persamaan-persamaan 5-5 dan 6-6, dapat terjadi pada titik-titik bagian dalam. Umpamanya, tinjaulah sebuah balok-I yang beratnya diabaikan yang memuat

\* Untuk penampang lintang tanpa dua sumbu simetri, seperti balok-T yang terbuat dari bahan yang mempunyai sifat yang berbeda dalam tarik dibandingkan dengan yang berada di dalam tekan, maka momen yang *terbesar* dari *kedua sikap* (positif atau negatif) haruslah kita periksa. Dalam beberapa keadaan, momen lentur yang lebih kecil dari satu sikap dapat mengakibatkan suatu momen yang lebih kritis dari sikap yang lain suatu momen yang lebih besar. Irisan di mana tegangan serat ekstrim dari salah satu tanda yang berhubungan dengan masing-masing tegangan ijin merupakan yang tertinggi, adalah irisan kritis.

\* Pada titik  $M$ , tegangan geser maksimum terlihat berubah menjadi tegangan utama.

† Kayu mempunyai kekuatan geser yang sangat lemah yang *sejajar* dengan uratnya.



Gambar 10-2

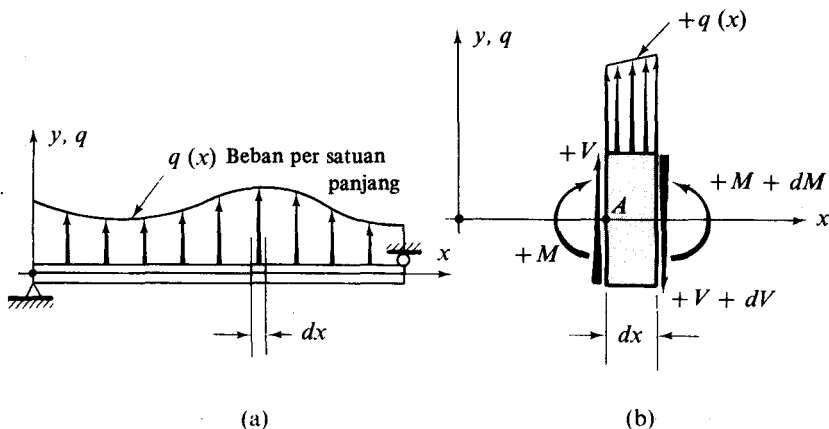
suatu gaya  $P$  di tengah-tengah bentangan, Gambar 10-2(a). Momen lentur maksimum terdapat di tengah-tengah bentangan. Kecuali untuk tanda, gaya geser adalah sama pada kedua belah gaya terpakai. Pada irisan yang tepat sebelah kanan atau kiri dari gaya terpakai, maka momen maksimum *dan* gaya geser maksimum terjadi secara bersamaan. Pada irisan yang tepat di sebelah kiri  $P$ , dengan sistem gaya bersangkutan yang bekerja padanya, dapat kita lihat dalam Gambar 10-2(b). Untuk irisan ini, kita dapat menunjukkan bahwa tegangan pada serat ekstrim adalah 21,2 MPa, sedang tegangan-tegangan utama pada pertemuan antara badan dengan flens, dengan mengabaikan konsentrasi tegangan, yaitu  $\pm 24,0 \text{ MPa}$  dan  $\pm 4,3 \text{ MPa}$ , yang bekerja seperti yang terlihat dalam Gambar-gambar 10-2(c) dan (d). Seperti biasanya, gangguan setempat dari tegangan yang terdapat gaya terpakai  $P$ , kita abaikan. Dari contoh ini kita melihat bahwa tegangan sekitar normal maksimum tidak selalu terjadi pada serat-serat ekstrim. Meskipun demikian yang kita selidiki dalam disain biasa hanyalah tegangan serat ekstrim dan tegangan geser pada sumbu netral. Dalam peraturan disain, tegangan ijin agaknya dibuat cukup rendah hingga faktor keamanan yang memadai tetap ada, sekalipun tegangan gabungan yang lebih tinggi diabaikan. Kita perhatikan pula bahwa untuk gaya terpakai yang sama, dengan menambah bentangan, tegangan lentur menjadi bertambah pula dengan cepat, sedang tegangan geser tetap tidak berubah. Dalam kebanyakan kasus, tegangan lentur amat menonjol sedang tegangan serat ekstrim merupakan tegangan normal maksimum.

Hanya untuk balok yang sangat pendek serta pengaturan yang luar biasa yang memerlukan dilakukannya analisa tegangan gabungan.

Dari pembahasan di atas kita melihat bahwa untuk disain balok prismatik, kita haruslah lebih dulu menentukan irisan kritis dalam setiap soal, sebab disain seluruhnya berdasarkan kepada tegangan yang terbentuk pada irisan ini. Irisan kritis dapat kita tentukan letaknya terbaik dengan bantuan diagram-diagram geser dan momen lentur. Harga-harga  $M_{\max}$  dan  $V_{\max}$  yang dibutuhkan dapat kita tentukan dengan mudah dari diagram-diagram yang demikian. Pembuatan diagram ini telah kita lakukan dalam Bab 4. Tetapi, kegunaan diagram ini besar sekali di mana prosedur lain untuk membuat diagram tersebut akan kita bahas berikut ini. Prosedur yang akan kita kembangkan merupakan periksa sendiri (self-checking).

### 10-5 DIAGRAM GESER DENGAN PENJUMLAHAN

Untuk membuat diagram geser dengan prosedur yang lain, yaitu metoda penjumlahan, maka hubungan-hubungan dasar tertentu haruslah kita buat dahulu. Tinjaulah sebuah elemen, Gambar 10-3, yang dipisahkan tersendiri dari sebuah balok dengan dua buah irisan yang berdampingan yang diambil tegak lurus terhadap sumbu balok sedang jarak antara kedua irisan adalah  $dx$ , seperti yang telah dilakukan dalam Pasal 6-2. Seperti yang lalu, semua gaya yang bekerja pada elemen ini terlihat dengan sikap yang positif. Beban berdistribusi positif\*  $q$  bekerja ke atas dan mengakibatkan bertambahnya gaya geser dari kiri ke kanan. Geser dan momen berubah sepanjang balok hingga terus ke permukaan sebelah kanan dari elemen yang mana besaran-besaran ini ditulis sebagai  $V + dV$  dan  $M + dM$ .



**Gambar 10-3** Balok dan elemen yang dipotong darinya oleh dua irisan yang berdampingan berjarak  $dx$ .

\* Variasi beban ini dalam jarak yang kecil takberhingga adalah diperbolehkan. Pembuktian ini sama dengan yang diberikan dalam catatan kaki Pasal 6-2.

Dengan menuliskan penjumlahan gaya-gaya vertikal dan membuatnya sama dengan nol untuk keseimbangan, maka

$$V + q \, dx - (V + dV) = 0 \quad \text{atau} \quad \frac{dV}{dx} = q \quad (10-1)$$

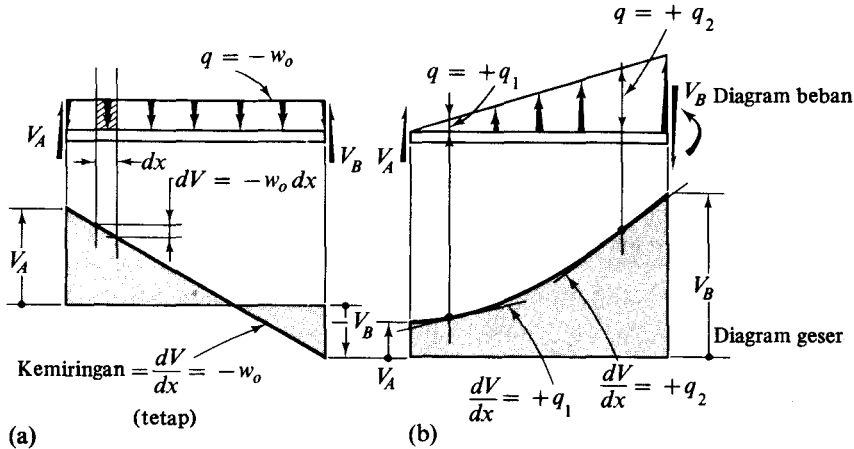
yang berarti bahwa perubahan rata-rata gaya geser sepanjang balok adalah sama dengan gaya terpakai per satuan panjang. Dengan mengubah susunan persamaan serta mengintegrasikannya kita peroleh

$$V = \int_0^x q \, dx + C_1 \quad (10-2)$$

Dengan memberikan batas-batas terhingga dari integral ini, kita melihat bahwa gaya geser pada suatu irisan hanyalah suatu integral (yaitu penjumlahan) dari gaya-gaya vertikal sepanjang balok, dari ujung sebelah kiri balok sampai *kepada irisan yang dibicarakan* ditambah dengan tetapan integrasi  $C_1$ . Tetapan ini sama dengan gaya geser pada ujung sebelah kiri. Antara dua irisan tertentu dari balok, gaya geser akan berubah sebesar gaya vertikal yang terdapat *antara* kedua irisan ini. Bila antara kedua irisan tidak terdapat gaya, maka tidak akan terjadi gaya geser. Bila suatu gaya terpusat masuk ke dalam penjumlahan tersebut, maka terjadi diskontinuitas atau "lompatan" dalam harga geser yang terjadi. Meskipun demikian proses penjumlahan kontinyu masih tetap berlaku, karena gaya terpusat dapat dianggap sebagai gaya terdistribusi yang menyebar dalam jarak yang kecil takberhingga sepanjang balok.

Berdasarkan alasan yang di atas, suatu diagram geser dapat dibuat dengan proses penjumlahan. Untuk tujuan ini, *gaya-gaya reaksi haruslah selalu ditentukan lebih dahulu*. Lalu komponen-komponen vertikal dari gaya dan *reaksi* berturut-turut dijumlahkan dari *ujung kiri* balok dengan mempertahankan kaedah tanda matematis untuk gaya geser yang dipergunakan dalam Gambar 4-15. Gaya geser pada suatu irisan adalah sama dengan jumlah *semua* gaya vertikal yang ada sampai irisan itu.

Bila diagram gaya geser dibuat dari diagram beban dengan proses penjumlahan, dua pengamatan penting dapat kita buat mengenai bentuknya. Pertama, sikap beban terpakai menentukan tanda kemiringan diagram geser. Bila beban terpakai bekerja ke atas, maka kemiringan diagram geser akan positif, demikian pula sebaliknya. Kedua, kemiringan ini sama dengan beban terpakai yang bersangkutan. Umpamanya, tinjaulah sebuah segmen balok dengan beban ke bawah yang berdistribusi secara merata  $w_0$  serta gaya geser yang diketahui pada kedua ujung seperti yang terlihat dalam Gambar 10-4(a). Karena di sini beban terpakai  $w_0$  adalah *negatif* dan *terdistribusi secara merata*, yaitu  $q = -w_0 = \text{tetap}$ , maka kemiringan diagram geser memiliki karakteristik yang sama. Sebagai kemungkinan lain, beban yang berubah secara linier yang bekerja ke atas pada sebuah segmen balok dengan gaya geser yang diketahui pada ujung-ujungnya, seperti yang terlihat dalam Gambar 10-4(b), menunjukkan bentuk diagram geser yang berbeda. Dekat ujung kiri segmen ini beban *ke atas*  $q_1$  yang bekerja secara lokal adalah *lebih kecil* dari beban dengan hal yang sama  $q_2$  dekat ujung kanan. Karena itu kemiringan diagram geser yang *positif* pada sebelah kiri *lebih kecil* dari yang sebelah kanan, dan diagram geser tersebut mencekung ke atas.



$$\text{Kemiringan diagram geser} = \frac{dV}{dx} = q \begin{cases} + \text{Kemiringan} \\ - \text{Kemiringan} \end{cases}$$

**Gambar 10-4** Hubungan antara beban dan diagram geser

Janganlah salah untuk memperhatikan bahwa *penjumlahan komponen gaya-gaya yang vertikal dan sebagainya secara berurutan sistematis adalah penting untuk mendapatkan diagram geser*. Bila kita menggunakan proses penjumlahan berurutan, diagram tersebut haruslah menutupi ujung sebelah kanan balok, sebab tidak ada gaya geser yang bekerja melalui balok tersebut tepat di luar gaya atau reaksi vertikal yang terakhir. *Kenyataan bahwa diagram tersebut menutup memberikan suatu pemeriksaan yang penting terhadap perhitungan-perhitungan*. Pemeriksaan ini seharusnya tidak boleh diabaikan. Ia memungkinkan kita untuk mendapatkan penyelesaian secara bebas dengan kebenaran yang hampir sempurna. Prosedur integrasi semigrafis yang digariskan di atas sangat baik dalam soal-soal yang praktis. Ini merupakan dasar untuk membuat skets diagram geser secara kualitatif dan cepat.

Dari sudut pandangan fisis, kaidah tanda geser tidaklah benar-benar konsisten. Kapan saja balok dianalisis, diagram geser yang ditarik dari satu sisi balok adalah berlawanan tanda dengan diagram yang dibuat dengan titik pandang yang sama dari sisi balok yang lain. Pembaca dapat menurunkan pernyataan ini pada beberapa kasus sederhana, seperti sebuah kantilever dengan gaya terpusat pada ujung, dan balok yang ditumpu secara sederhana dengan gaya terpusat di tengah. Untuk tujuan disain, tanda untuk geseran biasanya tidak penting.

## 10-6 DIAGRAM MOMEN DENGAN PENJUMLAHAN

Untuk merumuskan prosedur penjumlahan untuk mendapatkan diagram momen lagi-lagi elemen yang terlihat dalam Gambar 10-3 harus kita tinjau kembali. Dengan mengambil momen gaya sekitar titik  $A$  dan menyamakannya dengan nol untuk ke-



seimbangan, ungkapan yang sebelumnya kita turunkan dalam Pasal 6-2 kita peroleh

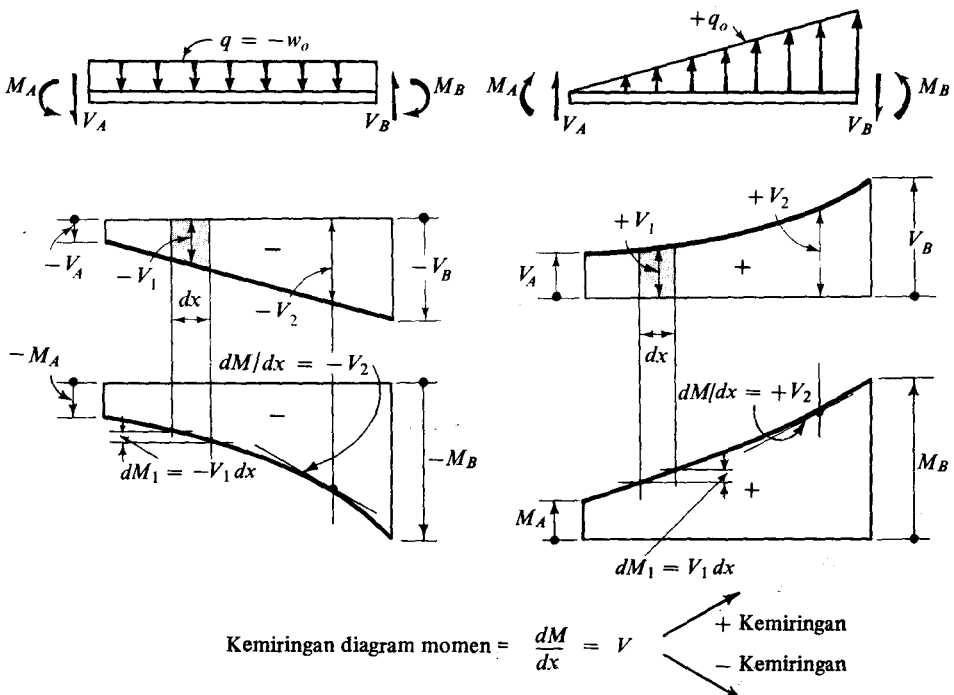
$$\frac{dM}{dx} = V \quad (6-1)$$

Persamaan ini menyatakan bahwa perubahan rata-rata momen lentur sepanjang balok adalah sama dengan gaya geser. Dengan perantara suatu teori kalkulus dasar, Persamaan 6-1 secara tidak langsung, juga menyatakan bahwa *momen maksimum atau minimum terjadi pada titik di mana gaya gesernya adalah nol*, berhubung hasil penurunan di sini adalah nol. Ini biasanya terjadi pada titik di mana geseran berubah tanda.

Dengan merubah susunan persamaan serta mengintegrasikannya diperoleh

$$M = \int_0^x V dx + C_2 \quad (10-3)$$

yang serupa dengan Persamaan 10-2 yang didapat untuk pembuatan diagram geser. Arti dari suku  $V dx$  diperlihatkan secara grafis dengan daerah-daerah gelap pada diagram-diagram geser dalam Gambar 10-5. Penjumlahan daerah-daerah ini antara irisan-irisan yang tertentu dalam balok sesuai dengan penyelesaian integral berhingga di atas. Bila ujung-ujung balok terletak di atas rol, ujung pasak atau bebas, maka momen-momen awal dan batas adalah nol. Bila ujung tersebut terpasang (jepit, tidak berputar), dalam



Gambar 10-5 Hubungan antara gaya geser dan diagram momen

balok statis tertentu, maka momen pada ujung dapat diketahui dari perhitungan gaya-gaya reaksi. Bila ujung jepit dari balok terdapat di sebelah kiri, maka momen ini dengan tanda yang tepat\* merupakan *tetapan integrasi awal*  $C_2$ .

Dengan menjalankan *secara kontinyu disepanjang balok dari ujung sebelah kiri* serta menjumlahkan daerah-daerah khusus diagram geser dengan memperhatikan tanda dari geseran, maka kita memperoleh diagram momen. Proses penurunan diagram momen dari diagram geser dengan penjumlahan betul-betul sama dengan yang kita lakukan sebelum ini dari pembebanan menjadi diagram geser. *Perubahan momen dalam sebuah segmen balok yang diketahui adalah sama dengan luas daerah diagram geser yang bersangkutan*. Secara kualitatif bentuk dari diagram momen dengan mudah dapat dibuat dari kemiringan pada beberapa titik yang dipilih di sepanjang balok. Kemiringan ini mempunyai tanda dan harga yang sama dengan gaya geser yang bersangkutan pada diagram geser, karena  $dM/dx = V$ . Kemungkinan lain ialah perubahan momen  $dM = V dx$  dapat dipelajari di sepanjang balok. Contoh-contoh dapat kita lihat pada Gambar 10-5. Menurut prinsip-prinsip ini, gaya geser yang berubah-ubah mengakibatkan perubahan momen yang tidak linier. Suatu gaya geser yang konstan menghasilkan perubahan momen lentur yang seragam, menghasilkan suatu garis lurus dalam diagram momen. Bila tidak terdapat geser sepanjang bagian tertentu dari balok, maka *tidak terjadi perubahan momen*.

Dalam diagram momen lentur yang diperoleh dengan penjumlahan, *pada ujung sebelah kanan* balok, suatu pemeriksaan yang tidak ternilai harganya akan kita temui lagi. *Syarat-syarat akhir momen haruslah dipenuhi*. Bila ujung tersebut adalah bebas atau diberi pasak, maka jumlah yang dihitung haruslah sama dengan nol. Bila ujung tersebut dipasang tetap, momen ujung yang dihitung dengan penjumlahan adalah sama dengan yang kita hitung mula-mula untuk gaya reaksi. Ini merupakan "syarat-syarat batas" dan selalu harus dipenuhi.

#### CONTOH 10-1

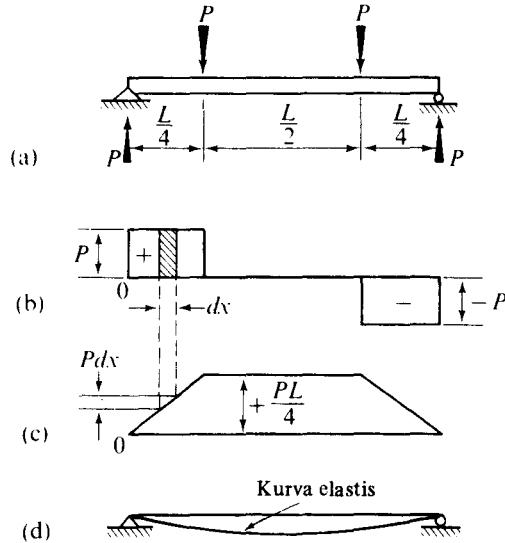
Buatlah diagram-diagram geser dan momen untuk balok yang dibebani secara simetris seperti yang terlihat dalam Gambar 10-6(a).

#### PENYELESAIAN

Masing-masing gaya reaksi sama dengan  $P$ . Untuk mendapatkan diagram geser, Gambar 10-6(b), penjumlahan gaya-gaya dimulai dari ujung kiri. Gaya reaksi di kiri bekerja *ke atas* hingga ordinat pada diagram geser pada gaya ini sama dengan  $P$  yang di plot *ke atas*. Berhubung tidak ada gaya lain yang terdapat sampai titik seperempat panjang, maka *besar ordinat geser tidak berubah sampai ke titik itu*. Kemudian gaya  $P$  yang ke bawah membawa ordinat kembali ke garis dasar, dan ordinat nol ini tetap ada sampai mendekati gaya  $P$  ke bawah yang berikut di mana gaya geser berubah menjadi  $-P$ . Pada ujung kanan gaya reaksi ke atas menutup diagram tersebut dan memberikan pengecekan terhadap pekerjaan tersebut. Diagram geser ini adalah *anti-simetris*.

Diagram momen, Gambar 10-6(c), diperoleh dengan menjumlahkan luas diagram geser. Karena balok mendapat tumpuan sederhana, maka momen pada ujung kiri ada-

\* Momen lentur membawa tanda menurut kaidah yang dipergunakan dalam Gambar 4-17. Momen yang mengakibatkan *tekan* dalam serat atas balok adalah positif.



Gambar 10-6

lah nol. Jumlah bagian yang positif dari diagram geser *bertambah dengan kenaikan yang tetap* di sepanjang balok tersebut sampai mencapai titik seperempat panjang; di mana momen tersebut mencapai sebesar  $+PL/4$ . Momen ini tetap konstan pada pertengahan balok. *Tidak ada perubahan momen yang dapat terjadi dalam daerah ini* karena tidak ada daerah gaya geser bersangkutan.

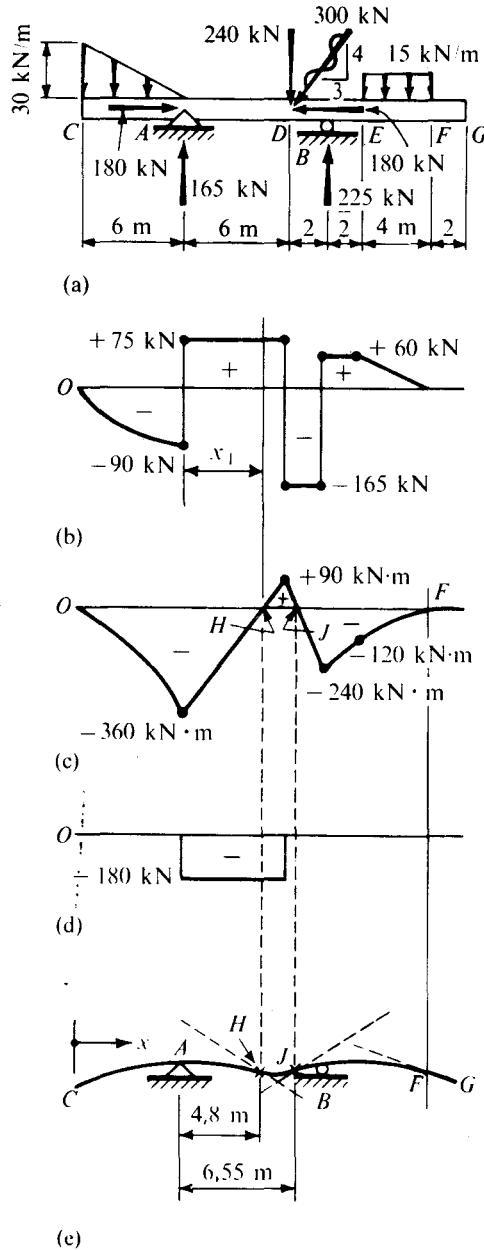
Sesudah gaya yang kedua, momen menurun dengan  $-P dx$  dalam *setiap*  $dx$ . Jadi diagram momen dalam daerah ini mempunyai kemiringan yang tetap yang negatif. Karena daerah positif dan negatif dari diagram geser adalah sama, maka momen pada ujung kanan menjadi nol. Ini memang harus demikian, karena ujung kanan terletak pada rol. Jadi pengecekan untuk pekerjaan ini telah diperoleh. Diagram momen ini adalah *simetris*.

#### CONTOH 10-2

Buatlah diagram-diagram geser dan momen lentur untuk balok yang dibebani seperti yang terlihat dalam Gambar 10-7(a).

#### PENYELESAIAN

Pertama-tama gaya-gaya reaksi haruslah kita hitung lebih dahulu dan, sebelum melanjutkan, gaya yang miring arahnya diuraikan ke dalam komponen-komponen horisontal dan vertikal. Reaksi horisontal di titik  $A$  adalah 180 kN dan bekerja ke arah kanan. Dari Persamaan  $\Sigma M_A = 0$ , diperoleh gaya reaksi vertikal di titik  $B$  sebesar 225 kN (periksalah ini). Dengan cara yang sama, gaya reaksi vertikal di titik  $A$  adalah 165 kN. Jumlah komponen-komponen reaksi vertikal menjadi 390 kN, jadi sama dengan jumlah gaya-gaya vertikal.



Gambar 10-7

Dengan reaksi-reaksi yang diketahui, penjumlahan gaya-gaya kita mulai dari ujung sebelah kiri balok untuk mendapatkan diagram geser, pada Gambar 10-7(b). Pada mulanya, beban terdistribusi ke bawah menghimpun dengan kecepatan yang besar.

Kemudian, begitu intensitas beban menurun, untuk pertambahan jarak yang sama sepanjang balok, perubahan geser yang lebih kecil pun terjadi. Jadi diagram geser dalam daerah *CA* merupakan garis lengkung, yang cekung ke atas. Gaya ke bawah total dari titik *C* ke titik *A* adalah 90 kN, dan ini merupakan ordinat negatif dari diagram geser, *tepat sebelah kiri tumpuan A*. Pada titik *A*, gaya reaksi *ke atas* sebesar 165 kN memindahkan ordinat diagram geser menjadi +75 kN. Harga geseran ini berlaku pada irisan dalam balok yang letaknya *tepat di sebelah kanan tumpuan A*. *Perubahan tiba-tiba* gaya geser pada titik *A* sama dengan gaya reaksi, tetapi jumlah ini tidak menunjukkan gaya geser dalam balok tersebut.

Karena tidak terdapat gaya yang bekerja pada balok antara titik-titik *A* dan *D*, maka harga geseran tidak berubah. Pada titik *D*, komponen gaya terpusat ke bawah sebesar 240 kN menjatuhkan harga geser menjadi -165 kN. Begitu pula dengan cara yang sama, harga geser tersebut naik menjadi +60 kN di titik *B*. Karena antara titik-titik *E* dan *F* beban terdistribusi secara merata bekerja ke bawah, geser yang menurun terjadi dengan kecepatan rata-rata yang tetap yaitu 15 kN per meter. Jadi pada titik *F*, geser menjadi nol, yang bertugas sebagai cek akhir.

Untuk menggambar diagram momen yang terlihat dalam Gambar 10-7(c) dengan metoda penjumlahan, maka daerah-daerah diagram geser dalam Gambar 10-7(b) secara kontinyu haruslah dijumlahkan dari ujung kiri balok. Dalam segmen *CA*, mula-mula pada daerah yang lebih kecil luasnya dimasukkan ke dalam penjumlahan dalam jarak  $dx$  dari yang sedikit lebih besar luasnya, hingga suatu garis yang cekung ke bawah akan dapat dilihat dalam diagram momen. Momen di titik *A* sama dengan luas diagram geser yang ada dalam segmen *CA*. Daerah ini ditutupi oleh sebuah garis lengkung yang luasnya dapat ditentukan dengan integrasi,\* karena geser di sepanjang segmen ini dapat dinyatakan secara analitis. Prosedur ini acapkali menjemukan, hingga daripada menggunakannya, kita dapat memperoleh momen lentur pada titik *A* tersebut dari definisi pokok suatu momen pada sebuah irisan. Dengan membuat sebuah irisan melalui titik *A* dan memisahkan secara tersendiri segmen *CA*, maka momen pada titik *A* diperoleh. Sedang daerah lain diagram geser dalam contoh ini dengan mudah dapat kita tentukan luasnya. Perhatian harus pula kita berikan kepada tanda dari daerah-daerah luas ini. Sebaiknya kita susun dalam bentuk daftar. Pada ujung kanan balok, pengecekan seperti biasa dapat pula kita peroleh:

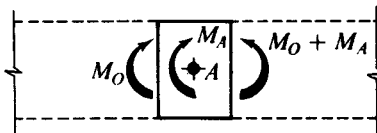
$$\begin{array}{ll}
 M_A \dots\dots\dots -\frac{1}{2}(6)(30)(4) = -360 \text{ kN}\cdot\text{m} & (\text{momen sekitar } A) \\
 & (+75)(6) = +450 \\
 M_D \dots\dots\dots & + 90 \text{ kN}\cdot\text{m} \\
 & (-165)(2) = -330 & (\text{luas geser } D \text{ ke } B) \\
 M_B \dots\dots\dots & -240 \text{ kN}\cdot\text{m} \\
 & (+60)(2) = +120 & (\text{luas geser } B \text{ ke } E) \\
 M_E \dots\dots\dots & -120 \text{ kN}\cdot\text{m} \\
 & +\frac{1}{2}(+60)(4) = +120 & (\text{luas geser } E \text{ ke } F) \\
 M_F \dots\dots\dots & 0,0 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad (\text{cek})
 \end{array}$$

\* Dalam kasus ini, kurva geser merupakan parabola berderajat kedua dengan titik puncak pada garis vertikal yang melalui titik *A*. Untuk luas-luas yang diselubungi bermacam-macam kurva lihatlah Tabel 2 dari Lampiran.

Diagram untuk gaya aksial dapat dilihat dalam Gambar 10-7(d) (Lihat juga Pasal 4-8). Gaya tekan ini bekerja dalam segmen  $AD$  dari balok.

### \*10-7 CATATAN LANJUT MENGENAI KONSTRUKSI DIAGRAM GESER DAN MOMEN

Dalam menurunkan diagram momen dengan menjumlahkan luas-luas diagram geser, tidak ada *momen terpusat luar* (external concentrated moment) yang bekerja pada elemen yang kecil takberhingga dalam Gambar 10-3 yang kita ikutkan, pada hal momen seperti itu sesungguhnya masih bekerja pula. Jadi proses penjumlahan yang kita buat berlaku hanya pada titik tangkap suatu momen luar. *Pada irisan tepat di luar suatu momen luar terpakai, suatu momen lentur yang berbeda diperlukan pula untuk menjaga segmen balok berada dalam keseimbangan.* Umpamanya, dalam Gambar 10-8 suatu momen luar  $M_A$  yang bekerja menurut arah jarum jam pada titik  $A$  pada elemen balok. Kemudian bila momen dalam searah putaran jarum jam pada sebelah kiri adalah  $M_O$ , untuk keseimbangan elemen, maka momen perlawanan yang berlawanan arah putaran jarum jam pada sisi kanan adalah  $M_O + M_A$ . Keadaan dengan sikap momen lain dapat pula kita telaah dengan cara yang sama. Pada titik momen terpakai luar, suatu diskontinuitas atau "lompatan" yang sama dengan momen terpusat dapat terlihat dalam diagram momen. Jadi dalam penggunaan proses penjumlahan, momen-momen terpusat haruslah pula diberikan perhatian karena pengaruh mereka memang tidak termasuk dalam proses penjumlahan luas diagram geser. Proses penjumlahan dapat berlaku sampai titik tangkap momen terpusat. Pada titik ini suatu "lompatan" vertikal sama dengan momen luar yang harus dibuat dalam diagram. Arah dari "lompatan" vertikal ini dalam diagram tergantung kepada sikap momen terpusat dan ia dapat ditentukan dengan baik sekali dengan bantuan skets yang serupa dengan Gambar 10-8. Sesudah diskontinuitas dalam diagram momen dilampaui proses penjumlahan luas daerah diagram geser dapat diteruskan kepada sisa balok.



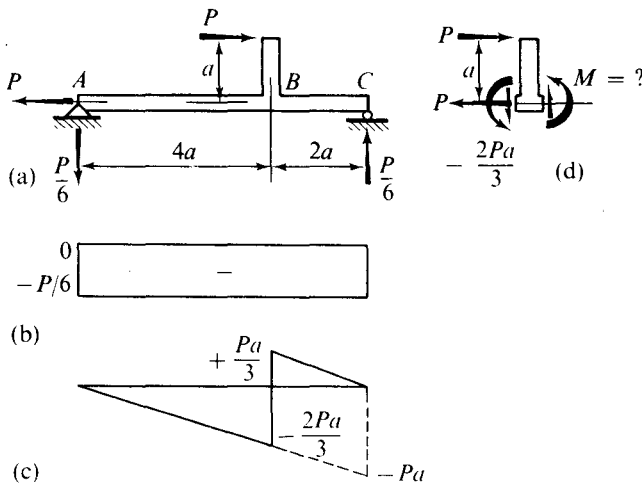
Gambar 10-8 Momen terpusat luar yang bekerja pada sebuah elemen balok

#### CONTOH 10-3

Buatlah diagram momen lentur untuk balok mendatar yang dibebani seperti yang terlihat dalam Gambar 10-9(a).

#### PENYELESAIAN

Dengan mengambil momen terhadap salah satu ujung balok, maka gaya reaksi vertikal yang didapat adalah  $P/6$ . Pada titik  $A$  reaksi bekerja ke bawah, sedang pada titik  $C$  ia bekerja ke atas. Dari  $\sum F_x = 0$  kita mengetahui bahwa pada titik  $A$  gaya reaksi horizontal sama dengan  $P$  yang bekerja ke arah kiri. Berikutnya kita dapat menggambarkan diagram geser, yaitu Gambar 10-9(b). Untuk *keseluruhan* panjang balok, diagram ter-



Gambar 10-9

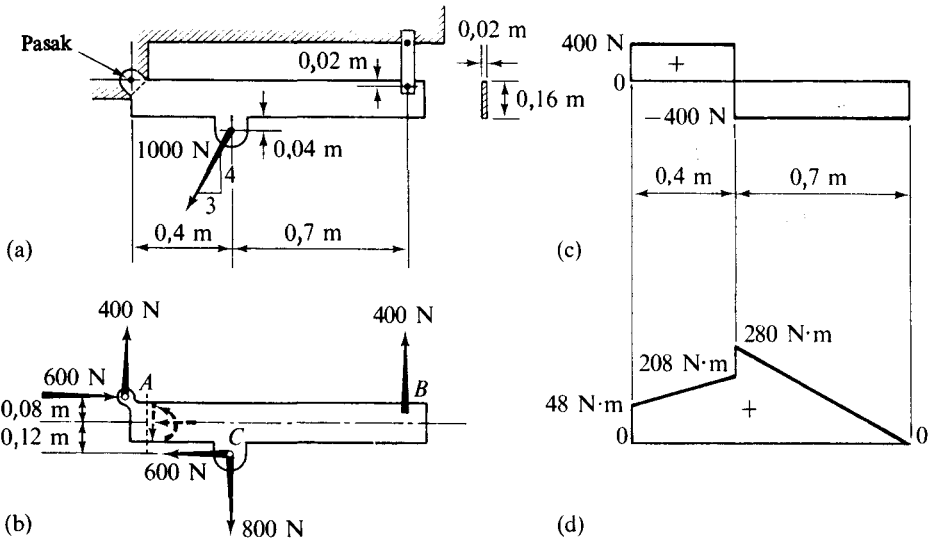
sebut mempunyai ordinat tetap yang negatif. Sesudah ini, dengan menggunakan proses penjumlahan, kita dapat membuat diagram momen yang terlihat dalam Gambar 10-9(c). Momen pada ujung kiri balok adalah nol, karena tumpuan diberi pasak. Perubahan total momen dari titik  $A$  ke  $B$  diberikan oleh luas diagram geser antara irisan-irisan ini dan besarnya sama dengan  $-2Pa/3$ . Diagram momen dalam zona  $AB$  mempunyai kemiringan tetap yang negatif. Untuk analisis selanjutnya, sebuah elemen dipisahkan tersendiri dari balok seperti terlihat dalam Gambar 10-9(d). Momen pada sebelah kiri elemen ini *diketahui sebesar*  $-2Pa/3$ , sedang momen terpusat yang disebabkan oleh gaya terpakai  $P$  terhadap sumbu netral balok adalah  $Pa$ . Jadi untuk keseimbangan, maka momen pada sebelah kanan elemen haruslah  $+Pa/3$ . Pada titik  $B$  suatu "lompatan" ke atas sebesar  $+Pa$  dibuat dalam diagram momen dan tepat sebelah kanan  $B$  ordinat menjadi  $+Pa/3$ . Setelah titik  $B$  penjumlahan luas diagram geser dapat diteruskan. Luas antara  $B$  dan  $C$  sama dengan  $-Pa/3$ . Harga ini *menutup* diagram momen pada ujung kanan balok, jadi syarat-syarat batas dipenuhi. Perhatikan bahwa garis-garis dalam diagram momen yang miring ke bawah dan ke kanan adalah saling sejajar. Ini menuruti kenyataan bahwa di mana-mana gaya geser disepanjang balok adalah negatif dan konstan.

#### CONTOH 10-4

Gambarlah diagram geser dan momen untuk bagian struktur yang terlihat dalam Gambar 10-10(a). Abaikanlah berat balok tersebut.

#### PENYELESAIAN

Dalam kasus ini, tidak seperti semua kasus yang kita tinjau sebegini jauh, ukuran-ukuran tertentu diberikan kepada *kedalaman* dari balok. Balok tersebut, untuk mudahnya, dianggap mempunyai penampang sikuempat, karenanya sumbu *netral* terletak 0,08 m di bawah sisi atas balok tersebut. Perhatikanlah secara cermat bahwa balok ini tidak ditumpu pada sumbu netral.



Gambar 10-10

Suatu diagram benda bebas dari balok tersebut beserta gaya terpakai yang diuraikan atas komponen-komponennya dapat dilihat dalam Gambar 10-10(b). Gaya-gaya reaksi dihitung dengan cara yang biasa. Selanjutnya karena diagram geser hanya menyangkut gaya-gaya vertikal, maka ia dengan mudah digambar dan ini dapat dilihat dalam Gambar 10-10(c).

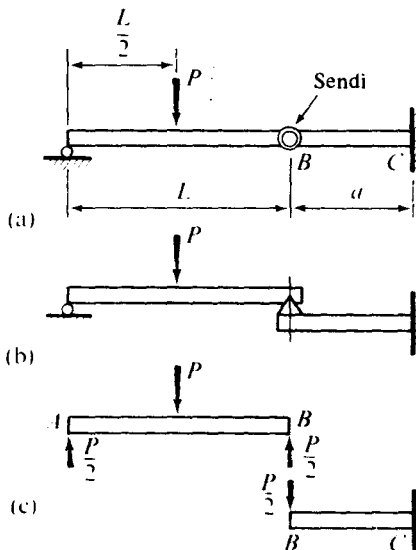
Dalam membuat diagram momen yang terlihat dalam Gambar 10-10(d), perlu dilakukan kewaspadaan. Seperti ditekankan dalam Bab 4, momen lentur selalu dapat ditentukan dengan meninjau sebuah segmen balok, dan mereka dapat dihitung dengan baik sekali dengan mengambil momen-momen gaya luar *sekitar sebuah titik pada sumbu netral balok*. Jadi dengan membuat irisan tepat sebelah kanan titik A serta meninjau segmen yang sebelah kiri, kita dapat melihat bahwa momen positif sebesar 48 N·m mendapat perlawanan dari balok pada ujung ini. Jadi plot diagram momen haruslah *diawali* dengan ordinat +48 N·m. Titik lain pada balok di mana momen terpusat terjadi adalah titik C. Di sini komponen horisontal dari gaya terpakai menunjukkan momen searah putaran jarum jam terhadap sumbu netral sebesar  $600(0,12) = 72$  N·m. Tepat sebelah kanan titik C momen ini harus mendapat perlawanan dari momen positif tambahan. Ini mengakibatkan terjadinya diskontinuitas dalam diagram momen. Proses penjumlahan luas diagram geser berlaku untuk segmen-segmen balok di mana tidak ada momen luar yang bekerja. Perhitungan-perhitungan yang perlu ditunjukkan dalam bentuk daftar di bawah.

$$\begin{array}{lcl}
 M_A & \dots\dots\dots + 600(0,08) = + 48 \text{ N} \cdot \text{m} & \\
 & \dots\dots\dots + 400(0,40) = + 160 & \text{(daerah geser A ke C)} \\
 \text{Momen tepat ke kiri C} & \dots\dots\dots = + 208 \text{ N} \cdot \text{m} & \\
 & \dots\dots\dots + 600(0,12) = + 72 & \text{(momen luar pada C)} \\
 \text{Momen tepat ke kanan C} & \dots\dots\dots = + 280 \text{ N} \cdot \text{m} & \\
 & \dots\dots\dots - 400(0,70) = - 280 & \text{(daerah geser C ke B)} \\
 M_B & \dots\dots\dots = 0 \text{ (cek)} & 
 \end{array}$$

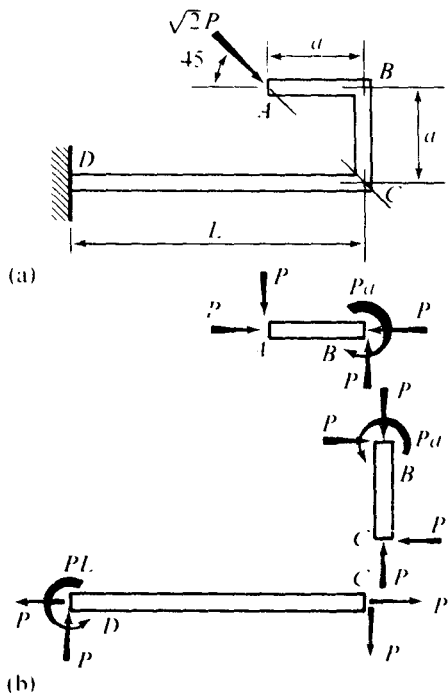


Perhatikanlah bahwa dalam menyelesaikan soal ini gaya-gaya ditinjau *di mana pun mereka sebenarnya bekerja pada balok tersebut*. Penyelidikan mengenai gaya geser dan momen pada suatu irisan balok menerangkan apa yang sebenarnya dialami oleh balok tersebut. Kadang-kadang ini berbeda dari prosedur untuk menentukan gaya-gaya reaksi di mana kerangka atau susunan yang sesungguhnya dari suatu bagian struktur tidaklah penting.

Adakalanya *sambungan yang berengsel (sendi)* atau *hubungan pasak* diperkenalkan kepada balok. Suatu sendi engsel mampu meneruskan hanya gaya-gaya horisontal dan vertikal. *Tidak ada momen yang dapat diteruskan lewat sambungan sendi engsel*. Karena itu titik di mana terdapat engsel merupakan tempat yang baik sekali untuk "memisahkan" bangunan menjadi bagian-bagian untuk keperluan perhitungan gaya-gaya reaksi. Proses ini digambarkan dalam Gambar 10-11. Masing-masing bagian balok yang dipisahkan diselesaikan tanpa saling bergantung. Tiap engsel mempunyai sumbu ekstra pada mana momen-momen diambil untuk menentukan reaksi. Pengenalan engsel atau engsel-engsel ke dalam balok kontinu dalam banyak hal membuat sistem menjadi statis tertentu. Pengenalan sendi engsel kepada balok yang tertentu mengakibatkan balok tidak stabil. Harap diperhatikan bahwa reaksi pada engsel sebuah balok akan bekerja dalam *arah yang berlawanan* pada balok lainnya.



**Gambar 10-11** Bangunan "terpisah" pada sendi untuk menentukan reaksi dengan statika



**Gambar 10-12** Kerangka yang dapat ditentukan secara statis dipisahkan menjadi balok-balok individual

Dalam praktek teknik kita biasa pula mendapatkan beberapa batang sambungan kaku yang membentuk suatu struktur. Struktur yang demikian dapat diselesaikan dengan metoda yang baru saja kita bicarakan, bila ia dapat dipisahkan menjadi balok-balok individu statis tertentu. Untuk ilustrasi, tinjaulah struktur yang terlihat dalam Gambar 10-12(a). Mulai dari titik  $A$ , bagian-bagian struktur  $AB$ ,  $BC$  dan  $CD$  secara berurutan dipisahkan sebagai benda bebas dan sistem gaya-gaya pada masing-masing irisan potongan dapat pula ditentukan. Pembaca dapat menurunkan gaya-gaya ini seperti yang terlihat dalam Gambar 10-12(b). Kemudian, diagram-diagram geser dan momen dapat dibuat untuk masing-masing bagian tersebut, meskipun kaidah tanda yang dipakai dalam buku ini menjadi dua arti untuk batang vertikal dan miring. Tetapi bila arah besaran-besaran ini dipahami oleh penelaah dalam arti fisis, sebenarnya tidak ada kesukaran khusus yang harus dihadapi dalam menganalisa tegangan atau disain.

Akhirnya, kita harus menekankan bahwa bila momen atau geser diperlukan pada suatu irisan *tertentu* pada suatu anggota, maka *metoda irisan dasar selalu dapat digunakan*. Untuk batang miring, gaya geser bekerja *tegaklurus pada sumbu balok*.

#### \*10-8 DIAGRAM MOMEN DAN KURVA ELASTIS

Seperti dinyatakan dalam Pasal 4-9, suatu momen positif mengakibatkan balok berubah bentuk cekung ke atas atau "menahan air", demikian pula sebaliknya. Jadi bentuk dari sumbu balok yang dilenturkan dapat dengan *pasti* ditetapkan dari *tanda* diagram momen. Jejak sumbu balok yang diberi beban ini dalam kedudukan melentur diketahui sebagai *kurva elastis*. Untuk memperlihatkan kurva elastis ini dalam skets biasanya dibuat sangat *berlebihan* di mana lenturan sesungguhnya yang ditemui dalam praktek adalah kecil. Skets kurva elastis memperjelas tindakan fisis sebuah balok. Lagi pula, ia membentuk dasar yang sangat bermanfaat untuk perhitungan-perhitungan kuantitatif dari defleksi balok yang akan kita bicarakan dalam bab yang berikut. Beberapa contoh yang lalu di mana diagram momen lentur digambarkan akan kita pergunakan lagi untuk melukiskan tindakan fisis dari sebuah balok.

Suatu pemeriksaan Gambar 10-6(c) menunjukkan bahwa momen lentur disepanjang balok adalah *positif*. Sesuai dengan itu, kurva elastis yang terlihat dalam Gambar 10-6(d) adalah *cekung ke atas pada setiap titik*. Dalam tugas mendatang, kepastian mengenai arah dari kurva akan perlu sekali. Ujung-ujung dari balok dianggap bersandar pada tumpuan-tumpuan yang tidak bergerak.

Dalam diagram momen yang lebih rumit, Gambar 10-7(c), kita dapati zona-zona momen positif dan negatif. Sehubungan dengan zona momen negatif tersebut, maka kurva *nyata* dari kurva elastis adalah cekung ke bawah, Gambar 10-7(e). Di pihak lainnya, untuk zona  $HJ$  di mana yang terjadi adalah momen positif, kecekungan kurva elastis adalah ke atas. Di mana kurva-kurva tersebut bertemu, seperti pada  $H$  dan  $J$ , di sana kita lihat terdapat garis-garis yang *menyinggung* kedua kurva yang bersambung selama balok tersebut secara fisis adalah kontinu. Perhatikan juga bahwa ujung bebas  $FG$  dari balok merupakan garis singgung pada kurva elastis di titik  $F$ . Tidak ada kurva kita dapati pada  $FG$ , karena dalam segmen balok itu momen adalah nol.

Titik peralihan pada kurva elastis kepada lengkungan yang berlawanan disebut *titik infleksi* (point of inflection – titik lenturan) atau lenturan lawan (contraflexure). Pada titik ini momen berubah tanda dan balok tidak perlu memberikan perlawanan kepada suatu momen. Kenyataan ini acapkali membuat titik-titik ini pada tempat yang dikehendaki untuk suatu bidang sambungan anggota struktur yang besar dan letak mereka dapat dihitung. Prosedur untuk menentukan titik-titik infleksi akan dilukiskan dalam Contoh 10-5, yang akan diikuti sejumlah kesimpulan pembahasan di atas.

Proses penting dalam mendapatkan kurva elastis secara kualitatif dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Gambarlah diagram momen-lentur.
2. Skets kurva elastis, sesuai dengan tanda-tanda momen tanpa berhubungan dengan tumpuan pada diagram momen.
3. Bila balok tersebut terletak pada dua tumpuan, "angkatlah" kurva yang telah digambar, dan "letakkan" pada tumpuan-tumpuan. Dan bila balok adalah kantilever maka ujung lengkung menyinggung ujung yang terpasang tetap.

#### CONTOH 10-5

Hitunglah letak titik-titik infleksi pada balok yang dibahas dalam Contoh 10-2 dan Gambar 10-7(a).

#### PENYELESAIAN

Dengan definisi, sebuah titik infleksi dapat disamakan dengan titik pada balok di mana momen lentur adalah nol. Jadi, titik infleksi dapat ditentukan letaknya dengan membuat suatu pernyataan aljabar untuk momen dalam balok untuk segmen di mana titik tersebut terdapat. Lalu menyelesaikan hubungan ini dengan membuatnya sama dengan nol. Dengan mengukur  $x$  dari ujung  $C$  dari balok, Gambar 10-7(e), momen lentur untuk segmen  $AD$  pada balok adalah  $M = -\frac{1}{2}(6)(30)(x - 2) + 165(x - 6)$ . Dengan menyederhanakan dan membuat pernyataan ini sama dengan nol, kita memperoleh jawab untuk  $x$ .

$$M = 75x - 810 = 0 \quad x = 10,8 \text{ m}$$

Karena itu, titik infleksi yang terdapat dalam segmen  $AD$  pada balok adalah  $10,8 - 6 = 4,8 \text{ m}$  dari tumpuan  $A$ .

Dengan cara yang sama, dengan menulis pernyataan aljabar untuk momen lentur pada segmen  $DB$  dan membuatnya sama dengan nol, letak titik infleksi  $J$  kita peroleh.

$$M = -\frac{1}{2}(6)(30)(x - 2) + 165(x - 6) - 240(x - 12) = 0$$

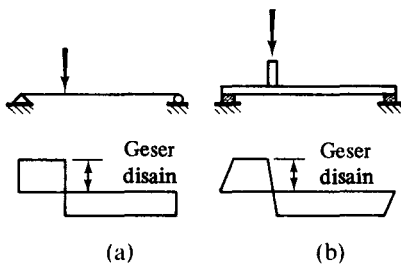
di mana  $x = 12,55 \text{ m}$ , jadi jarak  $AJ = 6,55 \text{ m}$ .

Acapkali suatu metoda yang lebih baik untuk mendapatkan titik-titik infleksi adalah dengan memanfaatkan hubungan-hubungan yang dikenal antara diagram-diagram geser dan momen. Jadi karena momen di titik  $A$  adalah  $-360 \text{ kN}\cdot\text{m}$ , maka titik dengan momen sama dengan nol terjadi bila bagian positif dari luas diagram geser dari  $A$  ke  $H$  sama dengan momen ini, yaitu:  $-360 + 75x_1 = 0$ . Jadi jarak  $AH = 360/75 = 4,8 \text{ m}$  sama dengan yang lalu.

Dengan cara yang sama pula, mulai dengan momen positif yang diketahui pada titik  $D$  yang sebesar  $+90 \text{ kN}\cdot\text{m}$ , maka titik infleksi yang kedua dapat diketahui bila bagian daerah luas diagram geser yang negatif antara  $D$  dan  $J$  memperkecil harga ini menjadi nol. Jadi, jarak  $DJ = 90/165 = 0,55$  atau jarak  $AJ = 6 + 0,55 = 6,55 \text{ m}$ , pada Gambar 10-7(e), seperti pada sebelumnya.

### 10-9 DISAIN BALOK PRISMATIK

Disain batang prismatik dikendalikan oleh tegangan maksimum yang terbentuk pada *irisan-irisan kritis*. Suatu irisan kritis terjadi bilamana momen lenturnya maksimum sedang yang lainnya bilamana gaya gesernya adalah maksimum. Untuk menentukan letak irisan-irisan kritis ini, diagram-diagram geser dan momen sangatlah berfaedah.\* Harga-harga momen dan geser maksimum ini dengan mudah dapat kita peroleh dari diagram-diagram ini. *Harga maksimum mutlak† dari momen dipergunakan dalam disain*, baik positif maupun negatif. Demikian juga, ordinat geser maksimum mutlak merupakan ordinat yang penting. Umpamanya, tinjaulah sebuah balok sederhana dengan suatu beban terpusat, seperti yang terlihat dalam Gambar 10-13. Diagram geser, dengan mengabaikan berat balok, dapat dilihat dalam Gambar 10-13(a) seperti biasanya digambar dengan menganggap gaya terpakai terpusat pada sebuah titik. Diagram geser yang paling banyak terdapat bisa dilihat dalam Gambar 10-13(b). Di sini kita buat suatu kelonggaran lebar gaya terpakai dan reaksi, dengan menganggap mereka terdistribusi atau tersebar secara merata. Pengandaian gaya-gaya terpusat hanyalah meluruskan garis-garis geser yang miring. Dalam kasus lain, harga geser untuk disain merupakan ordinat positif atau negatif yang paling besar, dan bukan harga penuh dari gaya terpakai.



Gambar 10-13 Penentuan ordinat disain dari diagram geser

Tegangan ijin yang harus digunakan dalam disain ditentukan dengan pelbagai wewenang. Dalam banyak kasus, ahli disain haruslah mengikuti aturan yang tergantung kepada letak pemasangan (instalasi). Dalam aturan-aturan yang berbeda meski-

\* Dari pengalaman, pembuatan diagram-diagram yang lengkap dapat kita tiadakan. Sesudah gaya-gaya reaksi dihitung dan irisan di mana  $V = 0$  atau mengubah tanda dapat ditentukan, maka dengan menggunakan metoda irisan kita dapat memperoleh momen maksimum yang bersangkutan dengan irisan ini. Untuk pembebanan yang sederhana, berbagai buku pegangan memberikan rumus-rumus untuk geser dan momen maksimum.

† Ini tidak selalu benar untuk bahan-bahan yang mempunyai sifat yang berbeda antara tarik dan tekan.

pun untuk bahan yang sama dan penggunaan yang sama pula, maka tegangan ijin berbeda pula. Tegangan-tegangan ijin lenturan dan geser adalah berbeda, dengan tegangan geser ijin yang biasanya lebih rendah lagi.

Kadang-kadang disain balok didasarkan kepada kapasitas momen ultimat (plastis). (Lihatlah Pasal 5-8 dan Persamaan 5-10 yang mendefinisikan modulus irisan plastis dari suatu irisan). Dalam persoalan-persoalan yang demikian beban disain yang diandaikan diperbanyak dengan faktor beban, yang akan mendefinisikan beban ultimat yang harus dimuat oleh balok tersebut. Pendeknya, AISC Code (1970) balok-balok statis tertentu memberikan faktor sebesar 1,70. Ini berarti bahwa gagalnya sebuah balok akan terjadi setelah beban disain bertambah dengan faktor 1,70. Karenanya faktor beban merupakan analogi faktor keamanan dalam analisis tegangan elastis. Analisis beban plastis atau batas akan kita tinjau lebih lanjut dalam Bab 12.

Dalam disain elastis, sesudah harga-harga kritis momen dan geser ditentukan dan tegangan ijin dipilih, balok tersebut biasanya mula-mula didisain untuk menahan momen maksimum dengan menggunakan Persamaan 5-5 atau 5-1 ( $\sigma_{\max} = M/S$  atau  $\sigma_{\max} = Mc/I$ ). Kemudian balok tersebut *diperiksa* untuk tegangan geser. Karena kebanyakan balok dipengaruhi oleh tegangan lentur, maka prosedur ini sangat disukai. Tetapi dalam beberapa kasus terutama dalam disain kayu (atau beton), tegangan geser kerap kali menentukan ukuran dari penampang.

Metoda yang dipergunakan dalam menghitung tegangan geser tergantung dari jenis penampang balok. Untuk irisan-irisan sikuempat, tegangan geser maksimum adalah 1,5 kali tegangan rata-rata, Persamaan 6-7. Untuk balok flens lebar dan balok-I, gaya geser  $T$  ijin vertikal total diambil sebagai luas *badan* (web) dikalikan dengan tegangan geser ijin, Persamaan 6-9. Untuk kasus lain, Persamaan 6-6,  $\tau = VQ/(It)$  yang dipergunakan.

*Biasanya ada pelbagai jenis atau ukuran batang yang tersedia secara komersial yang dapat dipergunakan untuk sebuah balok tertentu.* Kecuali adanya pembatasan ukuran khusus terhadap balok tersebut, biasanya batang yang ringan yang dipergunakan untuk alasan ekonomi. Prosedur pemilihan suatu batang merupakan suatu proses uji coba (trial-and-error process).

Harus pula dicatat bahwa beberapa balok harus dipilih berdasarkan pelenturan ijin. Pokok permasalahan ini akan kita kerjakan dalam bab yang berikut.

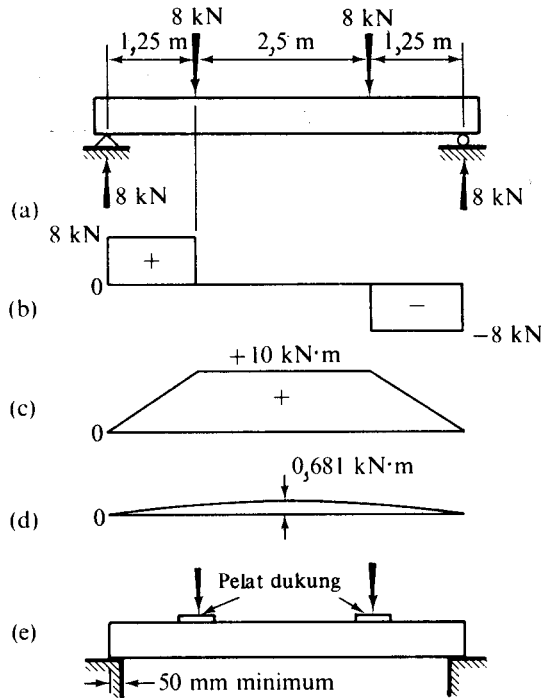
#### CONTOH 10-6

Pilihlah balok kayu Douglas berpenampang sikuempat memikul dua gaya terpusat seperti yang terlihat dalam Gambar 10-14(a). Tegangan lentur ijin adalah 8 MPa, tegangan geser ijin 0,7 MPa sedang tegangan dukung ijin yang tegaklurus pada urat kayu adalah 1,4 MPa.

#### PENYELESAIAN

Diagram-diagram geser dan momen untuk gaya-gaya terpakai haruslah disediakan dahulu dan masing-masing dapat dilihat dalam Gambar-gambar 10-14(b) dan (c). Dari Gambar 10-14(c) kita lihat bahwa  $M_{\max} = 10 \text{ kN}\cdot\text{m}$ . Dari Persamaan 5-5,

$$S = \frac{M}{\sigma_{\text{ijin}}} = \frac{10 \text{ (kN}\cdot\text{m)}}{8000 \text{ (kN/m}^2\text{)}} = 1,25 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$



Gambar 10-14

Dengan *pengandaian secara tertentu* bahwa kedalaman  $h$  dari balok adalah dua kali lebih besar dari lebarnya  $b$ , maka dari Persamaan 5-6,

$$S = \frac{bh^2}{6} = \frac{h^3}{12} = 1,25 \times 10^{-3}$$

jadi  $h = 0,25$  m dan  $b = 0,12$  m.

Ambillah balok *dengan permukaan*  $0,14$  m  $\times$   $0,24$  m yang mempunyai modulus irisan  $S = 1,34 \times 10^{-3}$  m<sup>3</sup> yang digunakan untuk memenuhi persyaratan. Untuk balok ini, dari Persamaan 6-7,

$$\tau_{\max} = \frac{3V}{2A} = \frac{3(8)}{2(0,14)(0,24)} = 357 \text{ kPa} = 0,357 \text{ MPa}$$

Tegangan ini baik dalam batas ijin. Jadi balok tersebut memuaskan.

*Perlu diperhatikan bahwa ukuran-ukuran lain dari balok dapat pula digunakan.* Sedang suatu metoda disain yang lebih langsung adalah mendapatkan ukuran balok yang sesuai dengan modulus irisan yang dikehendaki. Ini langsung diperoleh dari tabel yang serupa dengan Tabel 10, yang memberikan sifat-sifat irisan standar pakai dalam satuan-satuan yang konvensional.

Penelaahan di atas dibuat tanpa memperhatikan berat balok itu sendiri, yang pada mulanya memang tidak diketahui. (Ahli disain yang berpengalaman biasanya membuat kelonggaran untuk berat balok pada permulaan). Tetapi, ini dapat diberikan keterangan yang memuaskan sekarang. Bila massa kayu tersebut adalah  $663 \text{ kg/m}^3$ , maka balok yang dipilih memberikan gaya sebesar  $0,218 \text{ kN/m}$ . Beban yang terdistribusi secara merata ini mengakibatkan diagram momen lentur yang parabolik, seperti yang terlihat dalam Gambar 10-14(d), di mana ordinat maksimum adalah  $w_0 L^2/8 = 0,218(5)^2/8 = 0,618 \text{ kN}\cdot\text{m}$  (lihatlah Contoh 4-6). Diagram momen lentur ini haruslah ditambahkan kepada diagram momen yang disebabkan oleh gaya terpakai. Pemeriksaan terhadap diagram-diagram ini menunjukkan bahwa momen lentur maksimum yang disebabkan oleh kedua kasus di atas adalah  $0,681 + 10 = 10,681 \text{ kN}\cdot\text{m}$ . Jadi, modulus irisan yang diperlukan sebenarnya adalah

$$S = \frac{M}{\sigma_{\text{ijin}}} = \frac{10,68}{8000} = 1,34 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

Balok dengan permukaan  $0,14 \text{ m} \times 0,24 \text{ m}$  yang telah selesai dipilih mempunyai  $S$  yang diperlukan.

Dalam konstruksi yang sesungguhnya, balok tidaklah ditumpu seperti yang diperlihatkan dalam Gambar 10-14(a). Kayu dapat hancur oleh tumpuan atau gaya terpusat terpakai. Untuk alasan inilah daerah pendukung yang memadai harus diberikan pada tumpuan dan pada gaya-gaya terpakai. Andaikan kedua gaya-gaya reaksi dan gaya terpakai masing-masing adalah  $8 \text{ kN}$  yaitu dengan mengabaikan berat balok, kita mendapatkan bahwa luas dukung yang diperlukan pada tiap gaya terpusat, dengan menggunakan Persamaan 1-1, adalah:

$$A = \frac{P}{\sigma_{\text{ijin}}} = \frac{8}{1400} = 0,57 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

Daerah-daerah ini dapat kita peroleh dengan secara konservatif menetapkan bahwa ujung balok bersandar pada bantalan  $50 \text{ mm} \times 140 \text{ mm}$  ( $0,7 \times 10^{-2} \text{ m}^2$ ), sedang pada gaya terpusat cincin penutup baja  $80 \text{ mm} \times 80 \text{ mm}$  ( $0,64 \times 10^{-2} \text{ m}^2$ ) dapat dipergunakan.

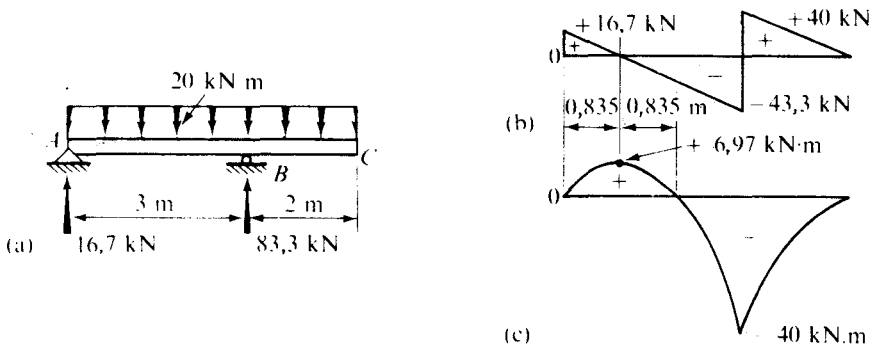
#### CONTOH 10-7

Pilihlah sebuah balok-I atau balok flens lebar yang terbuat dari baja untuk menumpu beban yang terlihat dalam Gambar 10-15(a). Diberikan  $\sigma_{\text{ijin}} = 165 \text{ MPa}$ ,  $\tau_{\text{ijin}} = 100 \text{ MPa}$ .

#### PENYELESAIAN

Diagram-diagram geser dan momen lentur untuk balok yang dibebani tersebut di atas masing-masing dapat dilihat pada Gambar-gambar 10-15(b) dan (c). Momen maksimum adalah  $40 \text{ kN}\cdot\text{m}$ . Dari Persamaan 5-5

$$S = \frac{40}{165 \times 10^3} = 0,24 \times 10^{-3} \text{ m}^3 = 240 \times 10^3 \text{ mm}^3$$



Gambar 10-15

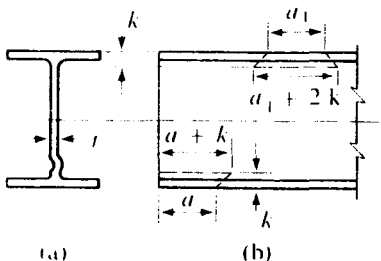
Pemeriksaan Tabel 3 dan 4 dari Lampiran menunjukkan bahwa syarat ini untuk modulus irisan dipenuhi oleh balok S 200 mm yang beratnya 34 kg per meter ( $S = 265 \times 10^3 \text{ mm}^3$ ). Akan tetapi batang-batang yang lebih ringan seperti irisan flens lebar 200 mm yang beratnya 30 kg per meter ( $S = 279 \times 10^3 \text{ mm}^3$ ), dapat pula digunakan. Untuk berat ekonomi irisan S 200  $\times$  30 akan dipergunakan. Berat balok ini sangat kecil dibandingkan dengan beban terpakai hingga diabaikan.

Dari Gambar 10-15(b),  $V_{\max} = 43,3 \text{ kN}$ . Jadi, dari Persamaan 6-9

$$(\tau_{\max})_{\text{pendekatan}} = \frac{V}{A_{\text{badan}}} = \frac{43\,300}{(6,3)(200)} = 34,4 \text{ MPa}$$

Tegangan ini masih di dalam harga yang diperbolehkan, hingga balok yang dipilih tersebut memuaskan.

Pada tumpuan atau beban terpusat, balok S dan balok flens lebar haruslah diperiksa untuk melumpuhkan badan (web). Gejala ini dilukiskan pada bagian bawah Gambar 10-16(a). Melumpuhkan badan adalah lebih kritis untuk batang dengan badan yang tipis daripada memikul langsung flens, yang dapat kita selidiki seperti soal yang lalu. Untuk menghindarkan kelumpuhan, suatu aturan disain telah ditetapkan oleh AISC. Aturan tersebut menyatakan bahwa tegangan langsung pada luas  $(a + k)t$  pada ujung-ujung atau  $(a_1 + 2k)t$  pada titik-titik di dalam, haruslah tidak melebihi  $0,75 \sigma_{yp}$ . Dalam ungkapan ini,  $a$  dan  $a_1$  adalah panjang bantalan masing-masing dari gaya terpakai pada bagian-bagian balok yang di luar atau di dalam, Gambar 10-16(b),  $t$  adalah tebal badan (web), sedang  $k$  adalah jarak dari permukaan luar flens ke ujung filet (lengkungan kecil pada



Gambar 10-16



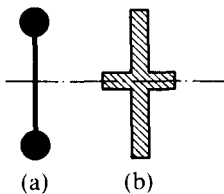
sambungan badan dan flens) dari badan. Harga-harga  $k$  dan  $t$  terdaftar dalam katalog-katalog pabrik.

Untuk soal di atas, dengan menganggap  $\sigma_{yp} = 250$  MPa, maka lebar *minimum* dari tumpuan, menurut aturan di atas, adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \text{Pada tumpuan } A: \quad & (187,5)(a + k)t = 16\,700 \\ \text{atau} \quad & (187,5)(a + 22)(6) = 16\,700 \quad a = 0,0 \text{ mm} \\ \text{Pada tumpuan } B: \quad & 187,5(a_1 + 2k)t = 83\,300 \\ \text{atau} \quad & (187,5)(a_1 + 44)(6) = 83\,300 \quad a_1 = 30 \text{ mm} \end{aligned}$$

Dalam Bab 14, akan kita kerjakan jenis lain dari sambungan balok dengan bagian-bagian struktur lain dengan sudut bantuan yang kecil.

Kedua contoh yang lalu menggambarkan disain balok yang penampangnya mempunyai dua sumbu simetri. Dalam kedua kasus, momen lentur ditentukan disain tersebut, dan karena ini biasanya benar, adalah penting untuk memperhatikan batang mana yang lebih efisien dalam pelenturan. Pemusatan sedemikian banyak bahan sejauh mungkin dari sumbu netral menghasilkan irisan-irisan yang terbaik untuk melawan pelenturan, Gambar 10-17(a). Bahan yang terpusat dekat serat-serat luar bekerja pada tegangan yang tinggi. Dengan pertimbangan ini, irisan tipe-I, yang mendekati syarat ini, adalah yang sangat luas digunakan dalam praktek.



**Gambar 10-17** Irisan-irisan dengan lenturan yang  
(a) efisien; (b) tidak efisien

Pernyataan di atas berlaku untuk bahan-bahan yang mempunyai sifat yang hampir sama dalam pengaruh tarik dan tekan. Bila kasus ini tidak dipenuhi, maka yang diinginkan adalah sengaja menggeser sumbu netral dari kedudukan setengah tinggi. Ini menerangkan penggunaan luas irisan-irisan bentuk-T dan kanal untuk balok-balok besi cor (lihat Contoh 5-5).

Akhirnya, ada dua hal lain yang memerlukan perhatian khusus dalam disain balok. Dalam banyak hal, beban untuk mana sebuah balok didisain mempunyai sifat sementara. Beban-beban tersebut dapat diletakkan semuanya sekaligus di atas balok, satu per satu atau *ditempat yang berbeda*. Beban yang tidak merupakan bagian dari "berat mati" dari bangunan itu sendiri disebut *beban hidup* (live loads). Beban hidup haruslah diletakkan sebegitu rupa hingga menghasilkan tegangan yang setinggi mungkin dalam balok. Dalam banyak hal penempatan tersebut dapat ditentukan dengan pemeriksaan. Misalnya, dalam balok sederhana dengan beban bergerak tunggal, penempatan beban tersebut di tengah bentangan akan mengakibatkan momen lentur yang paling besar, sedangkan penempatan beban yang sama pada tumpuan menghasilkan gaya geser yang terbesar. Untuk kebanyakan pekerjaan bangunan, beban hidup, yang seharusnya memberikan

syarat pembebanan yang sangat diharapkan, ditetapkan dalam aturan bangunan yang berdasarkan seberapa besar newton per meter bujursangkar luas lantai. Perkalian beban hidup ini dengan jarak antara balok-balok yang sejajar memberikan *beban hidup yang terbagi rata* per satuan panjang balok. Untuk tujuan disain, beban ini ditambahkan kepada berat mati dari konstruksi tersebut. Keadaan di mana gaya terpakai diberikan kepada balok dengan kejutan atau tubrukan akan dibahas dalam Bab 15.

Hal yang kedua adalah yang menyinggung *ketidakstabilan lateral* dari balok. Flens balok, bila tidak dipegang, menjadi begitu sempit dalam hubungannya dengan bentangan di mana sebuah balok dapat menekuk ke samping dan hancur. Segi kualitatif dari soal ini telah dibicarakan dalam Pasal 5-2. Rumus-rumus khusus yang dapat dipakai untuk kasus-kasus ini akan diberikan dalam Pasal 13-13.

### \*10-10 DISAIN BALOK BUKAN PRISMATIK

Dari pembahasan yang baru lalu telah dijelaskan bahwa pemilihan balok prismatik hanya berdasarkan tegangan pada irisan kritis. Pada semua irisan yang lain dalam balok tegangan akan berada di bawah tingkat yang diperbolehkan. Karena itu kapasitas potensial dari bahan yang diberikan tidak sepenuhnya dimanfaatkan. Keadaan ini dapat diperbaiki dengan mendisain balok yang terdiri dari irisan penampang yang bervariasi, yaitu dengan membuat balok bukan-prismatik. Karena tegangan lenturan menentukan disain kebanyakan balok, seperti telah diperlihatkan, maka penampang di mana-mana dapat dibuat cukup kuat untuk melawan momen yang bersangkutan. Balok-balok yang demikian disebut *balok berkekuatan tetap*. Gaya geser mempengaruhi disain pada irisan-irisan dalam balok ini di mana momen lentur adalah kecil.

#### CONTOH 10-8

Buatlah disain sebuah kantilever yang berkekuatan tetap untuk melawan gaya terpusat yang bekerja pada ujung. Abaikanlah berat balok itu sendiri.

#### PENYELESAIAN

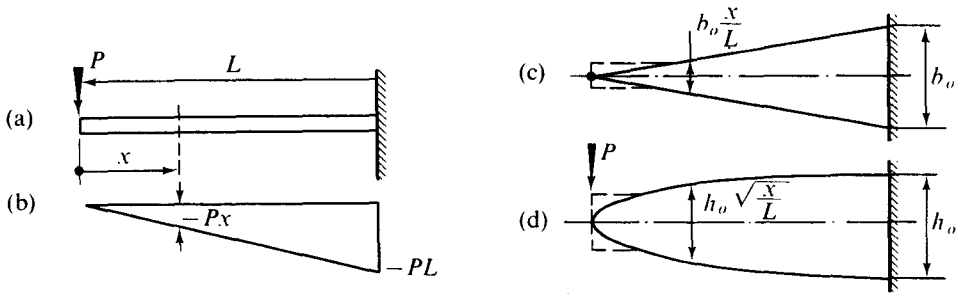
Sebuah kantilever dengan suatu gaya terpusat yang bekerja pada ujung dapat dilihat dalam Gambar 10-18(a); diagram momen yang bersangkutan diplot dalam Gambar 10-18(b). Berdasarkan disain kepada momen lentur, maka modulus irisan yang diperlukan pada sebuah irisan yang tertentu diberikan oleh Persamaan 5-5 :

$$S = \frac{M}{\sigma_{ijin}} = \frac{Px}{\sigma_{ijin}}$$

Banyak sekali daerah penampang yang memenuhi syarat ini; pertama, kita anggap bahwa balok mempunyai penampang sikuempat, dan *tinggi tetap*  $h$ . Modulus irisan untuk balok ini diberikan oleh Persamaan 5-6 sebagai  $bh^2/6 = S$ , jadi

$$\frac{bh^2}{6} = \frac{Px}{\sigma_{ijin}} \quad \text{atau} \quad b = \left[ \frac{6P}{h^2\sigma_{ijin}} \right] x = \frac{b_o}{L} x$$

di mana pernyataan dalam tanda kurung adalah tetap dan dibuat sama dengan  $b_o/L$ , hingga bila  $x = L$ , maka lebar adalah  $b_o$ . Balok dengan kekuatan tetap dan dengan



Gambar 10-18

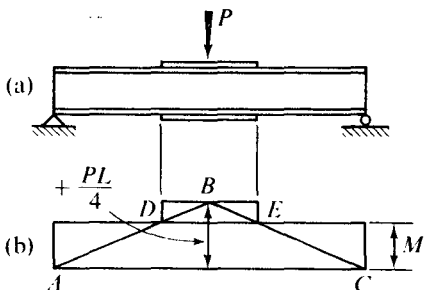
tinggi yang tetap dalam pandangan denah, terlihat seperti baji (wedge)\* seperti yang terlihat dalam Gambar 10-18(c). Di dekat ujung bebas, baji ini haruslah diperbaiki menjadi yang berkekuatan cukup untuk melawan gaya geser  $V = P$ .

*Bila lebar  $b$  dari balok adalah tetap, maka*

$$\frac{bh^2}{6} = \frac{Px}{\sigma_{ijin}} \quad \text{atau} \quad h = \sqrt{\frac{6Px}{b\sigma_{ijin}}} = h_o \sqrt{\frac{x}{L}}$$

Ungkapan ini menunjukkan bahwa kantilever dengan lebar tetap yang dibebani pada ujung juga mempunyai kekuatan yang tetap bila tingginya berubah secara parabolis dari ujung bebas tersebut, Gambar 10-18(d).

Balok-balok dengan kekuatan tetap digunakan dalam pegas daun dan dalam banyak bagian mesin yang dicor ataupun yang ditempa. Dalam pekerjaan bangunan, suatu pendekatan terhadap balok berkekuatan tetap acap kali dibuat. Misalnya, diagram momen untuk balok yang dibebani seperti yang terlihat dalam Gambar 10-19(a) diberikan dengan garis-garis  $AB$  dan  $BC$  dalam Gambar 10-19(b). Dengan memilih balok dengan kapasitas lenturan yang hanya sama dengan  $M_1$ , maka bagian tengah dari balok menjadi



Gambar 10-19

\* Karena balok ini tidak mempunyai luas penampang yang tetap, maka penggunaan rumus lenturan dasar tidak seluruhnya benar. Bila sudut yang dibuat oleh sisi-sisi baji (wedge) adalah kecil, maka kita peroleh kesalahan yang kecil. Begitu sudut ini menjadi besar, maka kesalahan haruslah diperhitungkan. Penyelesaian eksak menunjukkan bahwa bila sudut total yang tercakup adalah  $40^\circ$  maka kesalahan yang terdapat dalam penyelesaiannya mendekati 10%.

kelebihan tegangan (*overstressed*). Tetapi pelat penutup dapat diberikan disekitar pertengahan balok untuk mendorong kapasitas lenturan dari balok gabungan menuju harga momen maksimum yang dibutuhkan. Untuk kasus yang diperlihatkan, pelat penutup haruslah diperluas paling kurang melebihi panjang  $DE$  dari balok sedang dalam praktek mereka dibuat lebih panjang.

### \*10-11 DISAIN BATANG RUMIT

Dalam banyak hal disain batang-batang yang lebih rumit tidak dapat dilakukan dengan cara yang rutin seperti yang dilakukan dalam soal-soal yang lalu. Kadang-kadang ukuran batang haruslah *diandaikan* lebih dahulu sedang analisis tegangan yang lengkap dilakukan pada irisan di mana tegangan tampil kritis. Disain dari jenis ini bisa membutuhkan berbagai perbaikan dan banyak kerja tangan. Juga metoda-metoda eksperimental analisa tegangan kadang-kadang dipergunakan karena rumus-rumus dasar tidak begitu teliti. Dalam analisis bagian-bagian mesin pabrik yang teliti, teori kegagalan yang dibicarakan dalam Bab 9 acapkali digunakan.

Sebagai contoh terakhir dari bab ini. Soal poros transmisi akan kita telaah. Prosedur analitis langsung mungkin dapat dilakukan dalam persoalan ini, yang mempunyai arti yang besar dalam disain perlengkapan daya.

#### CONTOH 10-9

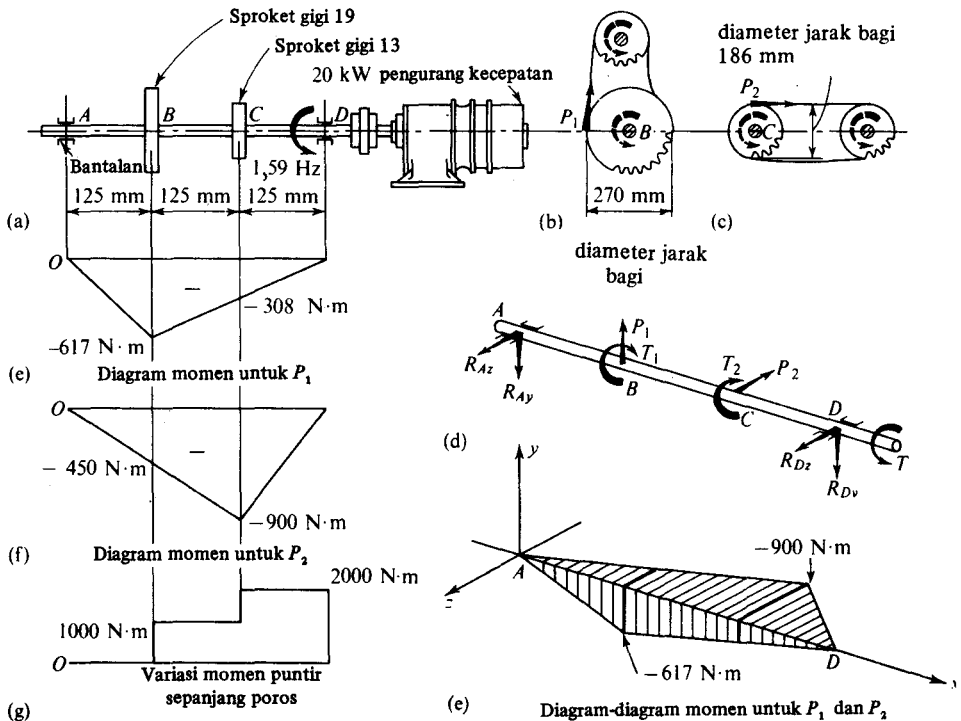
Pilihlah ukuran sebuah poros baja padat untuk menarik dua buah sproket (roda gigi) yang terlihat dalam Gambar 10-20(a). Sproket-sproket ini menarik rantai rol jarak-bagi 50 mm\* seperti yang terlihat dalam Gambar-gambar 10-20(b) dan (c). Diameter lingkaran jarak-bagi dari sproket yang terlihat dalam gambar-gambar diambil dari katalog pabrik. Sebuah unit pengurang kecepatan 20 kW dikopel secara langsung dengan poros tersebut dan menariknya pada 1,59 Hz. Pada setiap sproket terdapat kehilangan 10 kW. Andaikanlah berlaku teori kegagalan geser maksimum dan ambillah  $\tau_{ijin} = 40$  MPa.

#### PENYELESAIAN

Menurut Persamaan 3-6 momen puntir yang diberikan kepada segmen poros  $CD$  adalah  $T = 159 \text{ kW}/f = 159 \times 20/(1,59) = 2000 \text{ N}\cdot\text{m}$ . Jadi momen-momen puntir  $T_1$  dan  $T_2$  yang diberikan kepada sproket adalah  $T/2 = 1000 \text{ N}\cdot\text{m}$  untuk masing-masingnya. Karena rantai-rantai diatur sebagai yang terlihat dalam Gambar-gambar 10-20(b) dan (c), maka gaya tarik dalam rantai sproket  $B$  adalah  $P_1 = T_1/(D_1/2) = 1000/(0,27/2) = 7400 \text{ N}$ . Dengan cara yang sama diperoleh pula  $P_2 = 1000/(0,186/2) = 10.800 \text{ N}$ . Gaya tarik  $P_1$  pada rantai *adalah setara* dengan momen puntir  $T_1$  dan gaya vertikal pada titik  $B$  seperti terlihat dalam Gambar 10-20(d). Pada  $C$  gaya  $P_2$  bekerja secara horisontal dan memberikan momen puntir  $T_2$ . Suatu diagram benda bebas yang lengkap untuk poros  $AD$  terlihat dalam Gambar 10-20(d).

Dari diagram benda bebas dari poros, kita melihat bahwa poros ini secara bersamaan mendapat lenturan dan momen puntir. Efek-efek ini terhadap bagian tersebut paling baik dipelajari dengan bantuan diagram yang tepat, yang dapat dilihat dalam Gambar-gambar 10-20(e), (f) dan (g). Berikutnya, perhatikanlah bahwa meskipun lenturan ter-

\* Sproket dan rantai rol yang serupa biasanya dipakai pada sepeda.



Gambar 10-20

dapat dalam kedua bidang, *momen resultante vektorial* dapat pula dipergunakan dalam rumus lenturan, karena balok tersebut mempunyai pehampang berbentuk lingkaran.

Mengingat kembali pernyataan yang terakhir, kita akan melihat bahwa Persamaan Umum 8-6, yang memberikan tegangan geser utama pada permukaan poros, mempermudah persoalan lenturan dan puntiran ini menjadi

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\text{lenturan}}}{2}\right)^2 + \tau_{\text{puntiran}}^2}$$

atau

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{Mc}{2I}\right)^2 + \left(\frac{Tc}{I_p}\right)^2}$$

Tetapi, karena untuk penampang lingkaran,  $I_p = 2I$  (Persamaan 5-4),  $I_p = \pi d^4/32$  (Persamaan 3-2), dan  $c = d/2$ , maka pernyataan yang terakhir disederhanakan menjadi

$$\tau_{\max} = \frac{16}{\pi d^3} \sqrt{M^2 + T^2}$$

Jadi dengan menentukan tegangan geser ijin dengan  $\tau_{\max}$ , maka rumus disain, yang ber-

dasarkan kepada teori kegagalan geser maksimum,\* untuk poros yang mendapat lenturan dan puntiran, dapat diperoleh sebagai

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi \tau_{ijin}} \sqrt{M^2 + T^2}} \quad (10-4)$$

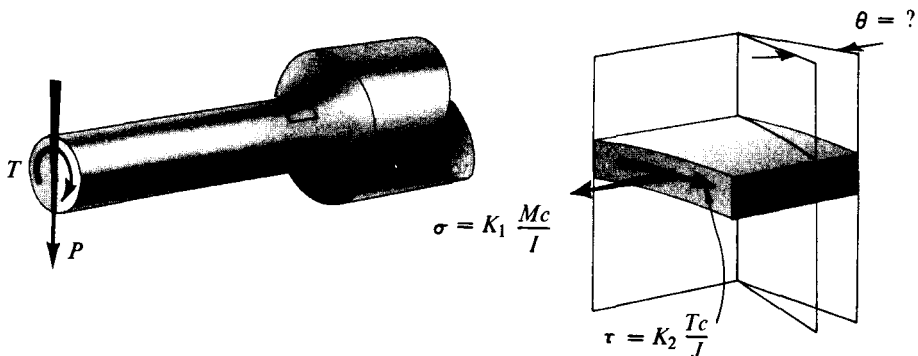
Rumus ini dapat digunakan untuk memilih diameter suatu poros yang secara bersamaan dikenakan pada lenturan dan puntiran. Dalam soal yang sedang diselidiki beberapa percobaan (trial) haruslah meyakinkan pembaca bahwa  $\sqrt{M^2 + T^2}$  merupakan yang terbesar pada sproket C; jadi irisan kritis terdapat pada C. Jadi,

$$\begin{aligned} M^2 + T^2 &= (M_{vert})^2 + (M_{horiz})^2 + T^2 \\ &= (308)^2 + (900)^2 + (2000)^2 \\ &= 4\,905\,000 \text{ N}^2 \cdot \text{m}^2 \\ d &= \sqrt[3]{\frac{16}{40 \times 10^6} \sqrt{4\,905\,000}} = 65,6 \text{ mm} \end{aligned}$$

Jadi diameter poros 66 mm yang harus dipergunakan.

Pengaruh beban kejutan pada poros telah kita abaikan dalam analisis yang di atas. Untuk beberapa peralatan yang operasinya tersendat-sendat keadaan ini memerlukan peninjauan khusus. Tegangan ijin yang semula diandaikan agaknya membolehkan untuk alur pasak dan kelelahan (fatig) bahan.

Meskipun Persamaan 10-4 dan yang serupa berdasarkan kepada kriteria kegagalan yang lain sangat luas dipergunakan dalam praktek, pembaca haruslah berhati-hati dalam memakainya. Dalam banyak mesin, diameter poros berubah secara tiba-tiba, hingga menimbulkan konsentrasi tegangan. Dalam analisis tegangan ini memerlukan penggunaan faktor konsentrasi tegangan dalam lenturan yang biasanya berbeda dengan yang dalam puntiran. Karena itu, soal tersebut haruslah ditelaah dengan meninjau tegangan yang sesungguhnya pada irisan kritis. (Lihat Gambar 10-21). Kemudian suatu prosedur yang tepat, seperti lingkaran tegangan Mohr, harus digunakan untuk menentukan tegangan yang penting; tergantung pada kriteria kehancuran yang dipilih.



Gambar 10-21 Analisis poros dengan konsentrasi tegangan

\* Lihat Soal 10-82 untuk rumus yang berdasarkan teori kegagalan tegangan maksimum.

## SOAL-SOAL UNTUK DISELESAIKAN

10-1 sampai 10-48. Untuk balok dan kerangka yang dibebani dalam satu bidang seperti yang terlihat dalam gambar-gambar yang bersangkutan, abaikanlah berat dari anggota, dan selesaikanlah variasi-variasi yang berikut:

A. Tanpa menggunakan perhitungan-perhitungan yang resmi, skets diagram-diagram gaya geser dan momen langsung di bawah diagram batang yang dibebani yang diberikan.

B. Sama dengan A, dan sebagai tambahan, perlihatkanlah bentuk kurva elastis.

C. Plot diagram-diagram gaya geser, momen, di mana yang penting, gaya aksial untuk batang-batang utama horisontal. Tentukanlah semua ordinat-ordinat kritis. Untuk Soal-soal 10-36, 10-45, 10-46 dan 10-48 diagram-diagram ini harus dibuat untuk keseluruhan bangunan.

D. Sama dengan C, dan sebagai tambahan, tentukanlah titik-titik infleksi dan perlihatkanlah bentuk kurva elastis.

E. Sama dengan C, dan sebagai tambahan, pilihlah balok-balok yang berukuran tepat yang ukuran penampangnya tetap dengan menggunakan pendekatan elastis. Jenis balok yang dipilih

ditunjukkan pada pojok kiri sebelah atas dari masing-masing gambar yang bersangkutan, yaitu:

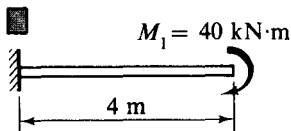
■ untuk balok kayu, untuk mana tegangan-tegangan lentur (atau normal) dan geser ijin, masing-masing adalah  $8400 \text{ kN/m}^2$  dan  $700 \text{ kN/m}^2$  dan lebarnya adalah setengah tingginya.

Ⓢ untuk balok bentuk-I baja standar dan

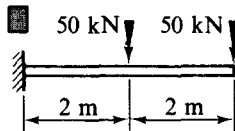
Ⓦ untuk balok baja flens lebar, untuk keduanya yang mana tegangan-tegangan lentur dan geser ijin berturut-turut adalah  $150 \text{ MPa}$  dan  $100 \text{ MPa}$ .

● untuk poros melingkar padat, untuk mana tegangan-tegangan lentur dan geser ijin berturut-turut adalah  $90 \text{ MPa}$  dan  $50 \text{ MPa}$ .

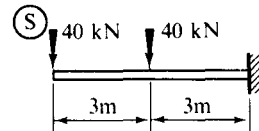
Anggaplah semua balok ditopang secara lateral. Abaikanlah konsentrasi tegangan dan efek lobang-lobang kecil terhadap kekuatan. *Jawab:* Semua diagram geser dan momen haruslah tertutup. Untuk beberapa kasus momen yang terbesar diberikan dalam tanda kurung oleh gambar-gambar yang bersangkutan dalam satu-an-satuan soal tersebut.



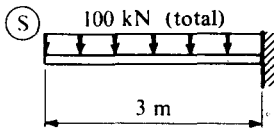
GAMBAR  
SOAL 10 - 1  $(-40)$



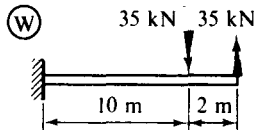
GAMBAR  
SOAL 10 - 2  $(-300)$



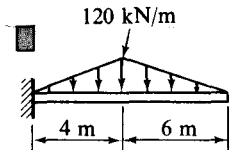
GAMBAR  
SOAL 10 - 3  $(-360)$



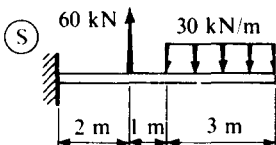
GAMBAR  
SOAL 10 - 4  $(-150)$



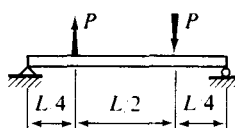
GAMBAR  
SOAL 10 - 5  $(+70)$



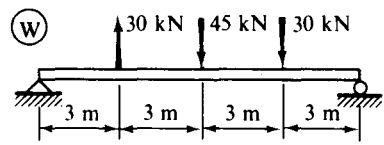
GAMBAR  
SOAL 10 - 6  $(-2800)$



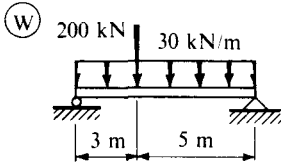
GAMBAR  
SOAL 10 - 7  $(-285)$



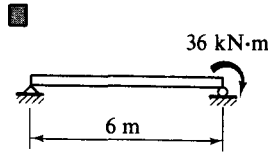
GAMBAR  
SOAL 10 - 8  $(\pm PL/8)$



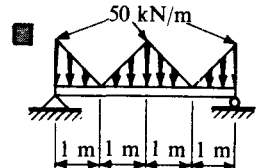
GAMBAR  
SOAL 10 - 9  $(+135)$



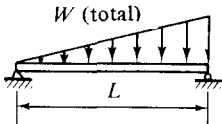
GAMBAR SOAL 10-10 (+600)



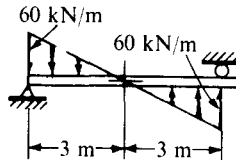
GAMBAR SOAL 10-11 (-36)



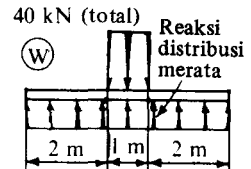
GAMBAR SOAL 10-12 (+50)



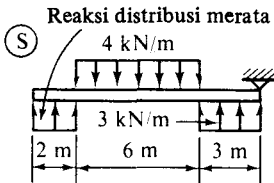
GAMBAR SOAL 10-13 (+0,128 WL)



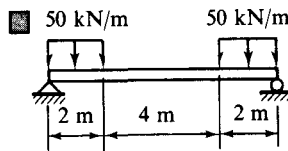
GAMBAR SOAL 10-14 ( $\pm 13.8$ )



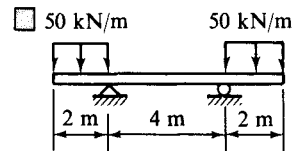
GAMBAR SOAL 10-15 (+20)



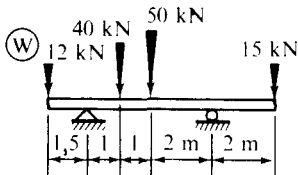
GAMBAR SOAL 10-16



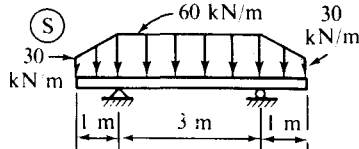
GAMBAR SOAL 10-17 (+100)



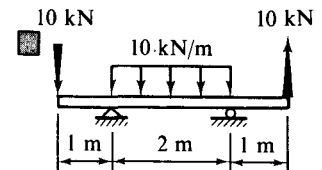
GAMBAR SOAL 10-18 (-100)



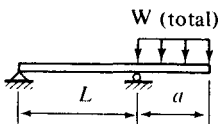
GAMBAR SOAL 10-19



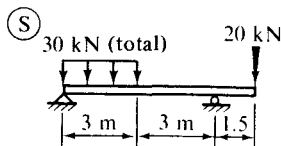
GAMBAR SOAL 10-20



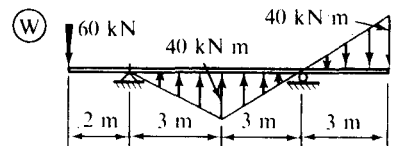
GAMBAR SOAL 10-21



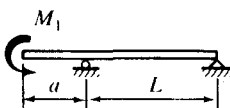
GAMBAR SOAL 10-22 ( $-Wa/2$ )



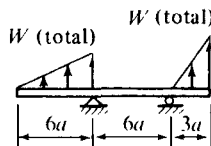
GAMBAR SOAL 10-23 (-30)



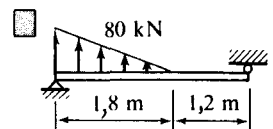
GAMBAR SOAL 10-24 (-240)



GAMBAR SOAL 10-25 ( $-M_1$ )

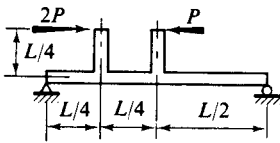


GAMBAR SOAL 10-26 ( $+2Wa$ )



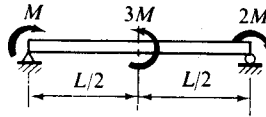
GAMBAR SOAL 10-27 (-28,3)





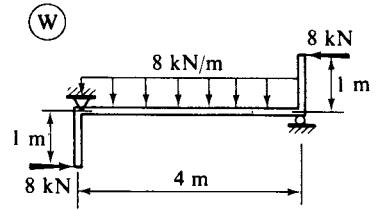
GAMBAR  
SOAL 10 – 28

( $7PL/16$ )



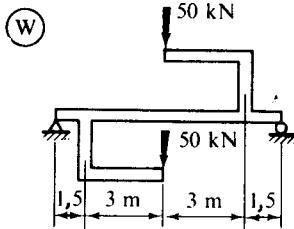
GAMBAR  
SOAL 10 – 29

( $-2M$ )

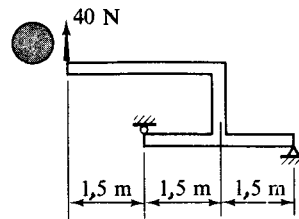


GAMBAR SOAL 10 – 30

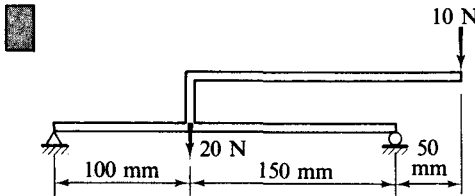
(+17)



GAMBAR SOAL 10 – 31 (+105)

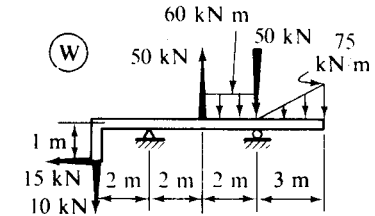


GAMBAR SOAL 10 – 32 (-90)

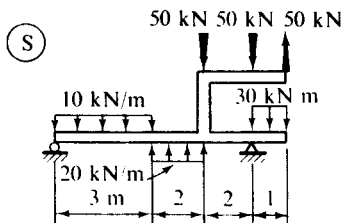


GAMBAR SOAL 10 – 33

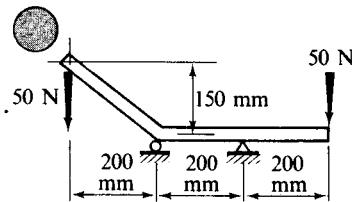
(+3 000)



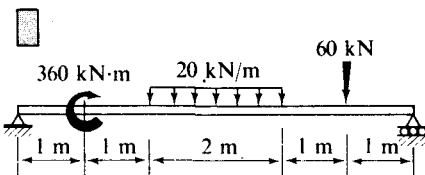
GAMBAR SOAL 10 – 34



GAMBAR SOAL 10 – 35

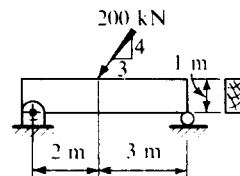


GAMBAR SOAL 10 – 36 (-10)

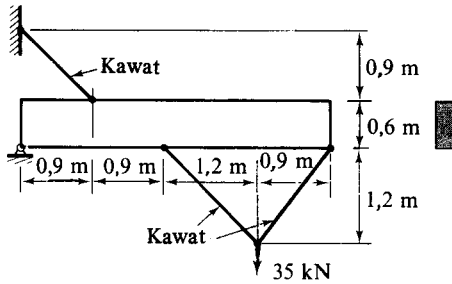


GAMBAR SOAL 10 – 37

(+330)

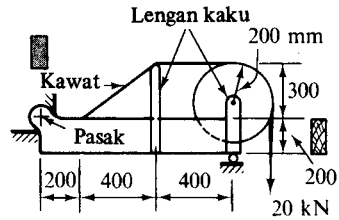


GAMBAR  
SOAL 10 – 38 (+180)

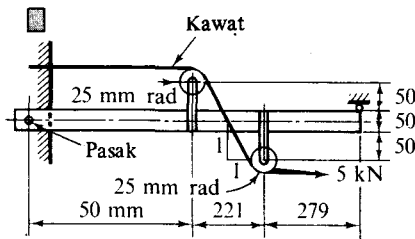


GAMBAR SOAL 10 – 39

(– 73,5)

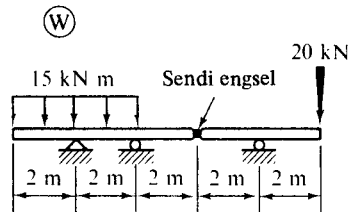


GAMBAR SOAL 10 – 40

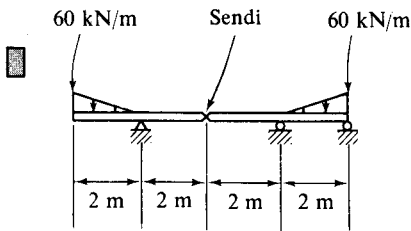


GAMBAR SOAL 10 – 41

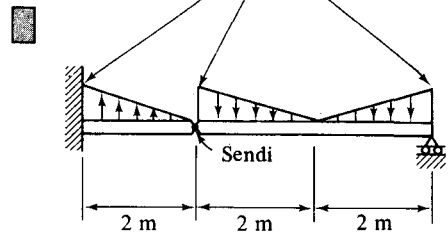
(+ 4)



GAMBAR SOAL 10 – 42 (+ 40 – 40)

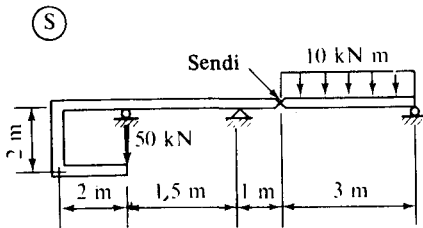


GAMBAR SOAL 10 – 43



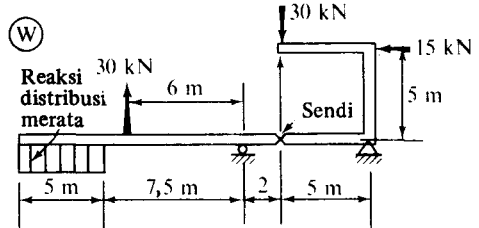
GAMBAR SOAL 10 – 44

(– 67, + 33)



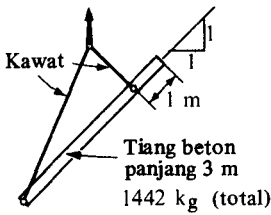
GAMBAR SOAL 10 – 45

(30, + 4,5)

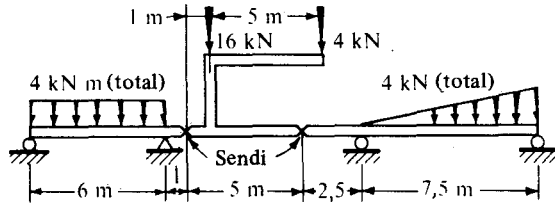


GAMBAR SOAL 10 – 46

(– 60, 150)



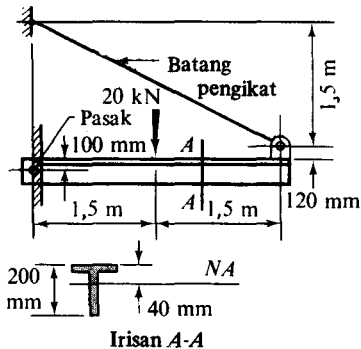
GAMBAR SOAL 10 – 47



GAMBAR SOAL 10 – 48

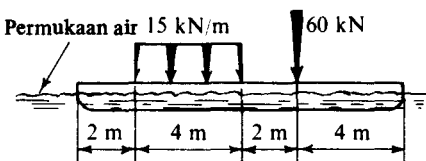
\*10-49. Gambarkanlah diagram-diagram geser, momen, dan gaya aksial untuk sebuah balok tangga dari Soal 7-13. Kemudian, dengan menganggap bahwa momen lentur maksimum menentukan disain tersebut (benarkah demikian?), pilihlah ukuran saluran (kanal) yang dibutuhkan. Tegangan ijin untuk lenturan, adalah 110 MPa dan untuk geser adalah 80 MPa.

10-50. Gambarkanlah diagram-diagram geser, momen dan gaya aksial untuk keran derek dinding yang dibebani seperti yang terlihat dalam gambar. Abaikanlah berat balok tersebut.



GAMBAR SOAL 10 – 50

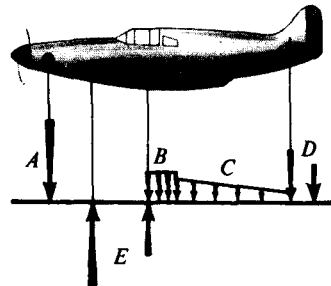
10-51. Sebuah tongkang sempit kecil dibebani seperti yang terlihat dalam gambar. Plot dia-



GAMBAR SOAL 10 – 51

gram-diagram geser dan momen untuk pembebanan terpakai tersebut. Jawab:  $-40$  kN (maksimum),  $+80$  kN·m (maksimum).

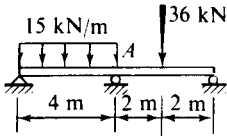
10-52. Distribusi beban untuk sebuah pesawat terbang kecil bermesin tunggal dalam penerbangan mungkin dapat diidealisasikan sebagai yang terlihat dalam gambar. Dalam diagram ini vektor  $A$  menyatakan berat mesin,  $B$  menyatakan berat kabin yang didistribusikan secara merata,  $C$  menyatakan berat badan pesawat bagian belakang dan  $D$  menyatakan gaya dari permukaan kendali ekor. Gaya ke atas  $E$  dibentuk oleh dua buah baling-baling dari sayap. Dengan data ini gambarkanlah diagram-diagram geser dan momen yang kualitatif dan masuk akal untuk badan pesawat tersebut.



GAMBAR SOAL 10 – 52

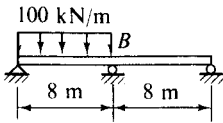
Untuk soal-soal 10-53 sampai 10-55 balok-balok statis tak tentu dibebani seperti yang terlihat dalam gambar-gambar yang bersangkutan. Dengan metoda analisis untuk struktur yang tak tentu, besaran-besaran tertentu, yang diberikan di bawah, dihitung, yang akan membuat balok-balok menjadi statis tertentu. Plotlah diagram-diagram geser dan momen untuk balok-balok ini. Tunjukkan semua harga kritis.

10-53. Reaksi di titik A 60 kN (ke atas)



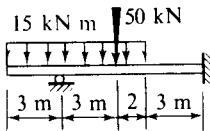
GAMBAR SOAL 10 - 53

10-54. Momen di atas tumpuan B adalah -400 kN·m.



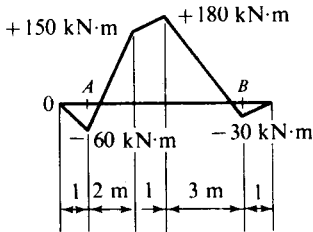
GAMBAR SOAL 10 - 54 (+612,5)

10-55. Momen pada gaya terpusat adalah +108 N·m.

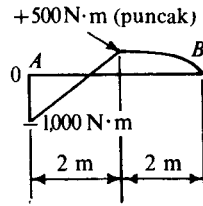


GAMBAR SOAL 10 - 55

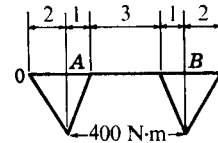
10-56 sampai \*10-61. Diagram momen untuk balok-balok yang ditumpu pada A dan B dapat dilihat dalam gambar-gambar yang bersangkutan. Bagaimana balok-balok ini dibebani? Semua garis kurva menyatakan parabola, yaitu plot dari persamaan-persamaan berderajat dua. (Petunjuk: penggambaran diagram geser membantu penyelesaian). Jawab: Reaksi pada A terdapat dalam tanda kurung dalam gambar.



GAMBAR SOAL 10 - 56

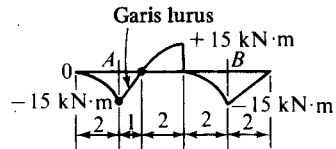


GAMBAR SOAL 10 - 57 (750)

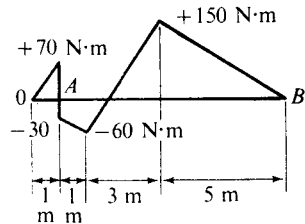


(Semua ukuran dalam m)

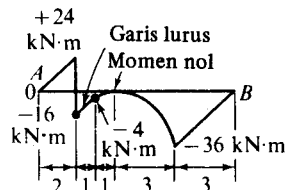
GAMBAR SOAL 10 - 58 (600)



GAMBAR SOAL 10 - 59 (7,5)



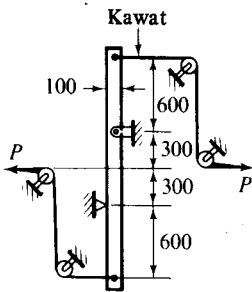
GAMBAR SOAL 10 - 60 (-100)



GAMBAR SOAL 10 - 61 (12)

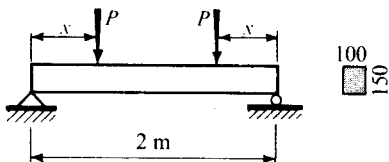
**10-62.** Kerjakan kembali Soal 10-58 yang meninjau sebelah kanan diagram momen sebagai positif.

**10-63.** Sebuah balok kayu  $50 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}$  digunakan dalam peranti yang digambarkan dalam gambar di bawah. Berapakah besar gaya tarik yang dengan aman dapat diberikan kepada kabel? Tegangan lentur ijin adalah  $10 \text{ MPa}$  sedang tegangan geser ijin adalah  $700 \text{ kPa}$ . Andaikanlah bahwa kabel, pemikul dan seterusnya, adalah memadai.



GAMBAR SOAL 10 – 63

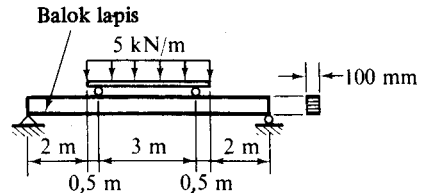
**10-64.** Sebuah balok kayu  $100 \text{ mm} \times 150 \text{ mm}$  (ukuran sesungguhnya) dibebani secara simetris dengan dua beban yang sama  $P$  seperti yang terlihat dalam gambar. Tentukanlah kedudukan beban-beban ini dan besarnya bila tegangan lentur dari  $11 \text{ MPa}$  dan tegangan geser dari  $700 \text{ kPa}$  baru dicapai. Abaikanlah berat balok tersebut.



GAMBAR SOAL 10 – 64

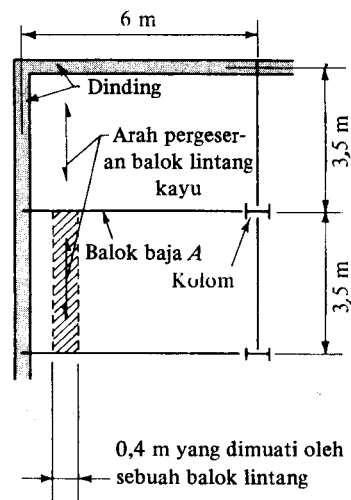
**10-65.** Balok-balok berlapis terbuat dari papan  $25 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}$  harus dibebani seperti yang terlihat dalam gambar. Bila tegangan lentur ijin dalam kayu adalah  $13 \text{ MPa}$ , dan kekuatan geser pada sambungan-sambungan perekat adalah  $350 \text{ kPa}$ , tentukanlah (a) jumlah lapisan yang diperlukan untuk membawa momen lentur tersebut, (b) jumlah lapisan yang diperlu-

kan untuk membawakan gaya geser. Jumlah lapisan yang dipilih untuk masing-masing kasus haruslah dikalikan dua. Abaikan berat balok tersebut.



GAMBAR SOAL 10 – 65

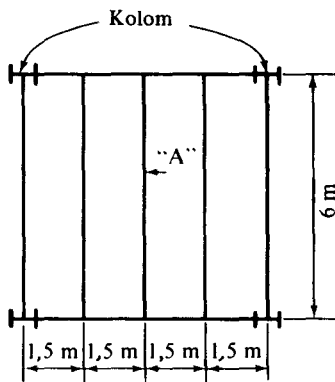
**10-66.** Suatu bagian rencana kerangka lantai untuk sebuah gedung perkantoran dapat dilihat dalam gambar. Balok-balok lintang kayu yang membentang sejauh  $3,5 \text{ m}$  masing-masing mempunyai jarak antara  $400 \text{ mm}$  dan menopang sebuah lantai kayu di atas dan plafon yang dipaster di bawah. Anggaplah bahwa lantai tersebut mungkin dibebani oleh para penghuni di mana-mana seberat  $3 \text{ kN}$  per meter bujursangkar luas lantai (beban hidup). Selanjutnya anggap pula bahwa lantai, balok lintang (kasau) dan plafon mempunyai berat  $120 \text{ kg}$  per meter bujursangkar luas lantai (beban mati). (a) Tentukanlah kedalaman yang diperlukan untuk balok-lintang tebal  $50 \text{ mm}$ . Untuk kayu tegangan lentur ijin adalah  $8 \text{ MPa}$ , sedang tegangan geser ijin adalah  $700 \text{ kPa}$ . (b) Pilihlah ukuran yang



GAMBAR SOAL 10 – 66

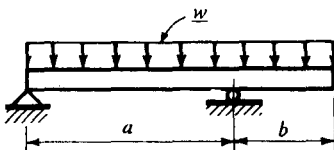
dibutuhkan untuk balok baja *A*. Karena balok-balok lintang yang memberikan beban pada balok ini berjarak antara secara rapat, maka anggaplah bahwa balok tersebut mendapatkan beban yang terdistribusi secara merata. Tegangan-tegangan ijin untuk baja adalah 140 MPa untuk lenturan dan 90 MPa untuk gaya geser. Pakailah sebuah balok *W* atau *S* yang lebih ringan. Abaikanlah lebar kolom.

10-67. Medan sebuah lantai rumah apartemen di kerangka seperti yang terlihat dalam gambar. Tentukanlah ukuran yang diperlukan dari berat minimum untuk balok baja "A". Anggaplah bahwa lantai tersebut dapat dibebani di mana-mana sebesar  $3 \text{ kN/m}^2$  luas lantai (beban hidup). Selanjutnya anggaplah bahwa berat lantai kayu keras, pelat beton bangunan, plafon yang diplaster di bawah, berat balok baja yang dipilih tadi, dan seterusnya semuanya mendekati  $380 \text{ kg/m}^2$  luas lantai (beban mati). Gunakanlah tegangan ijin yang diberikan pada bagian (b) dari Soal 10-66.



GAMBAR SOAL 10 - 67

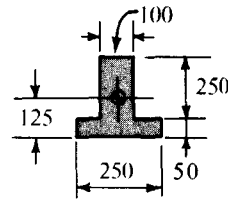
10-68. Pilihlah penampang yang diperlukan untuk balok kayu sikuempat untuk memuat



GAMBAR SOAL 10 - 68

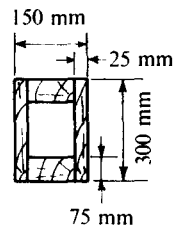
beban  $w_0 = 20 \text{ kN}$  per meter, termasuk beratnya sendiri, untuk bentangan yang terlihat dalam gambar. Tegangan lentur ijin adalah 9 MPa sedang tegangan geser ijin adalah 1 MPa. Tinggi balok tersebut adalah dua kali lebarnya. Ambil  $a = 3 \text{ m}$  dan  $b = 1,5 \text{ m}$ .

10-69. Sebuah balok-*T* mendapat tumpuan dalam cara yang sama dengan soal yang baru lalu; tetapi,  $a = 5 \text{ m}$  dan  $b = 2,5 \text{ m}$ . Ukuran penampang dari balok-*T* tersebut adalah seperti dalam gambar, momen inersia terhadap sumbu titik berat  $I$  adalah  $320 \times 10^6 \text{ mm}^4$ . Bila tegangan-tegangan ijin adalah  $8400 \text{ kN/m}^2$  untuk lenturan dan  $700 \text{ kN/m}^2$  untuk geser, berapakah beban terbesar  $w_0$  dalam kN per meter yang dapat dipikul oleh balok ini? Semua ukuran yang diberikan dalam gambar adalah dalam mm. Jawab: 4,68 kN/m.

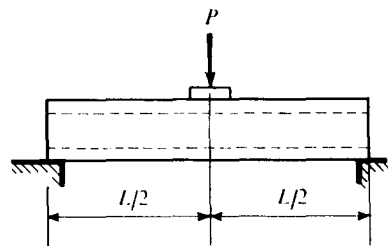


GAMBAR SOAL 10 - 69

10-70. Sebuah balok kotak dibuat dari dua keping kayu lapis 25 mm dan dua potong kayu padat 100 mm  $\times$  75 mm (ukuran sesungguhnya-



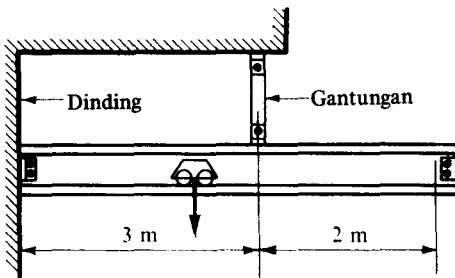
75 mm



GAMBAR SOAL 10 - 70

nya) seperti yang terlihat menurut irisan penampang dalam gambar. Bila balok ini dipergunakan untuk memuat gaya terpusat di tengah-tengah bentangan sederhana, (a) berapakah kemungkinan besar dari beban terpakai maksimum  $P$ ; (b) berapakah kemungkinan panjang bentangan dan (c) berapakah ukuran pelat dukung yang harus disediakan di bawah gaya terpusat tersebut? Abaikanlah berat balok tersebut dan anggaplah bahwa tidak ada kemungkinan bahaya penekukan lateral. Tegangan-tegangan ijin adalah: 10 MPa dalam lenturan, 825 kPa untuk geser dalam kayu lapis, 410 kPa untuk geser dalam sambungan perekat dan 2,8 MPa dalam tegangan dukung yang tegak-lurus pada urat kayu. *Jawab:* 18,2 kN; 4,53 m; 3240 mm<sup>2</sup>.

10-71. Tentukanlah ukuran yang diperlukan untuk rel balok bentuk-I dari sebuah kerek-berjalan dengan kapasitas 36 kN. Balok tersebut terpasang kepada dinding pada salah satu ujungnya dan tergantung dari sebuah konsol sebagai yang terlihat dalam gambar. Anggaplah balok tersebut mempunyai sambungan pasak dengan dinding dan dalam perhitungan abaikanlah berat dari balok tersebut. Ambillah tegangan lentur ijin sebesar 85 MPa dan tegangan geser ijin sebesar 50 MPa.

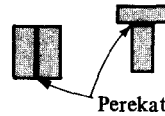


GAMBAR SOAL 10 – 71

10-72. Berapakah beban ijin terbesar yang dapat ditempatkan di tengah-tengah bentangan sederhana 1,5 m dari balok yang terbuat dari irisan W 250 × 73 bila tegangan lentur ijin adalah 165 MPa dan tegangan geser ijin adalah 95 MPa?

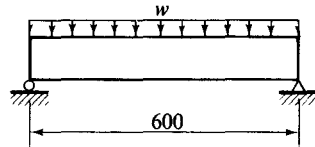
10-73. Sebuah balok plastis dibuat dari dua potong 20 mm × 60 mm membentang sampai 600 mm dan memikul beban  $w$  yang bekerja sebentar-sebentar dan terdistribusi merata. Potongan-potongan tersebut dapat disusun dalam dua cara yang berlainan seperti yang terlihat

dalam gambar. Tegangan-tegangan ijin adalah 4 MPa dalam lenturan, 600 kPa untuk geser dalam plastis, dan 400 kPa untuk geser dalam perekat. Susunan potongan manakah yang harus digunakan, dan berapakah berat beban  $w$  yang dapat diberikan?

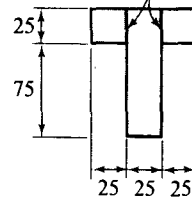


GAMBAR SOAL 10 – 73

10-74. Hitunglah beban ijin maksimum  $w$ , termasuk beratnya sendiri, untuk balok plastis yang terlihat dalam gambar. Tegangan-tegangan ijin adalah: 3500 kN/m<sup>2</sup> untuk lenturan, 700 kN/m<sup>2</sup> untuk geser dalam plastis, 350 kN/m<sup>2</sup> untuk geser dalam perekat. Semua ukuran yang diberikan dalam gambar adalah dalam mm. *Jawab:* 3,97 kN/m.



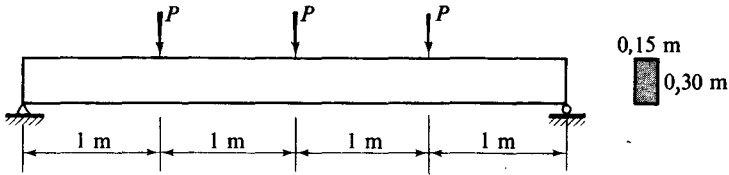
Sambungan perekat



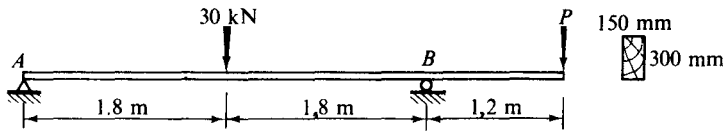
GAMBAR SOAL 10 – 74

10-75. Sebuah balok kayu 150 mm × 300 mm dibebani seperti yang terlihat dalam gambar. Abaikanlah berat balok tersebut. Tentukanlah besar gaya ijin  $P$  bila  $\sigma_{ijin} = 10\,000$  kN/m<sup>2</sup> dan  $\tau_{ijin} = 800$  kN/m<sup>2</sup>. *Jawab:* 11,25 kN.

10-76. Tegangan lentur ijin untuk balok yang terlihat dalam gambar adalah +8500 kN/m<sup>2</sup>. Tegangan ini melebihi bila beban 30 kN



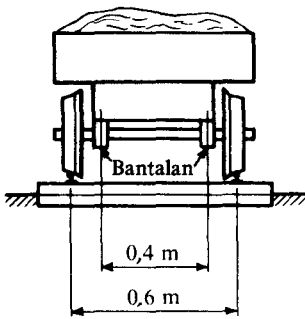
GAMBAR SOAL 10 – 75



GAMBAR SOAL 10 – 76

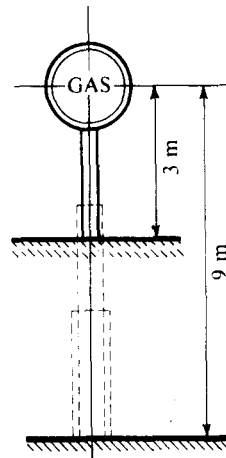
bekerja sendiri. (a) Tentukanlah harga minimum dari beban  $P$  dengan maksud tidak melebihi tegangan ijin. (b) Berapakah tegangan geser maksimum dalam balok yang dibebani penuh? *Jawab:* (a) 13,1 kN.

10-77. Sebuah kendaraan beroda empat yang berjalan di atas rel dipergunakan dalam pelayanan industri ringan. Bila dibebani maka kendaraan ini akan mempunyai berat total 4000 kg. Bila bantalan diletakkan berkenaan dengan rel seperti yang terlihat dalam gambar, berapakah ukuran poros melingkar yang dipergunakan? Anggaplah tegangan lentur ijin menjadi 80 MN/m<sup>2</sup> sedang tegangan geser ijin adalah 40 MN/m<sup>2</sup>. *Jawab:* 49,3 mm.



GAMBAR SOAL 10 – 77

10-78. Dalam banyak soal disain teknik adalah sukar sekali untuk menentukan besar beban yang akan bekerja pada suatu struktur atau bagian mesin. Pelaksanaan yang memuaskan dalam instalasi yang ada dapat memberikan dasar untuk perhitungan. Dengan pemikiran ini, andaikanlah bahwa suatu rambu tertentu, seperti yang terlihat dalam gambar, telah bekerja dengan memuaskan pada pipa baja standar O.D. 114,3 mm bila titik beratnya berada 3 m di atas tanah. Berapakah ukuran pipa seharusnya bila rambu tersebut dinaikkan menjadi 9 m di atas



GAMBAR SOAL 10 – 78

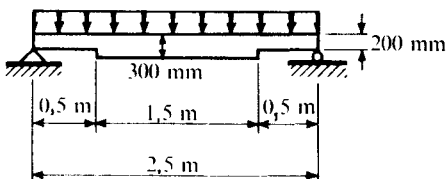


tanah? Anggaplah bahwa tekanan angin terhadap rambu tersebut pada ketinggian yang lebih besar akan 50 persen lebih besar dari bila rambu berada pada instalasi semula. Ukuran pipa yang berubah-ubah di sepanjang pipa tersebut diperlukan; tetapi untuk memudahkan dalam pembuatan, pipa tersebut dapat dibuat secara berturut-turut memasang beberapa segmen pipa yang antara satu sama lain pas untuk disambung. Dalam menyusun segmen pipa tersebut berikan pula beberapa pendapat yang berhubungan dengan pertimbangan estetika. Untuk kemudahan dalam perhitungan, abaikanlah berat pipa-pipa dan tekanan angin terhadap pipa itu sendiri.

**10-79.** Rancanglah sebuah balok kantilever yang berkekuatan tetap untuk melawan beban yang tersebar dengan merata. Anggaplah lebar balok tersebut konstan.

**10-80.** Sebuah balok S 250 × 37,8 ditutupi dengan dua pelat 12 mm × 150 mm seperti yang terlihat dalam Gambar 10-19(a). ( $I$  dari irisan gabungan adalah  $115,3 \times 10^6 \text{ mm}^4$ ), dan ia membentang sejauh 6 m. (a) Berapakah gaya terpusat dapat dilakukan pada pusat bentangan bila tegangan lentur ijin adalah 110 MPa? (b) Untuk beban yang di atas, di manakah letak titik-titik teoritis di bawah mana pelat penutup tidak meluas? Abaikanlah berat balok tersebut dan anggaplah bahwa balok tersebut diperkuat secara lateral.

**10-81.** Bagian tengah sebuah balok sederhana yang panjang totalnya adalah 2,5 m, mempunyai lebar 150 mm dan tinggi 300 mm; ujung yang seperlima mempunyai lebar 150 mm dan tinggi 200 mm. (Lihat gambar). Tentukanlah beban yang aman dan tersebar secara merata yang dapat dibawa oleh balok ini bila tegangan lentur ijin adalah 10 MPa dan tegangan geser ijin adalah 1 MPa. Abaikanlah konsentrasi tegangan pada perubahan penampang. *Jawab:* 16 kN/m.

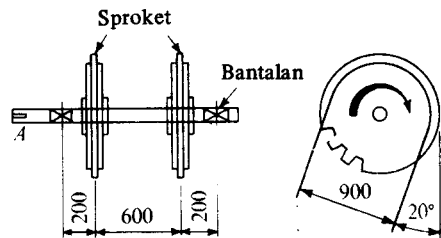


GAMBAR SOAL 10 – 81

**10-82.** (a) Buktikanlah bahwa tegangan utama yang lebih besar untuk poros melingkar yang secara bersamaan menerima momen puntir dan momen lentur adalah  $\sigma_1 = (c/J)(M + \sqrt{M^2 + T^2})$ . (b) Buktikanlah bahwa rumus desain untuk poros, yang didasarkan pada teori tegangan maksimum adalah  $d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi \sigma_{ijin}} (M + \sqrt{M^2 + T^2})}$ .

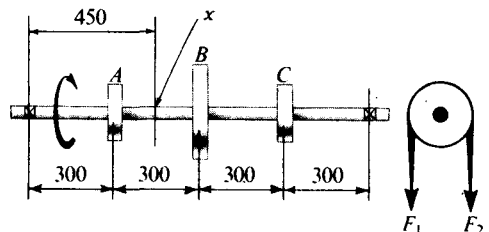
**10-83.** Pada suatu irisan kritis, sebuah poros melingkar padat meneruskan momen puntir 40 kN·m dan momen lentur dari 10 kN·m. Tentukanlah ukuran poros yang dibutuhkan sehingga tegangan geser maksimum (utama) tidak akan melebihi 50 MPa.

**10-84.** Poros kepala dari sebuah elevator buket yang miring diatur sebagai yang terlihat dalam gambar. Ia digerakkan pada titik A dengan putaran 11 rpm dan memerlukan 40 kW untuk operasi yang mantap. Dengan menganggap bahwa setengah daya kuda yang diberikan digunakan pada masing-masing roda rantai (sproket), tentukanlah ukuran poros yang dibutuhkan hingga tegangan geser maksimum tidak akan melebihi 40 MPa. Tegangan yang ditentukan membolehkan untuk alur pasak



GAMBAR SOAL 10 – 84

**10-85.** Sebuah poros yang dipasang dengan katrol terlihat dalam gambar. Bantalan-bantalan ujung dapat meluruskan diri, yaitu mereka

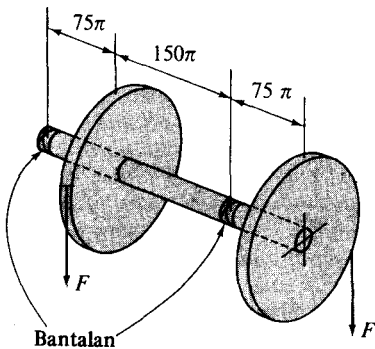


GAMBAR SOAL 10 – 85

tidak menimbulkan momen kepada poros pada tumpuan. Katrol *B* adalah katrol penggerak. Katrol *A* dan *C* adalah katrol yang digerakkan dan masing-masing mengangkat momen puntir sebesar 1200 N·m dan 400 N·m. Resultante gaya tarik pada masing-masing katrol adalah 1800 N yang bekerja ke bawah. Tentukanlah ukuran poros yang diperlukan hingga tegangan geser utama tidak akan melebihi 40 MPa.

**10-86.** Bila poros dalam Soal 10-85 mempunyai diameter 50 mm, berapakah besar dan arah tegangan-tegangan utama di *X*?

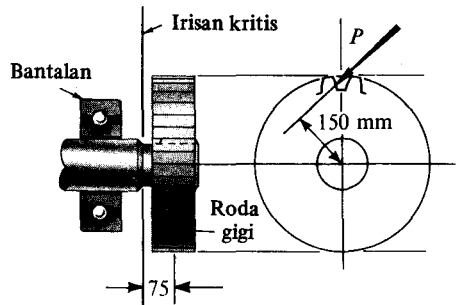
**10-87.** Dua katrol yang mempunyai radius  $100\pi$  mm dipasang pada poros melingkar padat dengan diameter 40 mm yang ditumpu oleh bantalan-bantalan seperti yang terlihat dalam gambar. Bila tegangan geser utama maksimum terbatas pada 35 MPa, berapakah harga tertinggi dari gaya *F* yang dapat kita andaikan? Tegangan langsung yang disebabkan oleh *V* tidak perlu ditinjau.



GAMBAR SOAL 10 – 87

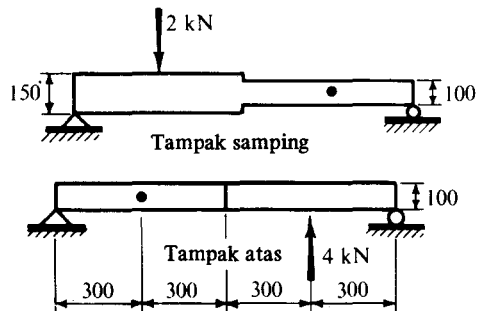
**10-88.** Sebuah poros berkecepatan rendah mendapat beban terpakai secara eksentris *P* yang disebabkan oleh gaya yang terbentuk antara roda-roda gigi. Tentukanlah besarnya harga ijin gaya *P* yang berdasar teori tegangan geser maksimum bila  $\tau_{ijin} = 45$  MPa. Diameter kecil dari poros yang tergantung di atas adalah 75 mm. Tinjaulah irisan kritis di mana poros berubah diameternya dan bahwa  $M = 0,075P$  N·m dan  $T = 0,15P$  N·m. Perhatikan bahwa karena ukuran diameter berubah secara mendadak, maka faktor konsentrasi tegangan yang berikut

haruslah ditinjau:  $K_1 = 1,6$  dalam lenturan, dan  $K_2 = 1,2$  dalam puntiran.



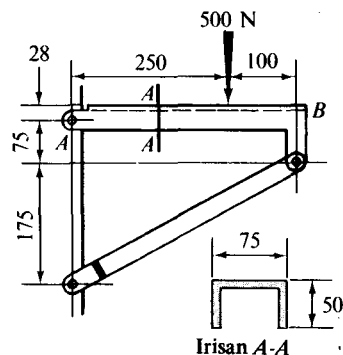
GAMBAR SOAL 10 – 88

**10-89.** Dengan mengabaikan berat balok dan konsentrasi tegangan pada perubahan penampangnya, hitunglah tegangan lentur terbesar untuk balok yang dibebani seperti yang terlihat dalam gambar. Semua ukuran dalam gambar tersebut adalah dalam mm.



GAMBAR SOAL 10 – 89

**10-90.** Hitunglah tegangan maksimum dalam

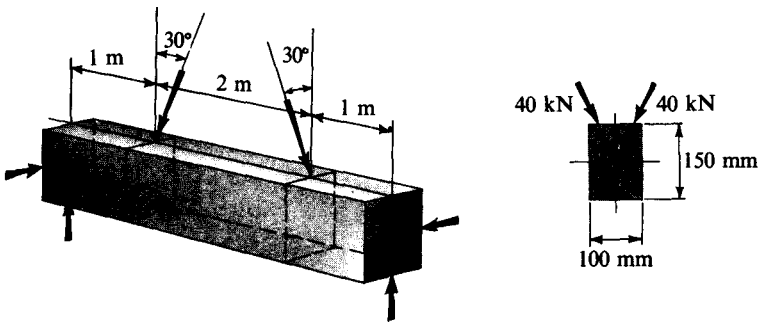


GAMBAR SOAL 10 – 90

bagian mesin  $AB$  yang dibebani seperti yang terlihat dalam gambar. Bagian  $AB$  terbuat dari pelat baja rol panas ukuran 3 mm. Anggaplah sambungan-sambungan didisain secara sebagaimana mestinya. Abaikanlah berat bagian-bagian tersebut.  $I$  pada irisan  $AA$  terhadap sumbu netral adalah  $130 \times 10^3 \text{ mm}^4$ .

10-91. Sebuah balok yang panjangnya 4 m dibebani seperti yang terlihat dalam gambar.

Kedua gaya terpakai bekerja tegak lurus terhadap sumbu yang panjang dari balok dan membuat kemiringan  $30^\circ$  dengan garis vertikal. Bila gaya-gaya ini bekerja melalui titik berat daerah penampang, tentukanlah letak dan besar tegangan lentur maksimum. Abaikanlah berat balok tersebut. *Jawab:*  $\pm 172 \text{ MN/m}^2$ .



GAMBAR SOAL 10 – 91



# 11 Defleksi Balok

## 11-1 PENDAHULUAN

Sumbu sebuah balok akan berdefleksi (atau melentur) dari kedudukannya semula bila berada di bawah pengaruh gaya terpakai. Harga-harga defleksi balok yang akurat diselidiki dalam banyak kasus praktis. Unsur-unsur dari mesin haruslah cukup tegar untuk mencegah ketidak-sebarisan dan mempertahankan ketelitian dimensional terhadap pengaruh beban. Dalam gedung-gedung, balok-balok lantai tidak dapat melentur secara berlebihan untuk meniadakan pengaruh psikologis yang tidak diinginkan pada para penghuni dan untuk memperkecil atau mencegah kekecewaan dengan bahan-bahan jadi yang rapuh. Begitu pula keterangan mengenai karakteristik deformasi dari bagian struktur adalah penting untuk mempelajari getaran mesin seperti juga dengan bangunan-bangunan stasioner dan penerbangan.

Persamaan-persamaan diferensial dasar untuk defleksi balok akan dikembangkan dalam bab ini. Penyelesaian persamaan-persamaan ini akan digambarkan secara terperinci. Yang akan ditinjau hanyalah defleksi yang disebabkan oleh gaya-gaya yang bekerja tegaklurus terhadap sumbu balok. Keadaan di mana gaya-gaya aksial terjadi bersamaan akan dibahas dalam Bab 13.

Teori dasar yang dikembangkan dalam bab ini terbatas pada defleksi yang kecil dibandingkan dengan panjang bentangan. Pendapat mengenai ketelitian yang digunakan dapat dicapai dengan memperhatikan, umpamanya, kita mendapatkan kesalahan sekitar 1% dari jawaban yang eksak, bila defleksi dari bentangan sederhana berada dalam ordo seperdua puluh dari panjangnya. Dengan menggandakan defleksi tersebut menjadi sepersepuluh panjang bentangan, yang biasanya dipandang sebagai defleksi besar yang tidak dikehendaki, maka kesalahan yang ditimbulkan adalah sekitar 4%. Karena bagian struktur melentur yang kaku dibutuhkan dalam kebanyakan pemakaian teknik, pembatasan dari teori ini tidaklah mengkhawatirkan. Untuk lebih jelas, bagaimana pun, dalam semua diagram, defleksi balok tersebut akan terlihat secara berlebihan.

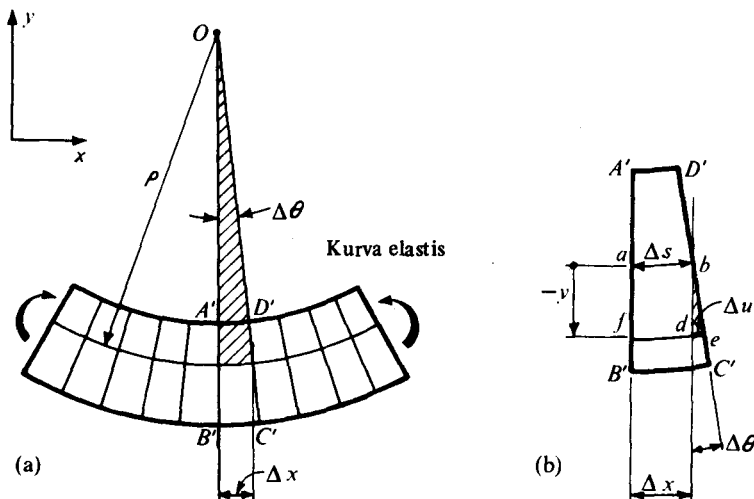
Hanya defleksi yang disebabkan oleh lenturan yang akan kita tinjau dalam bab ini. Yang disebabkan oleh gaya geser akan kita bahas dalam Bab 15 (terutama lihatlah Contoh 15-6).

Kedua macam defleksi elastis dan tak elastis akan kita tinjau pula dalam bab ini. Tetapi berhubung perhitungan-perhitungan defleksi balok yang tak elastis sangat sukar dilakukan, maka ilustrasi yang kita gambarkan terutama dari kasus-kasus yang elastis. Karena jawaban beberapa soal balok elastis statis tak tentu menunjukkan tidak ada kesukaran matematis tambahan dibandingkan dengan kasus tertentu, maka pemecahan persoalan demikian akan dibahas dalam bab ini. Pembahasan sistem struktur statis tak tentu yang lebih lengkap akan dibahas dalam bab yang berikutnya.

Setelah menurunkan persamaan-persamaan diferensial dasar untuk defleksi balok serta mempertunjukkan syarat-syarat batas, maka sisa dari bab ini akan dicurahkan kepada dua metoda mendapatkan defleksi balok lurus: prosedur integrasi langsung yang bermanfaat bila kurva elastis sempurna perlu ditentukan; dan apa yang disebut *metoda luas-momen* (moment-area), yang baik sekali bila yang diperhatikan hanyalah defleksi pada beberapa titik saja.

## 11-2 HUBUNGAN KURVA-REGANGAN (STRAIN-CURVATURE) DAN KURVA-MOMEN (MOMEN-CURVATURE)

Untuk mengembangkan teori defleksi balok, kita haruslah meninjau geometri atau kinematika dari deformasi sebuah elemen dari balok. Kinematika dasar yang menghipotesa bahwa irisan-irisan yang berbentuk bidang datar akan tetap merupakan bidang datar selama berdeformasi, yang telah kita perkenalkan dalam Pasal 5-3, akan merupakan dasar dari teori ini. Pekerjaan ini mengabaikan deformasi geser dari balok. Untunglah defleksi yang disebabkan oleh gaya geser biasanya sangat kecil. (Lihat Contoh 15-6).



Gambar 11-1 Deformasi segmen balok dalam lenturan

Untunglah defleksi yang disebabkan oleh gaya geser biasanya sangat kecil. (Lihat Contoh 15-6).

Sebuah segmen yang semula balok lurus diperlihatkan dalam keadaan berdeformasi dalam Gambar 11-1(a). Diagram ini serupa dengan Gambar 5-2, yang digunakan untuk mendapatkan distribusi tegangan dalam balok yang disebabkan oleh lenturan. Sumbu defleksi dari balok tersebut, yaitu *kurva elastis*, terlihat melentur menjadi radius  $\rho$ . Pusat kurva  $O$  untuk radius setiap elemen dapat diperoleh dengan memperluas perpotongan setiap dua irisan yang berdekatan seperti  $A'B'$  dan  $D'C'$ . Untuk yang sekarang kita mengandaikan bahwa lenturan terjadi sekitar salah satu sumbu utama irisan penampang.

Dalam pandangan yang diperbesar dari elemen  $A'B'C'D'$  dalam Gambar 11-1(b), dapat kita lihat bahwa dalam balok yang melentur sudut yang termasuk antara dua irisan yang berdampingan adalah  $\Delta\theta$ . Bila jarak  $y$  dari permukaan netral kepada serat-serat yang diregangkan yang diukur dengan cara yang biasa sebagai positif mengarah ke atas, maka deformasi  $\Delta u$  dari setiap serat dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\Delta u = -y \Delta\theta \quad (11-1)$$

Untuk  $y$  yang negatif ini menghasilkan perpanjangan yang konsisten dengan deformasi, seperti terlihat dalam gambar.

Serat-serat yang terletak pada permukaan kurva netral dari balok yang berdeformasi, yang dikarakterisasikan dalam Gambar 11-1(b) sebagai serat  $ab$ , tidaklah mengalami regangan sama sekali. Karena itu panjang busur  $\Delta s$  menunjukkan panjang semula dari semua serat yang terdapat antara irisan-irisan  $A'B'$  dan  $D'C'$ . Dengan mengingat hal ini, dengan membagi Persamaan 11-1 dengan  $\Delta s$ , kita dapat membentuk hubungan yang berikut:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta s} = -y \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \quad \text{atau} \quad \frac{du}{ds} = -y \frac{d\theta}{ds} \quad (11-2)$$

Kita dapat mengenal bahwa  $du/ds$  merupakan regangan linier dalam serat balok pada jarak  $y$  dari sumbu netral. Jadi

$$du/ds = \epsilon \quad (11-3)$$

Suku  $d\theta/ds$  dalam Persamaan 11-2 mempunyai arti geometris yang jelas. Dengan bantuan Gambar 11-1(a) kita melihat bahwa, karena  $\Delta s = \rho \Delta\theta$ ,

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} = \kappa \quad (11-4)$$

yang merupakan definisi kurva\*  $\kappa$  (kappa).

Dengan dasar di atas, dengan substitusi Persamaan-persamaan 11-3 dan 11-4 ke

\* Perhatikan bahwa  $\theta$  dan  $s$  keduanya harus bertambah besar dalam arah yang sama.

dalam Persamaan 11-2, kita dapat menyatakan hubungan dasar antara kurva elastis dan regangan linier sebagai

$$\frac{1}{\rho} = \kappa = -\frac{\epsilon}{y} \quad (11-5)$$

Perlu dicatat bahwa karena tidak ada sifat-sifat bahan yang digunakan untuk menurunkan Persamaan 11-5, maka hubungan ini dapat dipergunakan untuk masalah-masalah elastis maupun tidak. Dalam kasus yang terakhir, adalah bijaksana untuk memperhatikan bahwa, karena  $\epsilon = \epsilon_x = \sigma_x/E$  dan  $\sigma_x = -My/I$ , maka

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (11-6)$$

Persamaan ini menghubungkan momen lentur  $M$  pada irisan yang diketahui dari balok tak elastis yang mempunyai momen inersia  $I$  terhadap sumbu netral kepada kurva  $1/\rho$  dari kurva elastis.

#### CONTOH 11-1

Untuk memotong logam sebuah gergaji pita dengan lebar 15 mm dan tebal 0,50 mm berjalan melintasi dua katrol yang berdiameter 400 mm. Berapakah tegangan lentur maksimum yang terjadi dalam gergaji tersebut, ketika ia melintasi sebuah katrol? Ambillah  $E = 200 \times 10^3$  MPa.

#### PENYELESAIAN

Dalam pemakaian ini bahan tersebut haruslah bersifat secara elastis. Ketika daun gergaji yang tipis tersebut melintasi katrol, ia menyesuaikan diri dengan radius katrol; jadi,  $\rho \approx 200$  mm.

Dengan menggunakan Persamaan 5-1a,  $\sigma = -My/I$ , dengan Persamaan 11-6, (setelah sedikit penyederhanaan), menghasilkan hubungan yang secara umum sangat bermanfaat:

$$\sigma = -Ey/\rho \quad (11-7)$$

dengan  $y = \pm c$ , tegangan lentur maksimum dalam gergaji ditentukan :

$$\sigma_{\max} = \frac{Ec}{\rho} = \frac{(200)(10^3)(0,25)}{200} = 250 \text{ MPa}$$

Tegangan tinggi yang terjadi dalam gergaji pita tersebut memerlukan bahan-bahan yang istimewa untuk penggunaan ini.

#### \*11-3 PENENTUAN PERSAMAAN DIFERENSIAL UNTUK DEFLEKSI BALOK ELASTIS

Dalam buku mengenai ilmu ukur analitik dapat dibuktikan bahwa dalam koordinat



Cartesian kurva suatu garis didefinisikan sebagai

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{v''}{[1 + (v')^2]^{3/2}} \quad (11-8)$$

di mana  $x$  dan  $v$  merupakan koordinat sebuah titik pada suatu kurva. Dalam hubungan persoalan yang sedang ditinjau, jarak  $x$  menentukan letak sebuah titik pada kurva elastis dari balok yang mengalami defleksi, dan  $v$  memberikan defleksi beberapa titik yang sama dari kedudukan awal.

Bila Persamaan 11-8 disubstitusikan ke dalam Persamaan 11-5 atau 11-6, maka persamaan diferensial eksak kurva elastis akan memberikan hasil. Umumnya, penyelesaian persamaan seperti itu sangat sukar dicapai. Tetapi karena defleksi yang diterima oleh sebagian besar struktur-struktur teknik adalah sangat kecil, maka kemiringan  $dv/dx$  dari kurva elastis adalah sangat kecil. Karena itu kuadrat dari kemiringan  $v'$  merupakan besaran yang dapat diabaikan bila dibandingkan dengan seluruh kesatuan, hingga Persamaan 11-8 disederhanakan menjadi:

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2v}{dx^2} \quad (11-9)$$

Berdasarkan ini penentuan persamaan diferensial untuk defleksi sebuah balok elastis\* mengikuti Persamaan 11-6 dan adalah

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (11-10)$$

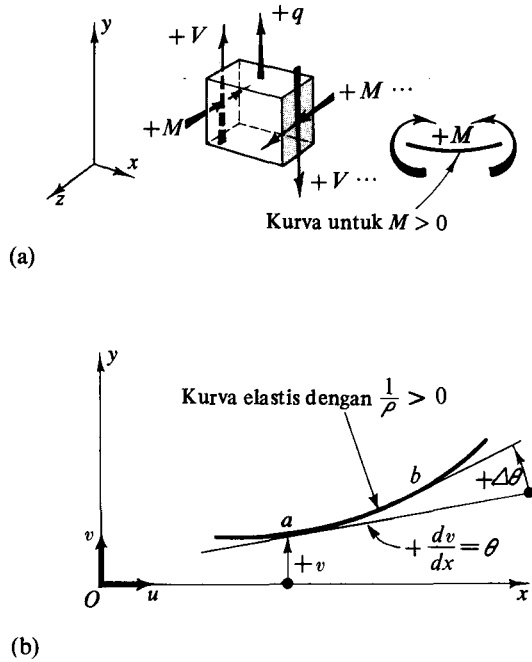
di mana dapat dimengerti bahwa  $M = M_{zz}$ , dan  $I = I_{zz}$ .

Perlu diperhatikan bahwa dalam Persamaan 11-10 sistem koordinat  $xyz$  dipergunakan untuk menentukan letak titik-titik bahan dalam sebuah balok untuk menghitung momen inersia  $I$ . Di pihak lain, dalam soal planar (dua dimensi), adalah sistem sumbu-sumbu  $xv$  yang dipergunakan untuk menentukan letak titik-titik pada kurva elastis.

Arah positif dari sumbu  $v$  diambil untuk mempunyai sikap yang sama dengan yang positif dari sumbu  $y$  dan arah positif dari beban terpakai  $q$ , Gambar 11-2. Terutama perhatikanlah bahwa bila kemiringan positif  $dv/dx$  dari kurva elastis menjadi lebih positif begitu  $x$  bertambah besar, maka kurva  $1/\rho \approx d^2v/dx^2$  adalah positif. Sikap kurva ini sesuai dengan kurva yang disebabkan oleh momen positif terpakai  $M$ . Dengan pertimbangan ini maka tanda-tanda pada kedua ruas Persamaan 11-10 menjadi positif.

Dalam beberapa buku arah positif untuk defleksi  $v$  diambil dengan arah ke bawah dengan sumbu- $x$  diarahkan ke kanan. Untuk pemilihan koordinat yang demikian kurva positif adalah yang cekung ke bawah. Pada hal, bila sikap yang biasa untuk momen yang positif tetap dipakai, Gambar 11-2(a), maka kurva yang bersangkutan dari balok yang melentur adalah cekung ke atas. Karena itu, kurva yang disebabkan oleh momen positif

\* Persamaan kurva elastis dirumuskan oleh James Bernoulli, matematikawan Swiss, dalam tahun 1694, Leonhard Euler (1707–83) berjasa memperluas pemakainnya.



Gambar 11-2 Momen dan hubungannya dengan kurva

$M$  berlawanan terhadap hubungan tersebut dengan kurva positif dari kurva elastis, kita dapatkan

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (11-11)$$

Dalam buku ini hanya Persamaan 11-10 yang digunakan.

Adalah penting dan menarik untuk mencatat bahwa untuk kurva elastis, pada tingkat ketelitian Persamaan 11-10, kita dapatkan  $ds = dx$ . Ini mengikuti kenyataan bahwa, seperti sebelumnya, kuadrat dari kemiringan  $dv/dx$  adalah kecil sekali dibandingkan dengan kesatuan, dan

$$ds = \sqrt{dx^2 + dv^2} = \sqrt{1 + (v')^2} dx \approx dx \quad (11-12)$$

Jadi, dalam teori defleksi yang kecil, tidak ada perbedaan panjang yang terjadi antara panjang sumbu balok awal dengan busur kurva elastis. Dengan perkataan lain, tidak ada penyimpangan horisontal yang terjadi pada titik-titik yang terletak pada permukaan netral yakni pada  $y = 0$ .

#### 11-4 PERSAMAAN DIFERENSIAL ALTERNATIF UNTUK BALOK ELASTIS

Hubungan-hubungan diferensial antara beban terpakai, gaya geser dan momen (Persamaan 6-1 dan 10-1) dapat digabungkan dengan Persamaan 11-10 untuk menghasilkan sederetan persamaan yang bermanfaat :

$$\begin{aligned}
 v &= \text{defleksi kurva elastis} \\
 \theta &= \frac{dv}{dx} = v' = \text{kemiringan kurva elastis} \\
 M &= EI \frac{d^2v}{dx^2} = EIv'' \\
 V &= \frac{dM}{dx} = \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2v}{dx^2} \right) = (EIv'')' \\
 q &= \frac{dV}{dx} = \frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2v}{dx^2} \right) = (EIv'')''
 \end{aligned} \tag{11-13}$$

Dalam menggunakan hubungan-hubungan ini, kaidah tanda yang diperlihatkan dalam Gambar 11-2 haruslah dipatuhi. Untuk balok dengan kekakuan lentur  $EI$  yang konstan, Persamaan 11-13 disederhanakan menjadi tiga persamaan alternatif lain untuk menentukan defleksi dari balok yang dibebani :

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = M(x) \tag{11-14}$$

$$EI \frac{d^3v}{dx^3} = V(x) \tag{11-15}$$

$$EI \frac{d^4v}{dx^4} = q(x) \tag{11-16}$$

Pemilihan persamaan untuk kasus tertentu tergantung kepada kemudahan memilih suatu pernyataan mengenai beban, geser, atau momen yang dapat dirumuskan. Beberapa tetapan integrasi diperlukan untuk persamaan-persamaan berderajat lebih rendah.

#### 11-5 SYARAT-SYARAT BATAS

Untuk penyelesaian soal-soal defleksi balok, sebagai tambahan terhadap persamaan-persamaan diferensial, maka syarat-syarat batas haruslah lebih dulu ditentukan. Antara lain beberapa jenis syarat batas homogen adalah sebagai berikut:

1. *Tumpuan apit atau jepit*: Dalam hal ini simpangan  $v$  dan kemiringan  $dv/dx$  haruslah nol. Kemudian pada ujung yang ditinjau, di mana  $x = a$ ,

$$v(a) = 0, \quad v'(a) = 0 \tag{11-17a}$$

2. *Tumpuan rol atau pasak*: Pada ujung yang ditinjau, tidak terdapat defleksi  $v$  dan tidak ada momen  $M$ . Jadi

$$v(a) = 0, \quad M(a) = EIv''(a) = 0 \quad (11-17b)$$

Di sini keadaan kenyataan secara fisis untuk  $M$  berhubungan dengan turunan  $v$  terhadap  $x$  dari Persamaan 11-14.

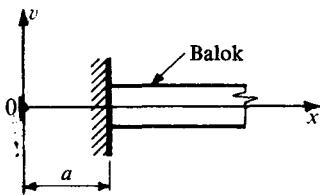
3. *Ujung bebas*: Ujung seperti ini bebas dari momen dan geser. Jadi

$$M(a) = EIv''(a) = 0, \quad V(a) = (EIv''')'_{x=a} = 0 \quad (11-7c)$$

4. *Tumpuan kendali (guided support)*: Dalam kasus ini gerakan vertikal bebas diperbolehkan, tetapi perputaran ujung dicegah. Tumpuan ini tidak mampu melawan setiap geseran. Karenanya

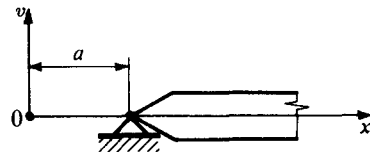
$$v'(a) = 0, \quad V(a) = (EIv''')'_{x=a} = 0 \quad (11-17d)$$

Syarat-syarat batas yang sama untuk  $EI$  yang konstan disimpulkan dalam Gambar 11-3. Perhatikanlah bahwa ada dua jenis syarat batas yang secara dasar adalah berbeda. Beberapa syarat batas yang menyinggung besaran-besaran gaya dikatakan sebagai me-



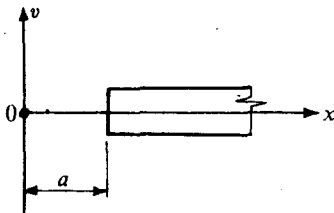
$$\begin{cases} v(a) = 0 \\ \theta(a) = v'(a) = 0 \end{cases}$$

(a) Tumpuan jepit



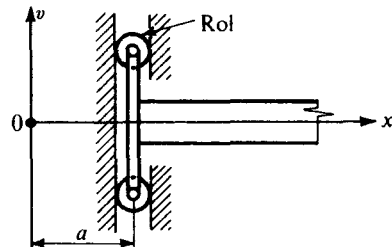
$$\begin{cases} v(a) = 0 \\ M(a) = EIv''(a) = 0 \end{cases}$$

(b) Tumpuan sederhana



$$\begin{cases} M(a) = EIv''(a) = 0 \\ V(a) = EIv'''(a) = 0 \end{cases}$$

(c) Ujung bebas



$$\begin{cases} \theta(a) = v'(a) = 0 \\ V(a) = EIv'''(a) = 0 \end{cases}$$

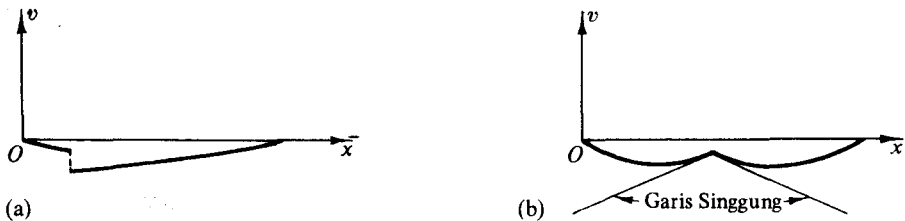
(d) Tumpuan kendali

**Gambar 11-3** Syarat batas homogen untuk balok dengan  $EI$  yang tetap. Pada (a) kedua syarat adalah kinematik, pada (c) keduanya adalah statis; pada (b) dan (d), syarat bercampur.

upakan *syarat batas statis*. Sedang yang lainnya yang menggambarkan sifat geometris atau deformasional dari ujung yang disebut *syarat batas kinematik*.

Syarat batas yang bukan homogen, di mana geser, momen, rotasi, atau penyimpangan yang dilukiskan pada syarat batas, terjadi pula dalam pemakaian. Dalam kasus demikian harga nol yang terdapat dalam Persamaan-persamaan 11-17a sampai 11-7d yang sesuai, digantikan jumlah besaran tertentu.

Dalam beberapa penyelesaian syarat-syarat fisis dari kontinuitas kurva elastis haruslah dibawa ke dalam tambahan syarat batas. Ini berarti bahwa pada setiap sambungan dua zona dari balok defleksi dan garis singgung pada kurva elastis haruslah sama, tanpa memperhatikan arah dari mana titik bersama itu dapat didekati. Keadaan dalam Gambar 11-4 tidaklah memungkinkan. Syarat keseimbangan gaya dan momen terkandung secara mutlak dalam syarat-syarat kontinuitas.



Gambar 11-4 Keadaan yang tidak mungkin dalam kurva elastis yang kontinu

### 11-6 PENYELESAIAN SOAL-SOAL DEFLEKSI BALOK DENGAN INTEGRASI LANGSUNG.

Sebagai contoh umum dari perhitungan defleksi balok, tinjaulah Persamaan 11-16,  $Elv^{iv} = q(x)$ . Dengan berturut-turut mengintegrasikan persamaan ini empat kali, jawab resmi untuk  $v$  dapat diperoleh. Jadi

$$\begin{aligned}
 Elv^{iv} &= EI \frac{d^4 v}{dx^4} = EI \frac{d}{dx}(v''') = q(x) \\
 Elv''' &= \int_0^x q \, dx + C_1 \\
 Elv'' &= \int_0^x dx \int_0^x q \, dx + C_1 x + C_2 \\
 Elv' &= \int_0^x dx \int_0^x dx \int_0^x q \, dx + C_1 x^2/2 + C_2 x + C_3 \\
 Elv &= \int_0^x dx \int_0^x dx \int_0^x dx \int_0^x q \, dx + C_1 x^3/3! + C_2 x^2/2! + C_3 x + C_4
 \end{aligned} \tag{11-18}$$

Bila kita nyatakan dengan Persamaan 11-14,  $Elv'' = M(x)$ , maka sesudah dua kali integrasi kita mendapatkan jawaban:

$$Elv = \int_0^x dx \int_0^x M \, dx + C_3 x + C_4 \tag{11-19}$$

Dalam kedua persamaan di atas tetapan-tetapan  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  dan  $C_4$ , yang sesuai dengan jawab persamaan diferensial homogen, haruslah ditentukan dari syarat-syarat batas. Tetapan-tetapan  $C_1$  dan  $C_2$  dapat ditemui dalam Bab 10 dalam pemecahan persamaan diferensial dari keseimbangan (Pasal-pasal 10-5 dan 10-6). Dalam Persamaan 11-19 tetapan-tetapan  $C_1$  dan  $C_2$  tergabung dalam pernyataan dari  $M$ . Tetapan-tetapan  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3/(EI)$  dan  $C_4/(EI)$ , berturut-turut, mulanya adalah\* harga-harga  $V$ ,  $M$ ,  $\theta$  dan  $v$  pada titik asal.

Suku pertama dalam ruas kanan dari persamaan terakhir Persamaan 11-18 dan yang bersamaan dengan dalam Persamaan 11-19 adalah jawab khusus dari persamaan diferensial yang bersangkutan. Yang terdapat dalam Persamaan 11-18 tersebut menarik sekali karena ia hanya tergantung kepada keadaan beban pada balok. Suku ini tetap sama sekali tidak menghiraukan ketentuan syarat-syarat batas. Sedang suku yang serupa yang terdapat dalam persamaan 11-19 haruslah dibawa kembali ke dalam pemecahan soal yang homogen dari persamaan diferensial.

Bila fungsi-fungsi pembebanan, geser dan momen adalah kontinu dan kekakuan lentur  $EI$  adalah tetap, maka evaluasi integral-integral tertentu adalah sangat langsung. Bila terdapat diskontinuitas, jawaban dapat diperoleh dari tiap segmen balok di mana fungsi-fungsi bersifat kontinu; pemecahan lengkap kemudian dapat dicapai dengan memaksakan syarat-syarat kontinuitas yang terdapat pada batas umum segmen balok. Cara lain ialah prosedur-prosedur grafis atau numerik† dari integrasi secara berturut-turut dapat dipergunakan sangat efektif dalam penyelesaian soal-soal praktis.

Prosedur-prosedur yang dibicarakan di atas cukup umum dan berlaku untuk balok-balok elastis statis tertentu dan juga statis tak tentu. Namun dalam empat contoh yang berikut, pemecahan alternatif lain dari soal-soal tertentu akan diberikan sebagai ilustrasi. Salah satu contoh dari kasus I yang bervariasi akan diberi pemecahan. Sedang balok statis tak tentu akan ditinjau dalam pasal yang berikut.

### CONTOH 11-2

Suatu momen lentur  $M_1$  diletakkan kepada ujung bebas sebuah kantilever dengan panjang  $L$  dan kekakuan lentur yang tetap  $EI$ , Gambar 11-5(a). Carilah persamaan kurva elastis.

### PENYELESAIAN

Syarat-syarat batas ditulis dekat gambar dari pemeriksaan syarat pada ujung-ujung. Pada  $x=L$ ,  $M(L) = +M_1$ , yaitu syarat bukan homogen.

Dari diagram benda bebas pada Gambar 11-5(b), kita dapat mengamati bahwa momen lentur dalam balok adalah  $+M_1$ . Dengan menggunakan Persamaan 11-14, mengintegrasikannya secara berturut-turut, dan menggunakan syarat-syarat batas, kita mem-

\* Dalam kasus-kasus tertentu di mana fungsi-fungsi transedental dipergunakan, tetapan-tetapan ini tidak mempunyai arti. Pada dasarnya, seluruh fungsi, yang termasuk tetapan-tetapan integrasi, haruslah memenuhi syarat-syarat batas.

† Prosedur-prosedur demikian penting sekali dalam persoalan-persoalan yang sulit. Misalnya, lihatlah N.M. Newmark, "Numerical Procedure for Computing Deflections, Moments, and Buckling Loads," *Trans. ASCE*, vol. 108, (1943), 1161.

peroleh jawaban untuk  $v$  :

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = M = M_1$$

$$EI \frac{dv}{dx} = M_1x + C_3$$

Tetapi  $\theta(0) = 0$ , jadi pada  $x = 0$  kita mempunyai  $EIv'(0) = C_3 = 0$  dan

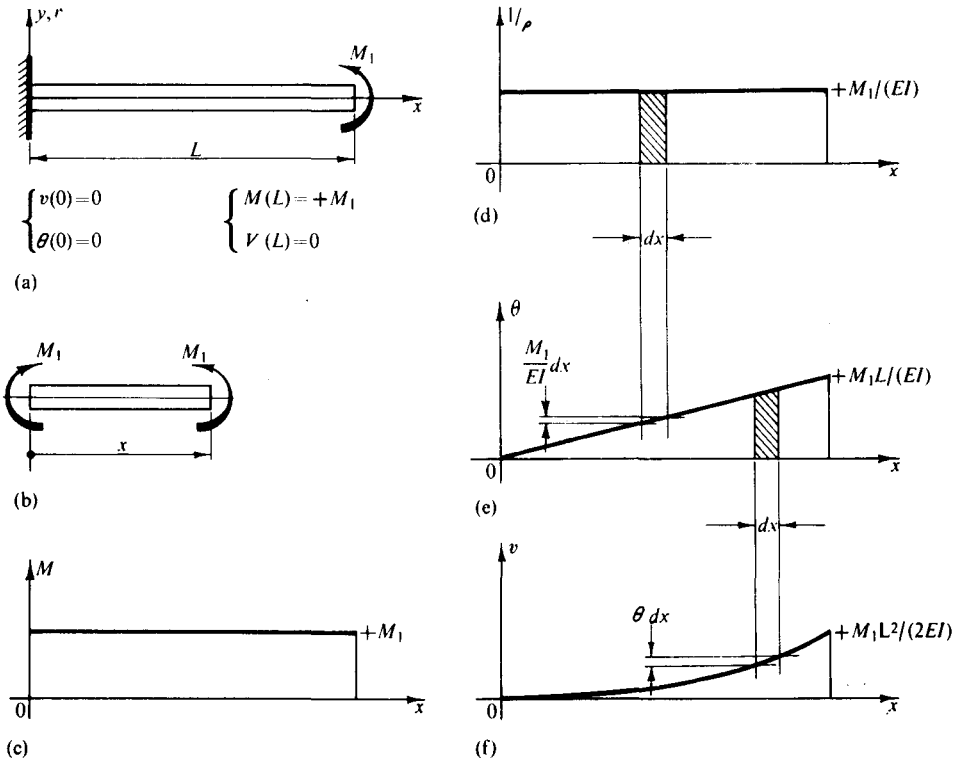
$$EI \frac{dv}{dx} = M_1x$$

$$EIv = \frac{1}{2} M_1x^2 + C_4$$

Tetapi  $v(0) = 0$ ; jadi  $EIv(0) = C_4 = 0$  dan

$$v = M_1x^2/(2EI) \quad (11-20)$$

Tanda positif dari hasil tersebut menunjukkan bahwa defleksi yang disebabkan oleh  $M_1$  adalah ke atas. Harga  $v$  yang terbesar terjadi pada  $x = L$ . Kemiringan kurva elastis pada ujung bebas adalah  $+M_1L/(EI)$  radian.



Gambar 11-5

Persamaan 11-20 menunjukkan bahwa kurva elastis adalah sebuah parabola. Tetapi setiap elemen balok mengalami momen yang sama dan berdeformasi serupa. Karena itu kurva elastis haruslah merupakan bagian sebuah lingkaran. Hasil-hasil yang tidak tetap tersebut berasal dari penggunaan suatu hubungan pendekatan terhadap kurva  $1/\rho$ . Dapat dibuktikan bahwa kesalahan yang terjadi adalah dalam perbandingan  $(\rho - v)^3$  dengan  $\rho^3$ . Bila defleksi  $v$  sangat kecil dari  $\rho$ , maka kesalahan tersebut tidaklah mengkhawatirkan.

Adalah penting untuk menghubungkan prosedur integrasi berturut-turut di atas dengan jawaban atau penafsiran grafis. Ini dapat dilihat dalam rangkaian Gambar-gambar 11-5(c) sampai (f). Mula-mula diperlihatkan momen diagram konvensional. Kemudian dari Persamaan-persamaan 11-9 dan 11-10,  $1/\rho \approx d^2v/dx^2 = M/(EI)$ , diagram kurva digambarkan dalam Gambar 11-5(d). Untuk kasus elastis, ini menyederhanakan plot  $M/(EI)$ . Dengan mengintegrasikan diagram kurva kita memperoleh diagram  $\theta$ . Dalam integrasi yang berikutnya kurva elastis lantas diperoleh. Dalam soal ini karena balok tersebut dipasang jepit pada titik asal, maka syarat  $\theta(0) = 0$ , dan  $v(0) = 0$  dipergunakan dalam menggambar diagram. Pendekatan grafis atau ekuivalen numeriknya sangat berfaedah dalam penyelesaian soal-soal dengan  $EI$  yang bervariasi.

### CONTOH 11-3

Sebuah balok sederhana menumpu suatu beban ke arah bawah yang terdistribusi merata  $w_0$ . Kekakuan lentur  $EI$  adalah konstan. Dapatkanlah kurva elastis dengan tiga metoda yang berikut: (a) Gunakan persamaan diferensial ordo kedua untuk memperoleh defleksi balok tersebut. (b) Gunakan persamaan orde keempat sebagai pengganti yang pada (a). (c) Gambarkanlah jawaban secara grafis dari soal tersebut.

### PENYELESAIAN

Kasus (a). Diagram balok bersama syarat-syarat batas yang akan dipergunakan terdapat dalam Gambar 11-6(a). Pernyataan  $M$  untuk digunakan dalam persamaan diferensial ordo kedua telah kita peroleh dalam Contoh 4-6. Dari Gambar 4-20

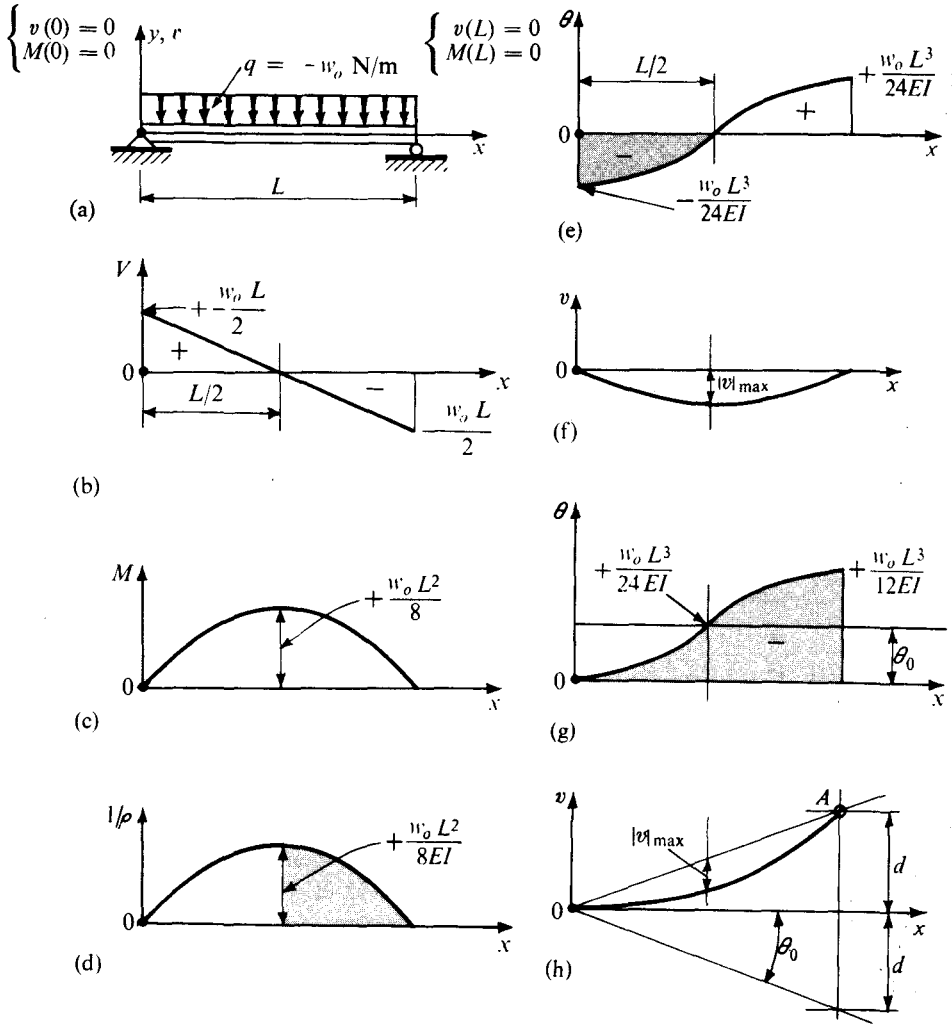
$$M = \frac{w_0 Lx}{2} - \frac{w_0 x^2}{2}$$

Dengan mensubstitusikan hubungan ini ke dalam Persamaan 11-14, mengintegrasikannya dua kali berturut-turut dan dengan menggunakan syarat-syarat batas, kita memperoleh persamaan kurva elastis:

$$\begin{aligned} EI \frac{d^2v}{dx^2} &= M = \frac{w_0 Lx}{2} - \frac{w_0 x^2}{2} \\ EI \frac{dv}{dx} &= \frac{w_0 Lx^2}{4} - \frac{w_0 x^3}{6} + C_3 \\ EI v &= \frac{w_0 Lx^3}{12} - \frac{w_0 x^4}{24} + C_3 x + C_4 \end{aligned}$$

Tetapi  $v(0) = 0$ ; jadi  $EI v(0) = 0 = C_4$ ; dan karena  $v(L) = 0$ ,





Gambar 11-6

$$EIv(L) = 0 = \frac{w_o L^4}{24} + C_3 L \quad \text{dan} \quad C_3 = -\frac{w_o L^3}{24}$$

$$v = -\frac{w_o}{24EI}(L^3 x - 2Lx^3 + x^4) \quad (11-21)$$

Berdasarkan simetri, defleksi terbesar terjadi pada  $x = L/2$ . Dengan memasukkan harga  $x$  ini ke dalam Persamaan 11-21, kita peroleh :

$$|v|_{\max} = 5w_o L^4 / (384EI) \quad (11-22)$$

Syarat simetri tersebut dapat pula digunakan untuk menentukan tetapan  $C_3$ . Sebagai diketahui bahwa  $v'(L/2) = 0$ , maka kita peroleh :

$$EIv'(L/2) = \frac{w_o L(L/2)^2}{4} - \frac{w_o(L/2)^3}{6} + C_3 = 0$$

dan seperti yang sebelumnya,  $C_3 = -(1/24)w_o L^3$ .

Kasus (b). Penggunaan Persamaan 11-16 kepada jawab soal ini adalah langsung. Tetapan-tetapan diperoleh dari syarat-syarat batas.

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = q = -w_o$$

$$EI \frac{d^3 v}{dx^3} = -w_o x + C_1$$

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{w_o x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

Tetapi  $M(0) = 0$ ; jadi  $EIv''(0) = 0 = C_2$ ; dan, karena  $M(L) = 0$ ,

$$EIv''(L) = 0 = -\frac{w_o L^2}{2} + C_1 L \quad \text{atau} \quad C_1 = \frac{w_o L}{2}$$

jadi

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{w_o Lx}{2} - \frac{w_o x^2}{2}$$

Sisa dari jawaban persoalan ini sama dengan pada kasus (a). Dalam pendekatan ini tidak diperlukan perhitungan pendahuluan mengenai gaya-gaya reaksi. Seperti akan kita perhatikan nanti, ini akan merupakan suatu keuntungan dalam beberapa soal statis tak tentu.

Kasus (c). Langkah-langkah yang diperlukan untuk mendapatkan jawaban grafis dari soal yang lengkap terdapat pada Gambar-gambar 11-6(b) sampai (f). Dalam Gambar-gambar 11-6(b) dan (c) diperlihatkan diagram-diagram geser dan momen yang konvensional. Diagram kurva diperoleh dengan menggambar  $M/(EI)$ , seperti dalam Gambar 11-6(d).

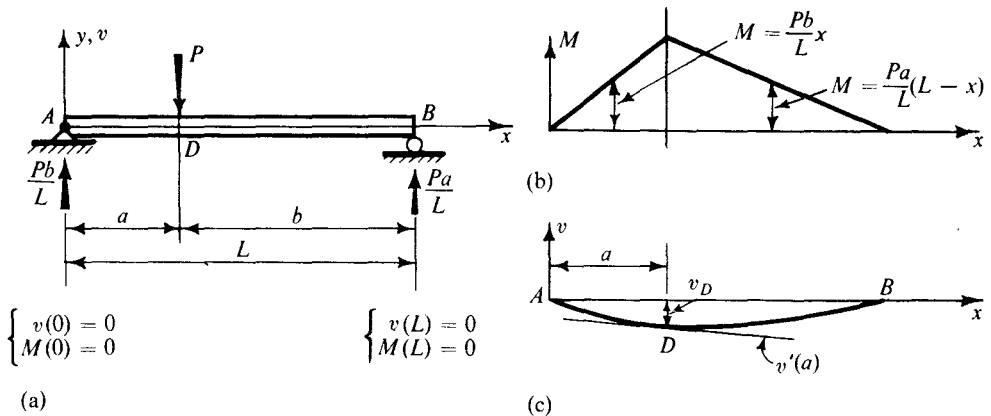
Karena berdasarkan pada simetri, kemiringan kurva elastis pada  $x = L/2$  adalah horisontal, maka  $\theta(L/2) = 0$ . Karena itu pembuatan diagram  $\theta$  dapat dimulai dari pusat. Dalam prosedur ini ordinat kanan dalam Gambar 11-6(e) haruslah sama dengan daerah luas-gelap Gambar 11-6(d), dan demikian pula sebaliknya. Dengan menjumlahkan diagram  $\theta$ , kita mendapatkan defleksi kenyal  $v$ . Daerah gelap Gambar 11-6(e) secara numerik sama dengan defleksi maksimum. Pada soal di atas, syarat simetri telah pula dilakukan. Suatu prosedur yang berlaku umum akan menyusul.

Setelah diagram kurva dibuat seperti dalam Gambar 11-6(d), maka diagram  $\theta$  dapat pula digambar dengan suatu pengandaian bahwa harga semula dari  $\theta$  adalah pada titik asal. Misalnya, ambil  $\theta(0) = 0$  dan jumlah diagram kurva untuk mendapatkan diagram  $\theta$ , Gambar 11-6(g). Perhatikanlah bahwa bentuk kurva yang didapat itu identik dengan Gambar 11-6(e). Penjumlahan daerah diagram  $\theta$  menghasilkan kurva elastis. Dalam Gambar 11-6(h) kurva ini memanjang dari titik  $O$  ke titik  $A$ . Hal ini melawan syarat batas di titik  $A$  di mana defleksi haruslah nol. Oleh karena itu defleksi yang

betul diperoleh dengan mengukurnya secara vertikal dan sebuah garis lurus melalui titik  $O$  dan  $A$ . Garis miring ini memperbaiki ordinat-ordinat defleksi yang disebabkan oleh pengandaian  $\theta(0)$  yang tidak benar. Dalam kenyataan, setelah membuat Gambar 11-6(h), kita mengetahui bahwa  $\theta(0) = -d/L = -w_0 L^3 / (24EI)$ . Apabila harga  $\theta(0)$  ini dipergunakan, maka soal tersebut kembali kepada jawaban yang terdahulu (Gambar-gambar 11-6(e) dan (f)). Dalam Gambar 11-6(h) pengukuran-pengukuran miring tidak mempunyai arti. Prosedur yang dilukiskan tersebut berlaku untuk balok-balok overstek. Dalam kasus yang demikian garis dasar untuk mengukur defleksi haruslah melewati titik-titik tumpuan.

#### CONTOH 11-4

Sebuah balok sederhana menumpu sebuah gaya terpusat ke bawah  $P$  pada jarak  $a$  dari tumpuan kiri, Gambar 11-7(a). Kekakuan lentur  $EI$  adalah konstan. Carilah persamaan kurva elastis dengan integrasi secara berturut-turut.



Gambar 11-7

#### PENYELESAIAN

Penyelesaian tersebut akan kita peroleh dengan menggunakan persamaan diferensial ordo kedua. Gaya-gaya reaksi dari syarat-syarat batas terlihat dalam Gambar 11-7(a). Diagram momen yang digambar dalam Gambar 11-7(b) dengan jelas memperlihatkan bahwa dalam  $M(x)$  terdapat diskontinuitas pada  $x = a$ , yang membutuhkan dua fungsi yang berbeda. Mula-mula pemecahan menghasilkan jawab sendiri-sendiri untuk tiap segmen dari balok.

Untuk segmen AD:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{Pb}{EIL}x$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{Pb}{EIL} \frac{x^2}{2} + A_1$$

$$v = \frac{Pb}{EIL} \frac{x^3}{6} + A_1x + A_2$$

Untuk segmen DB:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{Pa}{EI} - \frac{Pa}{EIL}x$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{Pa}{EI}x - \frac{Pa}{EIL} \frac{x^2}{2} + B_1$$

$$v = \frac{Pa}{EI} \frac{x^2}{2} - \frac{Pa}{EIL} \frac{x^3}{6} + B_1x + B_2$$

Untuk menentukan keempat konstanta  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  dan  $B_2$ , dua syarat batas dan dua syarat kontinuitas harus digunakan.

Untuk segmen  $AD$ :

$$v(0) = 0 = A_2$$

Untuk segmen  $DB$ :

$$v(L) = 0 = \frac{PaL^2}{3EI} + B_1L + B_2$$

Dengan menyamakan defleksi untuk kedua segmen pada  $x = a$ :

$$v_D = v(a) = \frac{Pa^3b}{6EIL} + A_1a = \frac{Pa^3}{2EI} - \frac{Pa^4}{6EIL} + B_1a + B_2$$

Dengan menyamakan kemiringan untuk kedua segmen pada  $x = a$ :

$$\theta_D = v'(a) = \frac{Pa^2b}{2EIL} + A_1 = \frac{Pa^2}{EI} - \frac{Pa^3}{2EIL} + B_1$$

Setelah menyelesaikan keempat persamaan secara simultan, kita memperoleh

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{Pb}{6EIL}(L^2 - b^2) & A_2 &= 0 \\ B_1 &= -\frac{Pa}{6EIL}(2L^2 + a^2) & B_2 &= \frac{Pa^3}{6EI} \end{aligned}$$

Dengan konstanta-konstanta ini, misalnya, maka kurva elastis untuk segmen kiri  $AD$  dari balok menjadi

$$v = [(Pb/(6EIL))[x^3 - (L^2 - b^2)x] \quad (11-23)$$

Defleksi yang terbesar terjadi dalam segmen balok yang lebih panjang. Bila  $a > b$ , titik defleksi maksimum adalah pada  $x = \sqrt{a(a + 2b)}/3$ , yang menyusul dari pembuatan pernyataan untuk kemiringan sama dengan nol. Defleksi pada titik ini

$$|v|_{\max} = \frac{Pb(L^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3} EIL} \quad (11-24)$$

Biasanya defleksi pada pusat bentangan hampir sama dengan defleksi yang secara numerik paling besar. Defleksi seperti ini sangat mudah ditentukan, hingga lebih baik dipergunakan. Bila gaya  $P$  diberikan pada tengah-tengah bentangan, yaitu  $a = b = L/2$ , defleksi itu dapat diperlihatkan dengan substitusi langsung ke dalam Persamaan 11-23 dan 11-24 pada  $x = L/2$

$$|v|_{\max} = PL^3/(48EI) \quad (11-25)$$

**CONTOH 11-5**

Sebuah balok ditumpu secara sederhana, panjangnya 5 m, dibebani dengan gaya arah ke bawah sebesar 20 N pada titik 4 m dari tumpuan sebelah kiri, Gambar 11-8(a). Momen inersia penampang balok tersebut adalah  $4I_1$  untuk segmen  $AB$  dan  $I_1$  untuk sisa balok. Tentukanlah kurva elastis.

**PENYELESAIAN**

Soal yang serupa telah kita selesaikan dalam contoh terdahulu. Di sini akan kita utarakan teknik lain yang bermanfaat dan cocok untuk beberapa soal yang rumit di mana pernyataan-pernyataan dari  $M/EI$  yang berlainan berlaku untuk berbagai segmen balok.\* Metoda ini terdiri dari pemilihan titik asal pada salah satu ujung balok, dan melakukan integrasi secara berturut-turut sampai pernyataan untuk  $\theta$  dan  $v$  dapat diperoleh untuk segmen yang pertama. Harga-harga  $\theta$  dan  $v$  kemudian dapat ditentukan pada ujung segmen pertama. Disebabkan oleh syarat kontinuitas, maka hal ini akan merupakan konstanta awal dari integrasi yang dilakukan untuk segmen yang berikutnya. Proses ini diulangi lagi sampai ujung yang terjauh dari balok dicapai, kemudian syarat-syarat batas dimasukkan untuk menentukan konstanta-konstanta sisa yang belum diketahui. Suatu titik asal yang baru digunakan pada setiap sambungan segmen, dan semua  $x$  diambil positif dalam arah yang sama.

Untuk segmen  $AB$ :  $0 < x < 4$

$$M = 4x \quad \text{dan} \quad EI = 4EI_1$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{x}{EI_1}$$

$$\theta = \frac{dv}{dx} = \frac{x^2}{2EI_1} + A_1$$

$$v = \frac{x^3}{6EI_1} + A_1x + A_2$$

Pada  $x = 0$ :  $v(0) = v_A = 0$ , dan  $\theta(0) = \theta_A$ . Karena,  $A_1 = \theta_A$  dan  $A_2 = 0$ .

Pada ujung segmen  $AB$ :

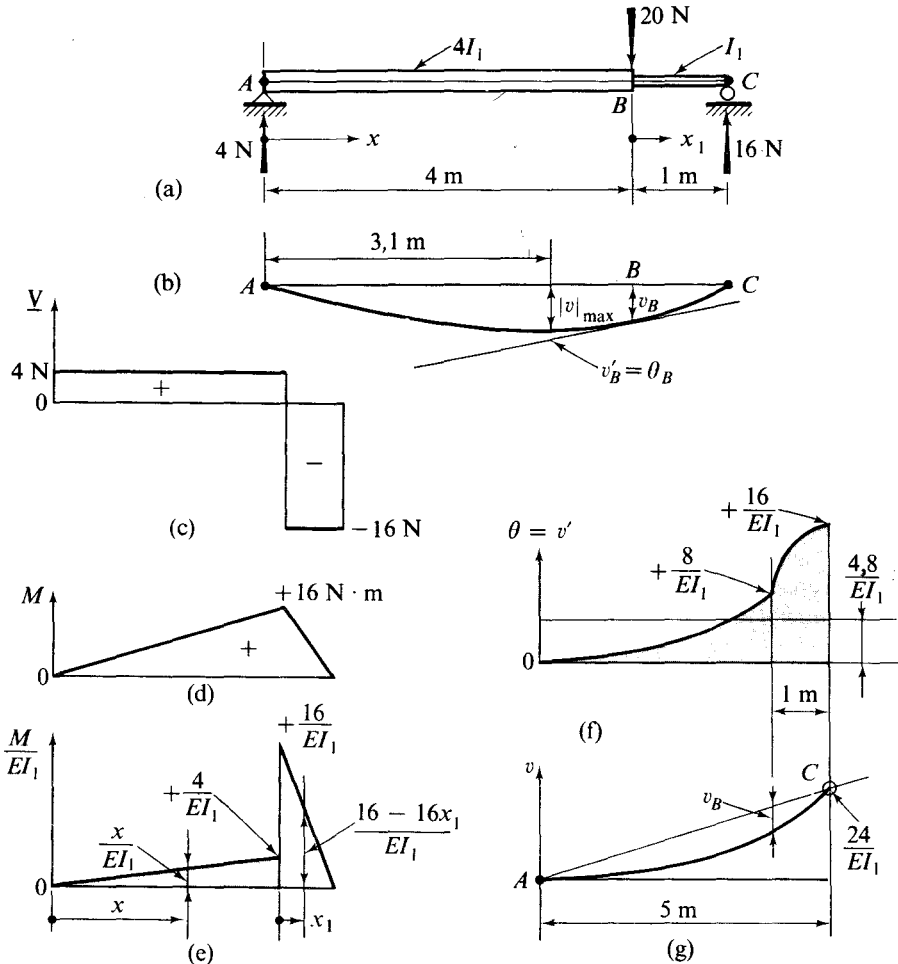
$$\theta(4) = \theta_B = \frac{8}{EI_1} + \theta_A \quad \text{dan} \quad v(4) = v_B = \frac{32}{3EI_1} + 4\theta_A$$

Untuk segmen  $BC$ :  $0 < x_1 < 1$

$$M = 4(4 + x_1) - 20x_1 = 16 - 16x_1 \quad \text{dan} \quad EI = EI_1$$

$$\frac{d^2v}{dx_1^2} = \frac{16}{EI_1} - \frac{16x_1}{EI_1}$$

\* Keistimewaan fungsi-fungsi dapat digunakan untuk membuat dan menyelesaikan persamaan diferensial untuk berbagai persoalan defleksi balok. Lihat umpamanya, E.P. Popov, *Introduction to Mechanics of Solids*, Englewood cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1968.



Gambar 11-8

$$\theta = \frac{dv}{dx_1} = \frac{16x_1}{EI_1} - \frac{8x_1^2}{EI_1} + A_3$$

$$v = \frac{8x_1^2}{EI_1} - \frac{8x_1^3}{3EI_1} + A_3x_1 + A_4$$

Pada  $x_1 = 0$ ;  $v(0) = v_B$  dan  $\theta(0) = \theta_B$ . Jadi,  $A_4 = v_B = 32/(3EI_1) + 4\theta_A$ , dan  $A_3 = \theta_B = 8/(EI_1) + \theta_A$ . Pernyataan untuk  $\theta$  dan  $v$  dalam segmen BC kemudian kita peroleh sebagai

$$\theta = \frac{16x_1}{EI_1} - \frac{8x_1^2}{EI_1} + \frac{8}{EI_1} + \theta_A$$

$$v = \frac{8x_1^2}{EI_1} - \frac{8x_1^3}{3EI_1} + \frac{8x_1}{EI_1} + \theta_A x_1 + \frac{32}{3EI_1} + 4\theta_A$$

Akhirnya, syarat batas di  $C$  dilakukan untuk menentukan harga  $\theta_A$ . Pada  $x_1 = 1$ :  $v(1) = u_c = 0$ .

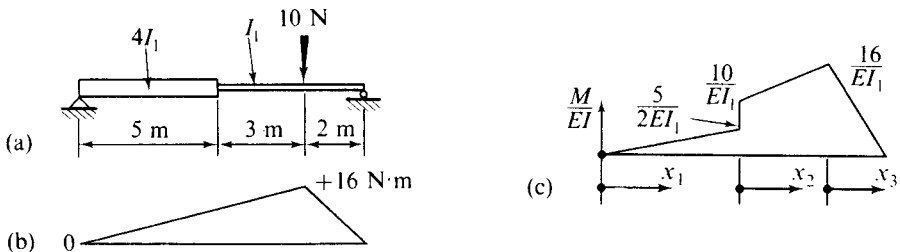
$$0 = \frac{8}{EI_1} - \frac{8}{3EI_1} + \frac{8}{EI_1} + \theta_A + \frac{32}{3EI_1} + 4\theta_A$$

dan

$$\theta_A = -\frac{4,8}{EI_1}$$

Dengan memasukkan harga  $\theta_A$  ke dalam ungkapan untuk  $\theta$  dan  $v$  yang bersangkutan, persamaan-persamaan untuk besaran-besaran ini untuk masing-masing segmen dapat diperoleh. Umpamanya, persamaan untuk kemiringan dalam segmen  $AB$  adalah  $\theta = x^2/(2EI_1) - 24/(5EI_1)$ . Dengan membuat besaran ini sama dengan 0, diperoleh  $x$ , mempunyai harga 3,1 m. Harga maksimum defleksi terjadi pada harga  $x$  ini dan  $|v|_{\max} = 9,95/(EI_1)$ . Secara karakteristik, defleksi di tengah-tengah bentangan balok (pada  $x = 2,5$  m) adalah hampir sama dengan yang maksimum yaitu  $9,4/(EI_1)$ .

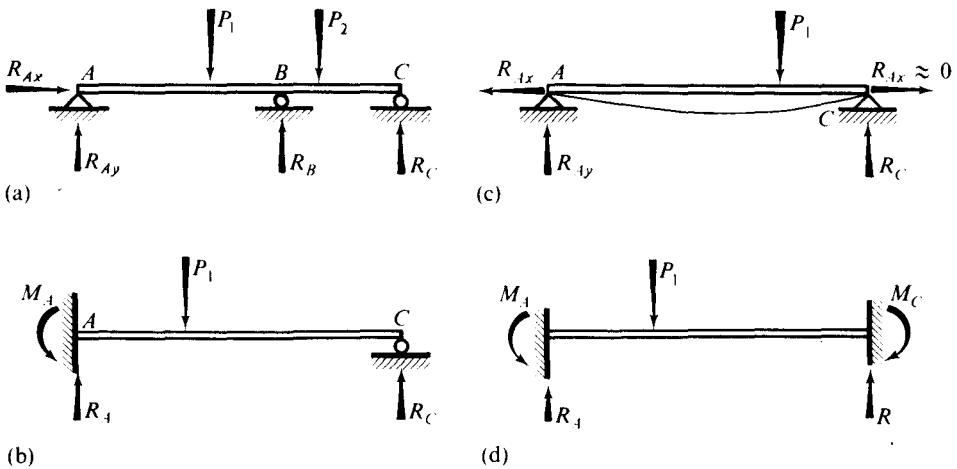
Prosedur grafis untuk menjelaskan sendiri hal di atas dapat dilihat dalam Gambar-gambar 11-8(d) sampai (g). Variasi yang terjadi dengan  $I$  menyebabkan sebenarnya tidak terdapat kesulitan dalam penyelesaian grafis, yang merupakan suatu keuntungan besar dalam soal yang rumit. Titik asal yang banyak dapat pula digunakan seperti yang terlihat dalam Gambar 11-9 untuk memudahkan pekerjaan numerik yang terdapat dalam contoh soal yang sekarang.



**Gambar 11-9** Pemilihan beberapa kali dari titik asal  $x$  untuk fungsi-fungsi  $M/(EI)$  yang diskontinu

### 11-7 MASALAH BALOK ELASTIS STATIS TAK TENTU

Dalam persoalan-persoalan kelompok balok yang besar dan penting, gaya-gaya reaksi tidak dapat ditentukan dengan menggunakan prosedur-prosedur statika yang konvensional. Umpamanya, untuk balok yang diperlihatkan dalam Gambar 11-10(a), empat komponen gaya reaksi tidak diketahui. Ketiga komponen vertikal ini tidak dapat kita peroleh dari persamaan keseimbangan statika. Pemeriksaan selanjutnya dari Gambar 11-10(a) memperlihatkan bahwa salah satu dari ketiga gaya reaksi vertikal tersebut dapat dihilangkan hingga balok tersebut tetap berada dalam keseimbangan. Karena itu salah satu dari ketiga reaksi ini dapat dikatakan tidak berguna atau berlebihan dalam mempertahankan keseimbangan. Persoalan-persoalan dengan gaya atau momen reaksi ekstra atau kelebihan disebut *statis tak tentu (luar)* ((externally) statically indeterminate).



**Gambar 11-10** Ilustrasi balok-balok statis tak tentu. Dalam (a) dan (b) balok tak tentu derajat satu. Bila kita anggap bahwa komponen horisontal gaya-gaya reaksi diabaikan, maka balok pada (c) menjadi tertentu sedang pada (d) tak tentu dengan derajat dua.

Bila jumlah reaksi yang tidak diketahui lebih dari satu yang dapat ditentukan dengan statika, maka anggota tersebut dikatakan tak tentu *berderajat satu* (first degree). Karena bila yang tidak diketahui tersebut meningkat, derajat ketaktentuan pun meningkat pula. Umpamanya dengan memberikan satu lagi tumpuan pada balok yang terlihat dalam Gambar 11-10(a), maka balok tersebut menjadi tak tentu berderajat dua. Balok dari Gambar 11-10(b) adalah tak tentu berderajat satu, karena baik  $M_A$  atau  $R_C$  dapat dianggap berlebihan.

Karena  $ds \approx dx$  untuk defleksi kecil menurut Persamaan 11-12, tidak ada regangan aksial yang dapat terbentuk dalam balok yang dibebani secara melintang (transversal).<sup>\*</sup> Karena itu, komponen horisontal dari gaya reaksi dalam keadaan dengan tumpuan yang tidak bergerak, seperti yang terlihat dalam Gambar-gambar 11-10(c) dan (d), diabaikan. Berdasarkan ini, balok yang terlihat dalam Gambar 11-10(c) dengan pasak pada kedua ujung, merupakan balok yang tertentu. Balok dalam Gambar 11-10(d) merupakan yang tak tentu berderajat dua.

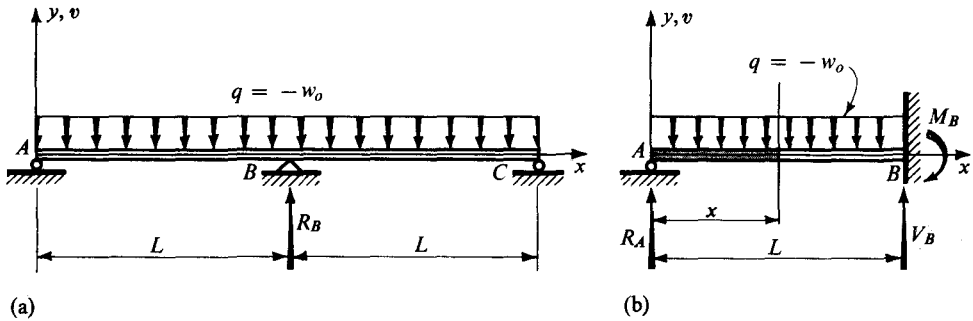
Untuk menentukan defleksi elastis dari balok statis tak tertentu, prosedur penyelesaian persamaan diferensial praktis sama dengan yang kita bicarakan di atas untuk balok statis tertentu. Yang berbeda hanyalah syarat-syarat batas kinematik yang menggantikan beberapa yang statis. Makin meningkat derajat ketaktentuan seperti pada balok kontinu, makin meningkat pula jumlah persamaan yang secara bersamaan menentukan tetapan-tetapan. Dalam masalah-masalah yang demikian jumlah tetapan yang dapat diperoleh tidak lagi terbatas kepada maksimum empat.

<sup>\*</sup> Gaya horisontal menjadi penting dalam pelat tipis. Lihat S. Timoshenko dan S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells* (2nd ed.), New York: McGraw-Hill, 1959, hal. 6.



**CONTOH 11-6**

Tentukanlah persamaan kurva elastis untuk balok kontinu dan bentangan yang dibebani secara merata seperti yang terlihat dalam Gambar 11-11(a).  $EI$  adalah tetap.

**Gambar 11-11****PENYELESAIAN**

Kita mungkin memperoleh jawaban dari soal ini dengan cara yang serupa dengan yang dipakai dalam Contoh 11-5, dengan melakukan integrasi berturut-turut pada satu segmen sekaligus (dengan mengerjakan dari  $A$  ke  $B$  dan kemudian  $B$  ke  $C$ ), dan menggunakan syarat-syarat kontinuitas dan syarat-syarat batas. Tetapi soal yang diberikan adalah simetris terhadap tumpuan di  $B$ . Karena itu garis singgung pada kurva elastis di  $B$  adalah horisontal, dan suatu soal yang setara yang melibatkan separoh balok asal yang terlihat dalam Gambar 11-11(b) malah dapat ditelaah. Persoalan baru ini dapat diselesaikan dengan menggunakan persamaan diferensial ordo keempat dengan empat syarat batas yang berikut:

$$v_A = 0, \quad M_A = EIv''(0) = 0, \quad v_B = 0, \quad \text{dan} \quad v'_B = 0$$

Sebagai kemungkinan lain, dalam menunjuk reaksi yang tidak diketahui di titik  $A$  sebagai  $R_A$ , kita dapat menyatakan momen lentur dalam bentangan tersebut sebagai

$$M = R_A x - w_0 x^2/2$$

Dengan mensubstitusikan hubungan ini ke dalam Persamaan 11-14, mengintegrasikannya dua kali, dan dengan menggunakan tiga syarat batas kinematik yang telah dinyatakan di atas, kita mendapatkan konstanta-konstanta yang tidak diketahui  $R_A$ ,  $C_3$  dan  $C_4$ .

**Kasus (a) :** Penyelesaian persamaan diferensial ordo keempat.

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = q = -w_o$$

$$EI \frac{d^3 v}{dx^3} = -w_o x + C_1$$

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{w_o x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

$$EI \frac{dv}{dx} = -\frac{w_o x^3}{6} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$EI v = -\frac{w_o x^4}{24} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

Syarat-syarat batas :

$$v(0) = v_A = 0 = C_4$$

$$v''(0) = v''_A = 0 = C_2$$

$$v'(L) = v'_B = 0 = -\frac{w_o L^3}{6} + C_1 \frac{L^2}{2} + C_3$$

$$v(L) = v_B = 0 = -\frac{w_o L^4}{24} + C_1 \frac{L^3}{6} + C_3 L$$

Dengan menyelesaikan dua persamaan yang terakhir secara bersamaan,

$$C_1 = \frac{3w_o L}{8} \quad \text{dan} \quad C_3 = -\frac{w_o L^3}{48}$$

Dengan mensubstitusikan harga-harga konstanta ini ke dalam persamaan kurva elastis, kita memperoleh

$$EI v = -(w_o/48)(2x^4 - 3Lx^3 + L^3x)$$

untuk bentangan  $AB$ . Kurva elastis untuk bentangan  $BC$  mengikuti dari keadaan simetri yang terdapat disekitar tumpuan  $B$ .

**Kasus (b):** Penyelesaian persamaan diferensial ordo kedua.

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = R_A x - \frac{w_o x^2}{2}$$

$$EI \frac{dv}{dx} = R_A \frac{x^2}{2} - \frac{w_o x^3}{6} + C_3$$

$$EI v = R_A \frac{x^3}{6} - \frac{w_o x^4}{24} + C_3 x + C_4$$

Syarat-syarat batas :

$$v(0) = v_A = 0 = C_4$$

$$v'(L) = v'_B = 0 = R_A \frac{L^2}{2} - \frac{w_o L^3}{6} + C_3$$

$$v(L) = v_B = 0 = R_A \frac{L^3}{6} - \frac{w_o L^4}{24} + C_3 L$$

Sekali lagi dengan menyelesaikan kedua persamaan terakhir,

$$R_A = \frac{3w_o L}{8} \quad \text{dan} \quad C_3 = -\frac{w_o L^3}{48}$$

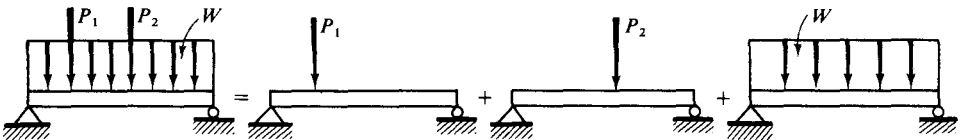
yang setelah dimasukkan ke dalam persamaan kurva elastis, menjadi

$$EI v = -(w_o/48)(2x^4 - 3Lx^3 + L^3x)$$

yang sama dengan persamaan yang diperoleh sebelumnya dengan menggunakan persamaan diferensial ordo keempat.

### 11-8 CATATAN MENGENAI DEFLEKSI BALOK ELASTIS

Prosedur integrasi yang dibahas di atas untuk mendapatkan defleksi elastis dari balok yang dibebani berlaku secara umum. Pembaca haruslah melihat bahwa sejumlah persoalan dengan pembebanan yang berbeda telah kita selesaikan dan telah tersedia.\* Hampir semua jawab yang terdaftar dibuat untuk keadaan-keadaan pembebanan yang sederhana. Karena itu dalam praktek defleksi balok yang dikenakan berbagai atau kerumitan keadaan pembebanan biasanya digabung dari pembebanan-pembebanan yang lebih sederhana dengan mempergunakan azas superposisi. Misalnya soal dalam Gambar 11-12 dapat dipisahkan menjadi tiga kasus yang berlainan seperti yang diperlihatkan tersebut. Jumlah aljabar dari tiga defleksi yang terpisah yang disebabkan oleh beban-beban yang terpisah untuk titik yang sama memberikan defleksi total.



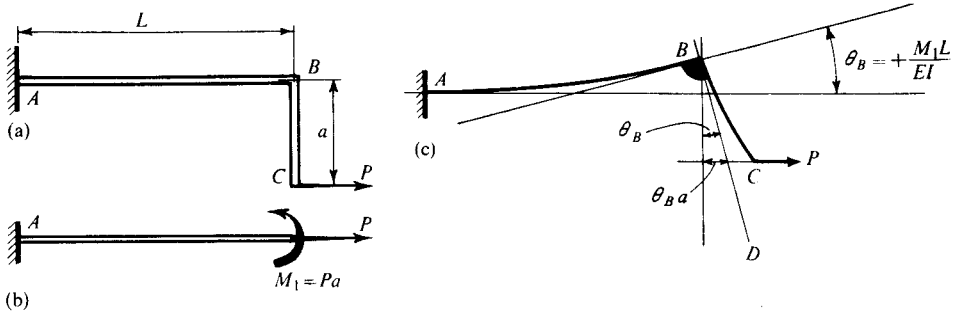
**Gambar 11-12** Penguraian soal yang rumit menjadi beberapa soal yang lebih sederhana dalam menghitung defleksi.

Perhatikanlah bahwa dalam menggunakan superposisi, penyelesaian Contoh 11-4 untuk gaya terpusat  $P$  pada suatu tempat tertentu dapat digunakan untuk menentukan

\* Lihatlah handbook teknik sipil dan mesin yang ada.

defleksi balok dengan syarat-syarat batas yang sama untuk setiap pembebanan. Untuk beban yang terdistribusi,  $P$  haruslah diganti dengan  $q \, dx$  dan diintegrasikan atas daerah jarak yang dibebani.

Prosedur-prosedur yang dibahas di atas untuk menentukan defleksi elastis dari balok lurus dapat diperluas kepada sistem struktur yang terdiri dari beberapa batang yang melentur. Misalnya, perhatikanlah kerangka sederhana yang terlihat dalam Gambar 11-13(a), untuk mana defleksi titik  $C$  yang disebabkan oleh gaya terpakai  $P$  akan kita selidiki. Defleksi dari kaki vertikal  $BC$  sendiri dapat diperoleh dengan membuatnya sebagai sebuah *kantilever* yang terjepit di  $B$ . Tetapi disebabkan oleh gaya terpakai, maka sambungan  $B$  berdefleksi dan berputar. Ini ditentukan dengan mempelajari sifat dari batang  $AB$ .

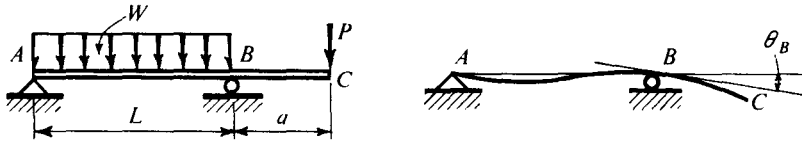


Gambar 11-13 Metoda penelaahan defleksi kerangka

Diagram benda bebas untuk batang  $AB$  adalah dalam Gambar 11-13(b). Batang ini terlihat melawan gaya aksial  $P$  dan sebuah momen  $M_1 = Pa$ . Biasanya efek gaya aksial  $P$  terhadap defleksi yang disebabkan oleh lenturan dapat diabaikan.† Perpanjangan aksial dari batang biasanya juga sangat kecil dibandingkan dengan defleksi lenturan. Karena itu soal tersebut di sini dapat dipermudah dengan menentukan defleksi dan perputaran  $B$  yang disebabkan oleh suatu momen ujung  $M_1$ . Ini telah dikerjakan dalam Contoh 11-2, dari contoh tersebut sudut  $\theta_B$  dapat dilihat pada Gambar 11-13(c). Dengan mengalikan sudut  $\theta_B$  ini dengan panjang  $a$  dari batang vertikal maka diperoleh defleksi titik  $C$  yang disebabkan oleh perputaran sambungan  $B$ . Defleksi kantilever dari batang  $BC$  bila diselesaikan secara tersendiri, menjadi diperbesar sebanyak  $\theta_B a$ . Defleksi vertikal titik  $C$  adalah sama dengan defleksi vertikal titik  $B$ .

Dalam menafsirkan bentuk bangunan yang berdeformasi seperti yang terlihat dalam Gambar 11-13(c), haruslah kita ingat dengan jelas bahwa deformasi tersebut digambar dengan sangat berlebihan. Dalam teori deformasi kecil yang dibicarakan di sini, kosinus semua sudut kecil seperti  $\theta_B$  diambil sama dengan kesatuan. Kedua defleksi dan rotasi dari kurva elastis adalah kecil.

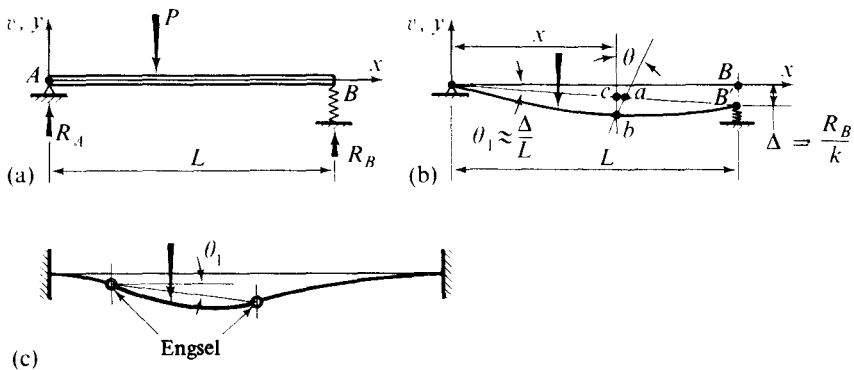
† Lihat kembali pembahasan yang berhubungan dengan Gambar 7-1 dan lihatlah Bab 13 mengenai balok kolom.



Gambar 11-14 Metoda analisa defleksi balok tergantung

Balok dengan ujung tergantung dapat pula dianalisa dengan baik dengan menggunakan konsep superposisi dengan cara yang telah dibicarakan di atas. Umpamanya, bagian balok antara tumpuan-tumpuan, seperti  $AB$  dalam Gambar 11-14(a), dipisahkan tersendiri\* hingga perputaran garis singgung di  $B$  diperoleh. Sisa soal yang selanjutnya serupa dengan kasus yang dibicarakan sebelumnya.

Hal yang hampir serupa dengan yang baru saja kita bicarakan di atas dapat pula kita buat dengan struktur-struktur komposit. Dalam Gambar 11-15(a), umpamanya, sebuah balok sederhana diletakkan di atas tumpuan kaku pada satu ujungnya sedang ujung yang lainnya dengan tumpuan yang berlaku seperti tetapan pegas  $k^\dagger$ . Bila  $R_B$  merupakan gaya reaksi pada  $B$ , maka tumpuan  $B$  menentukan  $\Delta = R_B/k$ , Gambar 11-15(b). Sebuah balok kaku akan mengambil arah garis  $AB'$  yang membuat sudut  $\theta_1 = \tan^{-1} (\Delta/L) \approx \Delta/L$  radian dengan garis mendatar. Untuk balok elastis, kurva elastis antara  $A$  dan  $B'$  dapat diperoleh dengan cara yang biasa. Tetapi karena ordinat seperti  $ab$ , Gambar 11-15(b), membuat sudut yang sangat kecil  $\theta$  dengan garis vertikal,  $ab \approx cb$ . Jadi defleksi pada titik seperti  $b$  sangat mendekati  $\theta_1 x + cb$ . Defleksi balok di mana engsel diikutkan, Gambar 11-15(c), dipecahkan pula dengan cara yang sama. Untuk ini, garis singgung pada kurva-kurva elastis yang berdampingan *tidaklah kontinu* melintasi sebuah engsel.



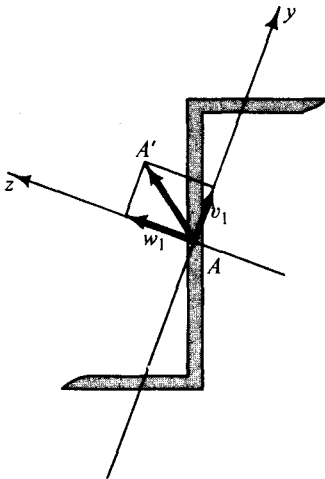
Gambar 11-15 Defleksi struktur komposit

\* Efek balok tergantung (overhang) pada segmen balok  $AB$  haruslah termasuk dengan melibatkan tumpuan  $B$  dengan momen lentur  $-Pa$ .

† Lihat Pasal 7-9, di mana  $k$  didefinisikan sebagai gaya yang diperlukan untuk mendefleksikan sebuah pegas dengan satu satuan jarak. Lebih umum lagi, sebuah balok atau batang yang lain dapat pula dipandang sebagai "pegas" dan  $k$  dapat didefinisikan dengan cara yang sama pada titik tangkap beban.

### \*11-9 DEFLEKSI ELASTIS BALOK DALAM LENTURAN TAK SIMETRIS

Dalam pembicaraan yang lalu defleksi balok dianggap terjadi dalam satu bidang. Lebih tepat lagi, teori-teori yang lalu berlaku untuk defleksi balok bila momen terpakai bekerja terhadap salah satu sumbu utama dari penampang dan bila defleksi terjadi dalam bidang yang tegak lurus pada sumbu tersebut. Di luar kasus ini, momen lain yang terbentuk cenderung melenturkan balok sekitar sumbu utama yang lain (lihat Pasal 5-7). Bila yang terjadi adalah lenturan tidak simetris, maka persoalan defleksi elastis dapat diselesaikan dengan superposisi. Kurva elastis dalam bidang yang mengandung salah satu sumbu utama, ditentukan dengan hanya memperhitungkan efek dari komponen-komponen gaya yang bekerja sejajar dengan sumbu ini. Kurva elastis dalam bidang yang mengandung sumbu utama yang lain akan diperoleh dengan cara yang sama. Tambahan vektorial dari defleksi yang terdapat pada titik tertentu dari balok, membawa penyimpangan total balok pada titik tersebut. Umpamanya, bila sebuah balok tertentu yang terbuat dari irisan Z dikenakan pada lenturan tidak simetris. Defleksi pada titik tertentu dalam arah  $y$  adalah  $v_1$  dan dalam arah  $z$  adalah  $w_1$ , Gambar 11-16, maka defleksi total adalah  $v_1 + w_1$ , yaitu jarak  $AA'$ . Defleksi yang demikian, tanpa puntiran hanya terjadi bila gaya terpakai melalui pusat geser (lihat Pasal 6-7).



Gambar 11-16 Defleksi balok yang dikenakan pada lenturan tak simetris

### \*11-10 DEFLEKSI BALOK TAK ELASTIS

Semua penyelesaian yang lalu mengenai defleksi balok hanya berlaku bila bahan tersebut bersifat elastis. Pembatasan ini merupakan hasil pengenalan Hukum Hooke ke dalam hubungan lengkungan-regangan, Persamaan 11-5, untuk menghasilkan persamaan momen-lengkungan, Persamaan 11-6. Prosedur berikut yang mendekati lengkungan sebagai  $d^2v/dx^2$  beserta skema-skema integrasi tidak mempunyai sangkut paut dengan sifat-sifat bahan.

Bila perhatian kita batasi pada balok statis tertentu kita dapat menentukan momen lentur dalam sebuah anggota tanpa perlu memperhatikan sifat bahan dari balok. Ke-

mudian bila hubungan antara momen lentur dan kurva yang terdapat pada suatu penampang yang diketahui, diagram atau fungsi kurva untuk balok tertentu dapat dibuat. Terhadap dua integrasi berturut-turut dari hubungan kurva tersebut dengan penyesuaian pada syarat-syarat batas, maka defleksi tak elastis sebuah balok tertentu dapat kita peroleh. Hal ini akan dilukiskan dalam dua contoh yang berikut.

Superposisi tidak berlaku pada persoalan-persoalan tak elastis karena defleksi tidak berhubungan linier dengan gaya terpakai. Sebagai akibatnya untuk menghitung defleksi pada balok statis tak tentu acapkali diperlukan pemecahan secara uji coba yang memakan waktu. Momen lentur tergantung pada reaksi, sedang reaksi tergantung kepada tanggapan balok yang bukan linier pada deformasi. Hal ini tidak akan dibahas dalam buku ini. Sedang suatu pendekatan untuk analisa kekuatan plastis dari balok statis tak tentu akan diberikan dalam bab yang berikut.

### CONTOH 11-7

Tentukan dan plot hubungan momen-lengkungan untuk sebuah balok sikuempat elastis-plastis ideal.

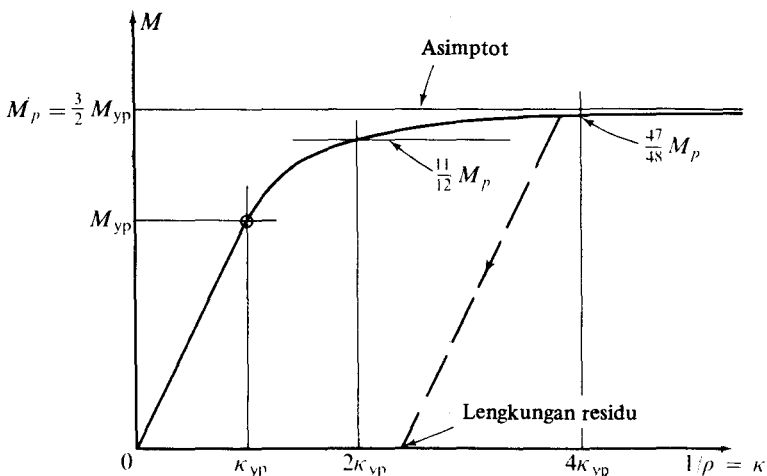
### PENYELESAIAN

Dalam sebuah balok sikuempat elastis-plastis pada  $y_0$ , di mana sambungan zona-zona elastis dan plastis terdapat, regangan linier  $\epsilon_x = \pm \epsilon_{yp}$  lihat Gambar 5-17. Karena itu, menurut Persamaan 11-5, dengan kurva  $1/\rho = \kappa$ , maka:

$$\frac{1}{\rho} = \kappa = -\frac{\epsilon_{yp}}{y_0} \quad \text{dan} \quad \kappa_{yp} = -\frac{\epsilon_{yp}}{h/2}$$

di mana pernyataan yang terakhir memperlihatkan lengkungan batang pada peluluhan berikut, bila  $y_0 = h/2$ . Dari hubungan-hubungan di atas maka

$$\frac{y_0}{h/2} = \frac{\kappa_{yp}}{\kappa}$$



Gambar 11-17 Hubungan momen-kurva untuk balok sikuempat

$yp$  = yield point = titik luluh = titik leleh

Dengan mensubstitusikan pernyataan ini ke dalam Persamaan 5-11, kita memperoleh hubungan momen kurva yang dibutuhkan:

$$M = M_p \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{y_0}{h/2} \right)^2 \right] = \frac{3}{2} M_{yp} \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{\kappa_{yp}}{\kappa} \right)^2 \right] \quad (11-26)$$

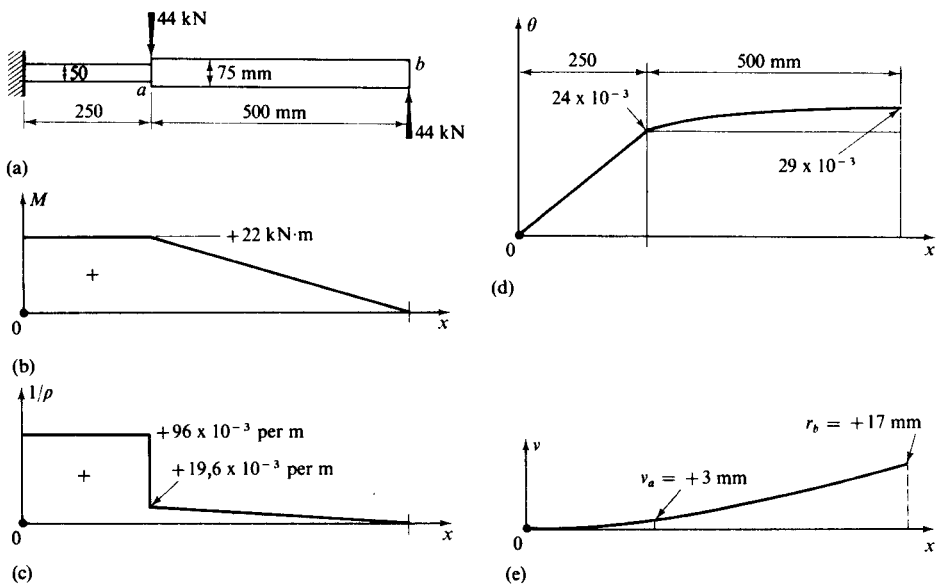
Fungsi ini digambarkan dalam Gambar 11-17. Perhatikanlah betapa cepatnya ia mendekati garis asymptot. Pada lengkungan yang dua kali peluluhan mendatang, maka sebelas perdua belas atau 91,6% momen plastis ultimat  $M_p$  dapat dicapai. Pada titik ini bagian tengah dari balok masih tetap elastis.

Dalam melepaskan momen terpakai, balok tersebut memantul kembali secara kenyal, seperti yang terlihat dalam gambar. Berdasarkan ini lengkungan yang selebihnya dapat pula ditentukan.

Pembaca diingatkan kembali bahwa perbandingan antara  $M_p$  dan  $M_{yp}$  berubah-ubah terhadap penampang yang berlainan.

### CONTOH 11-8

Sebuah balok kantilever baja tuang yang lebarnya 160 mm mempunyai ukuran-ukuran lain seperti yang terlihat dalam Gambar 11-18(a). Tentukanlah defleksi ujung yang disebabkan oleh penggunaan dua beban masing-masing besarnya 44 kN. Anggaplah  $E = 200 \times 10^3$  MPa, dan  $\sigma_{yp} = \pm 240$  MPa.



Gambar 11-18



## PENYELESAIAN

Diagram momen terdapat dalam Gambar 11-18(b). Dari  $\sigma_{\max} = Mc/I$  diperoleh bahwa tegangan yang terbesar dalam segmen balok  $ab$  adalah 147 MPa, yang menunjukkan sifat elastis. Suatu perhitungan yang serupa untuk irisan balok yang dangkal memberikan tegangan 330 MPa, yang tidak mungkin, karena bahan menghasilkan pada 240 MPa.

Pemeriksaan kapasitas ultimat untuk irisan sedalam 50 mm berdasarkan kepada Persamaan 5-9 menghasilkan

$$M_p = M_{\text{ult}} = \sigma_{yp} \frac{bh^2}{4} = \frac{(240 \times 10)^3 (0,16)(0,050)^2}{4} = 24 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Perhitungan ini memperlihatkan bahwa meskipun balok menghasilkan sebagian, tetapi ia dapat membawa momen terpakai. Momen terpakai tersebut adalah  $\frac{11}{12} M_p$ . Berdasarkan hasil-hasil yang diperoleh dalam contoh yang lalu, ini berarti bahwa kurva pada irisan balok sedalam 50 mm adalah dua kali daripada peluluhan awal. Karena itu kurva pada segmen balok 250 mm yang berdampingan dengan tumpuan adalah

$$\frac{1}{\rho} = 2\kappa_{yp} = 2 \frac{\epsilon_{yp}}{h/2} = 2 \frac{\sigma_{yp}}{Eh/2} = \frac{2 \times 240}{200 \times 10^3 \times 0,025} = 96 \times 10^{-3} \text{ per m}$$

Kurva maksimum segmen  $ab$  adalah

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_{\max}}{EI} = \frac{\sigma_{\max}}{Ec} = \frac{147}{200 \times 10^3 \times 0,0375} = 19,6 \times 10^{-3} \text{ per m}$$

Data-data ini pada lengkungan tergambar dalam Gambar 11-18(c). Dengan mengintegrasikannya dua kali dengan  $\theta(0) = 0$  dan  $v(0) = 0$ , maka kita mendapatkan lengkung defleksi, Gambar 11-18(e). Defleksi ujung ini adalah 17 mm ke atas.

Bila beban-beban terpakai dilepaskan, maka balok itu akan memantul kembali secara elastis kekeadaan semula sekitar 12 mm pada ujung, sedang sisa defleksi ujung lain masih ada 5 mm. Kurva sisa ini terbatas pada segmen balok sedalam 50 mm.

Bila beban ujung saja yang digunakan, balok tersebut akan hancur. Superposisi tidak dapat digunakan untuk memecahkan persoalan ini.

### \*11-11 PENDAHULUAN METODA LUAS-MOMEN (MOMENT-AREA)

Dalam berbagai penggunaan teknik di mana defleksi balok harus ditentukan, pembebanan adalah rumit, sedang daerah penampang balok adalah bervariasi. Hal ini biasa terjadi pada poros-poros mesin, di mana terdapat variasi-variasi diameter poros yang berangsur-angsur atau pun berubah tiba-tiba, yang dibuat untuk memuat rotor, bantalan, kerah, penahan, dan seterusnya. Demikian juga, balok-balok yang berbentuk pinggang atau tirus (meruncing ke ujung) sering digunakan dalam pesawat terbang mau pun konstruksi jembatan. Melalui penafsiran semigrafis operasi matematis pemecahan persamaan diferensial yang dipergunakan, suatu prosedur efektif untuk memperoleh defleksi dalam keadaan yang rumit dapat pula dikembangkan. Dengan menggunakan prosedur alternatif ini, kita menemukan bahwa persoalan dengan diskontinuitas beban

dan variasi tertentu dari inersia luas penampang balok tidak menimbulkan keruwetan dan hanya membutuhkan sedikit pekerjaan matematis dalam pemecahan. Pemecahan persoalan tersebut, merupakan tujuan pasal-pasal berikut yang berkenaan dengan metoda luas-momen.\*

Metoda yang dikembangkan biasanya dipegunakan hanya untuk memperoleh pergeseran (displacement) dan rotasi pada sebuah titik tunggal dalam balok. Metoda ini dapat digunakan untuk menentukan persamaan kurva elastis, tetapi tidak ada keuntungan yang dapat kita peroleh dibandingkan dengan pemecahan langsung persamaan diferensial. Seringkali dalam pemecahan persoalan-persoalan praktis yang menarik perhatian besar adalah defleksi atau perputaran sudut kurva elastis, atau keduanya, pada suatu titik tertentu dari balok.

Metoda luas momen hanya merupakan metoda alternatif dalam menyelesaikan persoalan defleksi. Sistem ini mempunyai pendekatan dan pembatasan yang sama dengan yang kita bahas sebelum ini, yang berhubungan dengan penyelesaian persamaan diferensial kurva elastis. Dengan mempergunakan metoda tersebut, kita hanya dapat menentukan defleksi yang disebabkan oleh kelenturan balok; defleksi yang disebabkan oleh geser diabaikan. Di sini penggunaan metoda tersebut akan terbatas pada balok statis tertentu. Keadaan statis tak tentu akan ditinjau dalam bab yang berikut.

#### \*11-12 PENURUNAN TEOREMA LUAS-MOMEN (MOMENT-AREA)

Teorema-teorema yang penting didasarkan kepada geometri dari kurva elastis serta diagram  $M/(EI)$  yang bersangkutan. Syarat-syarat batas tidak masuk ke dalam penurunan teorema karena teorema tersebut hanya didasarkan kepada penafsiran integral tertentu. Seperti akan diperlihatkan kemudian, diperlukan peninjauan geometris lanjutan untuk memecahkan persoalan secara lengkap.

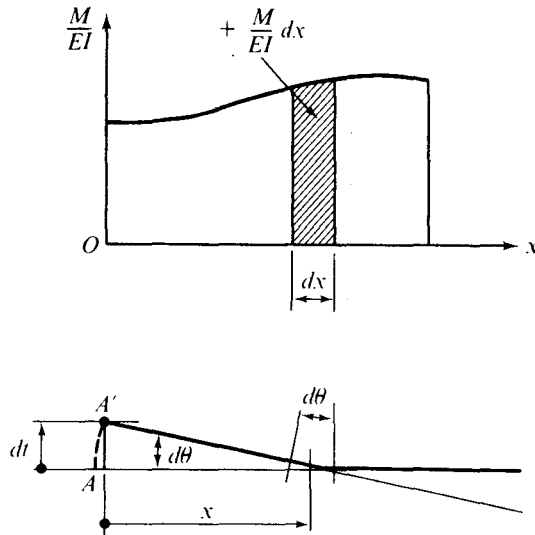
Untuk menurunkan teorema tersebut, Persamaan 11-10,  $d^2v/dx^2 = M/(EI)$ , dapat ditulis kembali dalam bentuk lain sebagai berikut:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dv}{dx} \right) = \frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI} \quad \text{atau} \quad d\theta = \frac{M}{EI} dx \quad (11-27)$$

Dari Gambar 11-19(a), besaran  $[M/(EI)]dx$  menyatakan luas yang kecil tak berhingga dari diagram  $M/(EI)$ . Sesuai dengan Persamaan 11-27 luas ini sama dengan perubahan sudut antara dua garis singgung yang berdekatan. Pengaruh perubahan sudut ini dalam sebuah elemen terhadap deformasi kurva elastis diperlihatkan dalam Gambar 11-19(b).

Bila perubahan sudut kecil  $d\theta$  untuk sebuah elemen dikalikan dengan suatu jarak  $x$  dari sebuah titik asal tetap dengan elemen yang sama, maka kita peroleh jarak vertikal  $dt$ , lihat Gambar 11-19(b). Bila yang ditinjau hanyalah defleksi yang kecil, maka tidak perlu dibuat perbedaan antara busur  $AA'$  dengan jarak vertikal  $dt$ . Berdasarkan alasan

\* Pengembangan metoda luas-momen untuk mendapatkan defleksi balok dilakukan oleh Charles E. Greene dari Universitas Michigan, yang mengajarkannya dalam kelasnya pada tahun 1873. Beberapa waktu sebelumnya, dalam tahun 1868, Otto Mohr, dari Dresden, Jerman, mengembangkan metoda yang sama yang kemunculannya tidak diketahui oleh Professor Greene.



Gambar 11-19 Penafsiran suatu perubahan sudut kecil dalam sebuah elemen

geometris ini, kita mendapatkan

$$dt = x d\theta = \frac{M}{EI} x dx \quad (11-28)$$

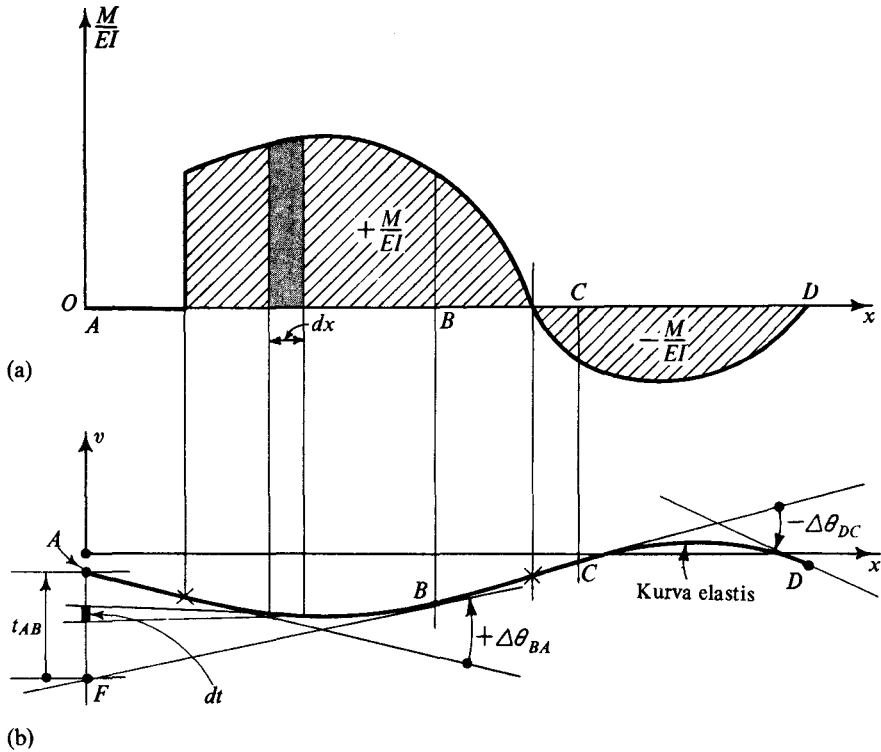
Dengan mengintegrasikan Persamaan-persamaan 11-27 dan 11-28 antara kedua titik seperti  $A$  dan  $B$  pada balok (lihat Gambar 11-20), kita mendapatkan dua teorema luas momen. Yang pertama adalah

$$\int_A^B d\theta = \theta_B - \theta_A = \Delta\theta_{BA} = \int_A^B \frac{M}{EI} dx \quad (11-29)$$

Ini menyatakan bahwa perubahan sudut yang diukur dalam radian antara kedua garis singgung pada kedua titik  $A$  dan  $B$  pada kurva elastis adalah sama dengan luas  $M/(EI)$  yang dibatasi oleh ordinat-ordinat melalui  $A$  dan  $B$ . Karena itu bila kemiringan kurva elastis pada sebuah titik, seperti pada  $A$ , yang diketahui, maka kemiringan pada titik lain di sebelah kanan, seperti pada  $B$ , dapat pula ditentukan:

$$\theta_B = \theta_A + \Delta\theta_{BA} \quad (11-30)$$

Teorema pertama menunjukkan bahwa evaluasi numerik luas  $M/(EI)$  yang dibatasi oleh ordinat yang melalui kedua titik pada kurva elastis memberikan perputaran sudut antara garis-garis singgung yang bersangkutan. Dalam melaksanakan penjumlahan ini, luas yang sesuai dengan momen lentur positif diambil positif, sedang yang sesuai dengan momen negatif diambil negatif. Apabila jumlah luas antara kedua titik seperti  $A$



Gambar 11-20 Hubungan antara diagram  $M/(EI)$  dan kurva elastis

dan  $B$  adalah positif, maka garis singgung yang di kanan akan berputar berlawanan dengan arah jarum jam; sedang untuk yang negatif, garis singgung yang di kanan berputar searah jarum jam (lihat Gambar 11-20(b)). Bila luas netto adalah nol, maka kedua garis singgung adalah sejajar.

Besaran  $dt$  dalam Gambar 11-20(b) disebabkan oleh pengaruh kurva sebuah elemen. Dengan menjumlahkan pengaruh ini untuk semua elemen dari  $A$  ke  $B$ , diperoleh jarak vertikal  $AF$ . Secara geometris jarak ini menyatakan penyimpangan sebuah titik  $A$  dari suatu garis singgung pada kurva elastis di  $B$ . Karena itu, ia disebut *simpangan singgung* (tangential deviation) dari titik  $A$  pada garis singgung di  $B$  dan akan ditulis sebagai  $t_{AB}$ . Hal ini, dalam bentuk matematisnya, menghasilkan teorema luas momen yang kedua:

$$t_{AB} = \int_A^B d\theta x = \int_A^B \frac{M}{EI} x dx \quad (11-31)$$

Ini menyatakan bahwa simpangan singgung titik  $A$  pada kurva elastis dari garis singgung di titik lain (titik  $B$ ) yang juga terdapat pada kurva elastis adalah sama dengan momen statis (pertama) irisan terbatas dari diagram  $M/(EI)$  terhadap garis vertikal

melalui  $A$ . Dalam banyak hal, penyimpangan singgung itu sendiri tidaklah diinginkan oleh defleksi sebuah balok.

Dengan menggunakan definisi pusat berat luas, maka untuk mudahnya kita dapat menyatakan kembali Persamaan 11-31 dalam penerapan numerik dalam bentuk yang lebih sederhana seperti

$$t_{AB} = \Phi \bar{x} \quad (11-32)$$

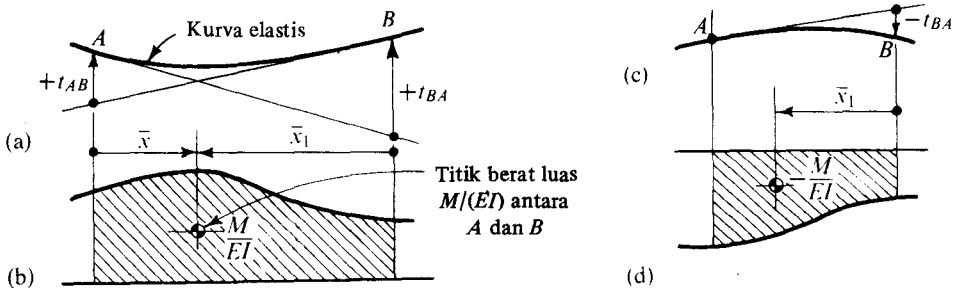
di mana  $\Phi$  adalah luas total diagram  $M/(EI)$  antara dua titik yang ditinjau dan  $\bar{x}$  adalah jarak mendatar dari titik  $A$  ke titik berat luas ini.

Dengan alasan yang sama penyimpangan titik  $B$  dari garis singgung melalui  $A$  adalah

$$t_{BA} = \Phi \bar{x}_1 \quad (11-33)$$

di mana dipergunakan luas  $M/(EI)$  yang sama, tetapi  $\bar{x}_1$  diukur dari garis vertikal yang melalui titik  $B$ , Gambar 11-21. Perhatikan betul orde tanda huruf  $t$  dalam kedua persamaan ini. Titik yang penyimpangannya sedang ditentukan ditulis pertama.

Dalam persamaan-persamaan di atas, jarak  $\bar{x}$  atau  $\bar{x}_1$  selalu diambil positif. Dan karena  $E$  dan  $I$  merupakan besaran-besaran yang positif pula, maka tanda dari penyimpangan singgung tergantung pada tanda momen lentur itu. Harga positif dari penyimpangan singgung menunjukkan bahwa suatu titik tertentu terletak di atas garis singgung pada kurva elastis yang ditarik melalui titik lain dan demikian pula sebaliknya, Gambar 11-21.



Gambar 11-21 Arti dari tanda untuk penyimpangan singgung

Kedua teorema di atas berlaku antara dua titik yang sembarang pada suatu kurva elastis yang kontinu dari suatu balok untuk pembebanan yang sembarang. Teorema-teorema tersebut berlaku antara dan di luar reaksi-reaksi balok ujung gantung dan balok menerus. Tetapi di sini harus ditegaskan bahwa yang dapat kita peroleh secara langsung hanyalah rotasi garis singgung relatif dan penyimpangan singgung saja. Peninjauan lanjut dari geometris kurva elastis pada tumpuan, melibatkan pula syarat-syarat batas adalah penting; untuk menentukan defleksi dalam setiap kasus. Hal ini akan dilukiskan dalam contoh-contoh yang berikut.

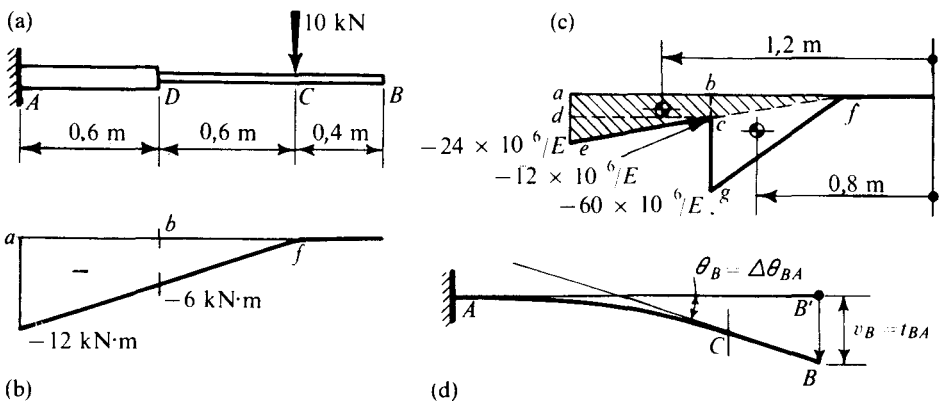
Dalam menggunakan metoda luas momen adalah selalu perlu untuk mempersiapkan dengan cermat skets kurva elastis. Karena pada tumpuan-tumpuan berpasak dan rol tidak mungkin ada defleksi, maka kurva elastis digambar melalui tumpuan-tumpuan tersebut. Pada tumpuan jepit, tidak ada penyimpangan atau perputaran garis singgung pada kurva elastis yang diperbolehkan, jadi kurva elastis haruslah digambar menyinggung arah sumbu balok yang tidak dibebani. Dalam mempersiapkan skets kurva elastis dengan cara di atas, biasanya defleksi yang kita harapkan terlihat secara berlebihan. Pada skets yang demikian, defleksi sebuah titik pada balok, biasanya berkenaan dengan keadaan di atas atau di bawah kedudukan awal, tanpa banyak memperhatikan tanda. Untuk membantu dalam penggunaan metoda tersebut, sifat-sifat yang berguna dari luas yang dibatasi oleh kurva dan titik berat dapat dilihat dalam Tabel 2 Lampiran.

### CONTOH 11-9

Tinjaulah sebuah balok kantilever aluminium yang panjangnya 1,6 m dengan gaya 10 kN diberikan pada 0,4 m dari ujung bebas, seperti yang terlihat dalam Gambar 11-22(a). Untuk jarak 0,6 m dari ujung jepit, balok tersebut mempunyai tinggi yang lebih besar daripada yang sebelah ujung, mempunyai  $I_1 = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^4$ . Sedangkan sisanya 1 m untuk bagian balok ujung  $I_2 = 1 \times 10^{-4} \text{ m}^4$ . Tentukanlah defleksi dan perputaran sudut dari ujung bebas. Abaikanlah berat dari balok tersebut dan anggaplah  $E$  untuk aluminium pada  $70 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ .

### PENYELESAIAN

Diagram momen lentur terdapat pada Gambar 11-22(b). Dengan membagi semua ordinat diagram  $M$  dengan  $EI$ , maka diagram  $M/(EI)$  dalam Gambar 11-22(c) diperoleh.\* Dua ordinat muncul di  $D$ . Satu,  $-12 \times 10^6/E$ , yang berlaku disebelah kiri  $D$ ; yang lain,  $-60 \times 10^6/E$ , yang berlaku disebelah kanan  $D$ . Karena momen lentur adalah negatif dari  $A$  ke  $C$ , maka kurva elastis dalam jarak ini adalah mencekung ke bawah, Gam-



Gambar 11-22

\* Dalam menggambar diagram ini kilonewton (kN) diubah menjadi newton (N).

bar 11-22(d). Pada tumpuan jepit  $A$ , kurva elastis harus mulai dengan menyinggung arah awal  $AB'$  dari balok yang tidak dibebani. Segmen balok lurus yang tidak dibebani  $CB$  menyinggung kurva elastis di  $C$ .

Sesudah langkah-langkah yang berhubungan dengan persiapan yang baru lalu, dari geometri skets kurva elastis kita dapat melihat bahwa jarak  $BB'$  menunjukkan defleksi yang dikehendaki dari ujung bebas. Tetapi  $BB'$  merupakan pula penyimpangan singgung titik  $B$  dari garis singgung pada  $A$ . Karena itu teorema luas-momen kedua dapat dipakai untuk memperoleh  $t_{BA}$ , yang dalam kasus ini menyatakan defleksi dari ujung bebas. Juga, dari geometri kurva elastis dapat pula dilihat bahwa sudut yang terletak antara garis-garis  $BC$  dan  $AB'$  merupakan perputaran sudut segmen  $CB$ . Sudut ini sama dengan yang terletak antara garis-garis singgung pada kurva elastis di titik  $A$  dan  $B$ , hingga teorema luas-momen pertama dapat pula digunakan untuk menghitung besaran ini.

Adalah lebih baik untuk memperpanjang garis  $ec$  dalam Gambar 11-22(c) sampai ke titik  $f$  untuk menghitung luas diagram  $M/(EI)$ . Garis ini memberikan dua buah segitiga, yang luasnya mudah dihitung.†

Luas segitiga  $afe$  :

$$\Phi_1 = -\frac{1}{2} \frac{(1,2)(24 \times 10^6)}{E} = -14,4 \times \frac{10^6}{E}$$

Luas segitiga  $fcg$  :

$$\Phi_2 = -\frac{1}{2} \frac{(0,6)(48 \times 10^6)}{E} = -14,4 \times \frac{10^6}{E}$$

$$\theta_B = \Delta\theta_{BA} = \int_A^B \frac{M}{EI} dx = \Phi_1 + \Phi_2 = -\frac{28,8 \times 10^6}{70 \times 10^9}$$

$$= -0,411 \times 10^{-3} \text{ radian}$$

$$v_B = t_{BA} = \Phi_1 \bar{x}_1 + \Phi_2 \bar{x}_2 = \frac{-14,4 \times 10^6}{E} (1,2) + \frac{-14,4 \times 10^6}{E} (0,8)$$

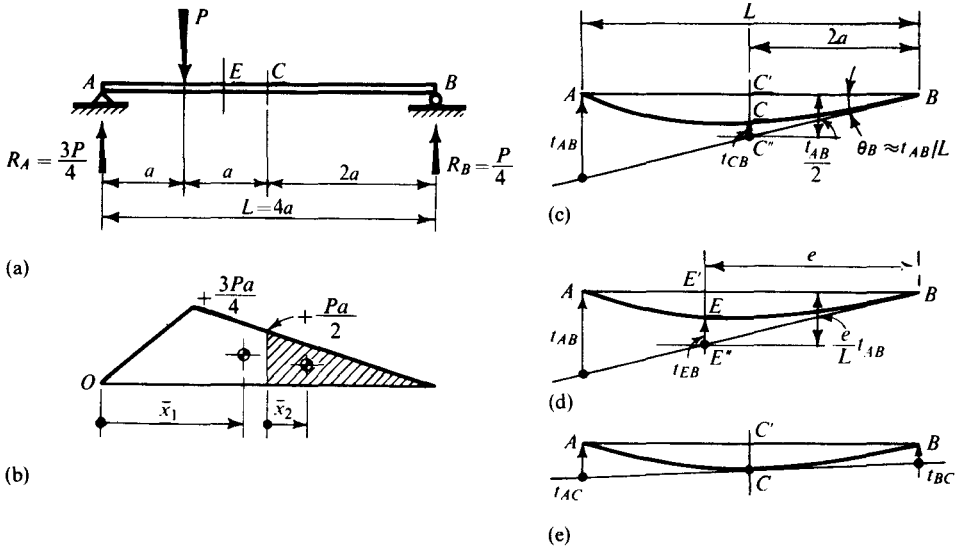
$$= -0,411 \times 10^{-3} \text{ m} = -0,411 \text{ mm}$$

Perhatikanlah kekerdilan numerik kedua harga di atas. Tanda negatif dari  $\Delta\theta$  menunjukkan putaran searah jarum jam dari garis singgung pada  $B$  dalam hubungan dengan garis singgung pada  $A$ . Tanda negatif  $t_{BA}$  berarti bahwa titik  $B$  berada di bawah garis singgung melalui  $A$ .

#### CONTOH 11-10

Hitunglah defleksi yang disebabkan oleh gaya terpusat  $P$  yang bekerja seperti yang terlihat dalam Gambar 11-23(a) pada pusat balok yang mempunyai tumpuan sederhana. Kekakuan lentur  $EI$  adalah tetap.

† Sedikit kecerdikan dalam kasus seperti ini menghemat pekerjaan hitung-menghitung. Tentu akan menjadi lebih benar lagi bila dalam contoh ini menggunakan dua daerah segitiga  $dce$  dan  $bfg$  dan sebuah segitimpat  $abcd$ .



Gambar 11-23

### PENYELESAIAN

Diagram momen lentur terdapat dalam Gambar 11-23(b). Karena  $EI$  tetap, maka diagram  $M/(EI)$  tidak perlu dibuat, karena luas diagram momen lentur dibagi dengan  $EI$  dapat memberikan besaran-besaran yang diperlukan untuk digunakan dalam teorema luas momen. Kurva elastis ada dalam Gambar 11-23(c). Disepanjang balok, kurva ini cekung ke atas berhubung momen lenturnya positif. Kurva ini haruslah melalui titik-titik tumpuan  $A$  dan  $B$ .

Dari skets kurva elastis jelas kelihatan bahwa besaran yang dikehendaki dinyatakan oleh jarak  $CC'$ . Lebih lanjut lagi, dari tinjauan geometris murni atau kinematika,  $CC' = C''C - C''C$ , di mana jarak  $C''C$  diukur dari suatu garis singgung pada kurva elastis dan melalui titik tumpuan  $B$ . Tetapi karena penyimpangan sebuah titik tumpuan dari sebuah garis singgung pada kurva elastis pada titik tumpuan yang lain selalu dapat dihitung dengan teorema luas momen yang ke dua, maka jarak seperti  $C''C$  dapat diperoleh dengan perbandingan geometri gambar. Dalam kasus ini,  $t_{AB}$  disusul dengan mengambil seluruh luas  $M/(EI)$  antara  $A$  dan  $B$  dan mengalikannya\* dengan  $\bar{x}$  yang bersangkutan diukur dari suatu garis vertikal melalui  $A$ , jadi  $C''C = \frac{1}{2}t_{AB}$ . Dengan penggunaan lain teorema luas momen kedua, maka  $t_{CB}$  yang sama dengan  $C''C$ , dapat pula ditentukan. Untuk kasus ini, luas  $M/(EI)$  diberi bergaris-garis dalam Gambar 11-23(b)

\* Lihatlah Tabel 2 dari Lampiran untuk titik berat luas segitiga seluruhnya. Selain dari pada itu, dengan menghitung luas seluruh  $M/(EI)$  sebagai dua segitiga,

$$t_{AB} = \frac{1}{EI} \left( \frac{a}{2} \frac{3Pa}{4} \frac{2a}{3} + \frac{1}{EI} \left( \frac{3a}{2} \frac{3Pa}{4} \right) \left( a + \frac{3a}{3} \right) \right) = + \frac{5Pa^3}{2EI}$$



dan untuk itu,  $\bar{x}$  diukur dari titik  $C$ . Karena reaksi sebelah kanan adalah  $P/4$  dan jarak  $CB = 2a$ , maka ordinat maksimum dari segitiga yang bergaris-garis adalah  $+Pa/2$ .

$$\begin{aligned}v_C &= C'C'' - C''C = (t_{AB}/2) - t_{CB} \\t_{AB} &= \Phi_1 \bar{x}_1 = \frac{1}{EI} \left( \frac{4a}{2} \frac{3Pa}{4} \right) \frac{(a + 4a)}{3} = + \frac{5Pa^3}{2EI} \\t_{CB} &= \Phi_2 \bar{x}_2 = \frac{1}{EI} \left( \frac{2a}{2} \frac{Pa}{2} \right) \frac{(2a)}{3} = + \frac{Pa^3}{3EI} \\v_C &= \frac{t_{AB}}{2} - t_{CB} = \frac{5Pa^3}{4EI} - \frac{Pa^3}{3EI} = \frac{11Pa^3}{12EI}\end{aligned}$$

Tanda-tanda yang positif dari  $t_{AB}$  dan  $t_{CB}$  menunjukkan bahwa titik-titik  $A$  dan  $C$  terletak di atas garis singgung yang melalui  $B$ . Seperti dapat dilihat dari Gambar 11-23(c) defleksi pada pertengahan balok adalah arah ke bawah.

Kemiringan kurva elastis di titik  $C$  dapat diperoleh dari kemiringan pada salah satu ujung dan dari Persamaan 11-30. Untuk titik  $B$  disebelah kanan

$$\begin{aligned}\theta_B &= \theta_C + \Delta\theta_{BC} \quad \text{atau} \quad \theta_C = \theta_B - \Delta\theta_{BC} \\ \theta_C &= \frac{t_{AB}}{L} - \Phi_2 = \frac{5Pa^2}{8EI} - \frac{Pa^2}{2EI} = \frac{Pa^2}{8EI} \quad (\text{radian berlawanan arah jarum jam})\end{aligned}$$

Prosedur di atas untuk mendapatkan defleksi sebuah titik pada kurva elastis adalah berlaku secara umum. Umpamanya bila defleksi titik  $E$ , Gambar 11-23(d), jarak  $e$  dari  $B$  yang kita kehendaki, maka jawaban dapat dirumuskan sebagai

$$v_E = E'E'' - E''E = (e/L)t_{AB} - t_{EB}$$

Dengan menentukan letak titik  $E$  pada jarak  $x$  yang bervariasi dari salah satu titik tumpuan, maka kita akan memperoleh persamaan kurva elastis.

Untuk menyederhanakan pekerjaan hitung menghitung, beberapa kecermatan dalam memilih garis singgung pada suatu tumpuan haruslah dilatih. Jadi meskipun  $v_C = t_{BA}/2 - t_{CA}$  (tidak diperlihatkan dalam diagram), penyelesaian ini akan melibatkan penggunaan bagian daerah yang tidak bergaris-garis dari diagram momen lentur, Gambar 11-23(b), untuk mendapatkan  $t_{CA}$ , jadi lebih sukar.

#### PENYELESAIAN CARA LAIN

Penyelesaian soal yang baru lalu dapat didasarkan kepada konsep geometris yang berlainan. Ini dilukiskan dalam Gambar 11-23(e), di mana garis-garis singgung pada kurva elastis ditarik pada  $C$ . Kemudian, karena jarak  $AC$  dan  $CB$  adalah sama, maka

$$v_C = CC' = (t_{AC} + t_{BC})/2$$

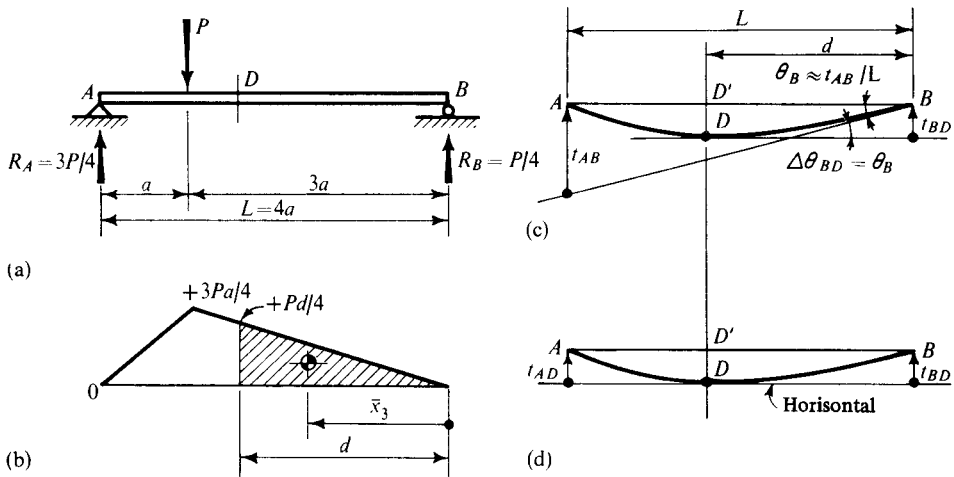
yaitu jarak  $CC'$  merupakan harga rata-rata  $t_{AC}$  dan  $t_{BC}$ . Penyimpangan singgung  $t_{AC}$  diperoleh dengan mengambil momen pertama dari luas  $M/(EI)$  yang tidak bergaris-garis

pada Gambar 11-23(b) terhadap  $A$ , sedang  $t_{BC}$  diberikan oleh momen pertama luas  $M/(EI)$  yang bergaris-garis terhadap  $B$ . Perincian numerik dari penyelesaian ini diserahkan untuk disempurnakan oleh pembaca. Prosedur ini biasanya lebih lama dari yang pertama.

Perlu diperhatikan bahwa bila sekiranya kurva elastis tidak simetris, maka garis singgung ditengah-tengah balok tidak horisontal.

#### CONTOH 11-11

Untuk balok prismatic yang dibebani seperti terdapat dalam contoh yang baru lalu, hitunglah defleksi maksimum yang disebabkan oleh penggunaan gaya  $P$ , Gambar 11-24(a).



Gambar 11-24

#### PENYELESAIAN

Diagram momen lentur dan kurva elastis masing-masing dapat dilihat dalam Gambar 11-24(b) dan (c). Kurva elastis tersebut pada sepanjang balok berbentuk cekung ke atas, sedang defleksi maksimum terjadi di mana garis singgung pada kurva elastis adalah mendatar. Titik singgung ini dalam gambar ditulis dengan  $D$  yang letaknya diukur dalam arah mendatar dari titik tumpuan  $B$  yaitu jarak  $d$  yang belum diketahui. Kemudian dengan menggambar sebuah garis singgung pada kurva elastis melalui titik tumpuan  $B$ , kita melihat bahwa  $\Delta\theta_{BD} = \theta_B$  karena garis yang melalui tumpuan-tumpuan adalah mendatar. Tetapi kemiringan  $\theta_B$  dari kurva elastis pada  $B$  dapat kita tentukan dengan mendapatkan harga  $t_{AB}$  dan membaginya dengan panjang bentangan. Di pihak lain, dengan menggunakan teorema luas-momen yang pertama,  $\Delta\theta_{BD}$  dapat dinyatakan dalam bentuk luas daerah bergaris-garis dalam Gambar 11-24(b). Dengan menyamakan  $\Delta\theta_{BD}$  dengan  $\theta_B$  dan menyelesaikannya untuk mendapat harga  $d$ , yang menentukan letak garis singgung mendatar di  $D$ . Kemudian dari tinjauan geometris pula,

kita melihat bahwa defleksi maksimum dinyatakan oleh  $DD'$  adalah sama dengan penyimpangan singgung titik  $B$  dari garis singgung mendatar yang melalui  $D$  yaitu  $t_{BD}$ .

$$t_{AB} = \Phi_1 \bar{x}_1 = + \frac{5Pa^3}{2EI} \quad (\text{lihat Contoh 11-10})$$

$$\theta_B = \frac{t_{AB}}{L} = \frac{t_{AB}}{4a} = \frac{5Pa^2}{8EI}$$

$$\Delta\theta_{BD} = \frac{1}{EI} \left( \frac{d}{2} \frac{Pd}{4} \right) = \frac{Pd^2}{8EI} \quad (\text{luas antara } D \text{ dan } B)$$

Karena  $\theta_B = \theta_D + \Delta\theta_{BD}$  dan diperlukan bahwa  $\theta_D = 0$ ,

$$\Delta\theta_{BD} = \theta_B, \quad \frac{Pd^2}{8EI} = \frac{5Pa^2}{8EI} \quad \text{jadi } d = \sqrt{5}a$$

$$\begin{aligned} v_{\max} = v_D = DD' = t_{BD} &= \Phi_3 \bar{x}_3 \\ &= \frac{1}{EI} \left( \frac{d}{2} \frac{Pd}{4} \right) \frac{2d}{3} = \frac{5\sqrt{5}Pa^3}{12EI} = \frac{11,2Pa^3}{12EI} \end{aligned}$$

Setelah jarak  $d$  diperoleh, maka defleksi maksimum dapat pula diperoleh, karena  $v_{\max} = t_{AD}$  atau  $v_{\max} = (d/L)t_{AB} - t_{DB}$  (tidak diperlihatkan dalam gambar). Perhatikan pula bahwa dengan menggunakan syarat  $t_{AD} = t_{BD}$ , Gambar 11-24(d), maka persamaan untuk  $d$  dapat dibuat.

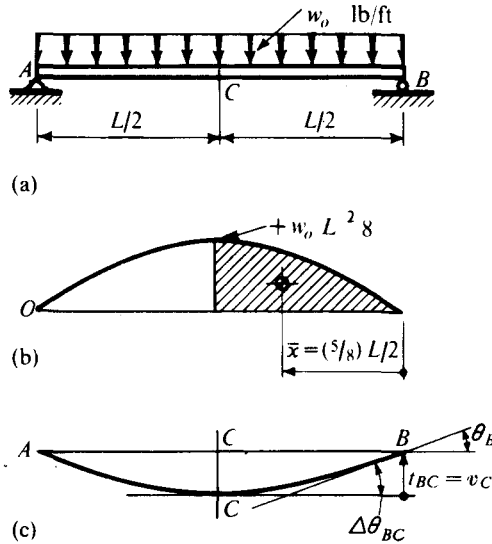
Dari penyelesaian di atas jelas kelihatan bahwa adalah lebih mudah untuk menghitung defleksi pada tengah-tengah balok, yang telah diutarakan dalam Contoh 11-10, daripada menentukan defleksi maksimum. Namun dengan memeriksa hasil-hasil akhir, kita melihat bahwa secara numerik kedua defleksi di atas menunjukkan perbedaan yang kecil:  $v_{\text{tengah}} = 11Pa^3/(12EI)$  dibandingkan dengan  $v_{\max} = 11,2Pa^3/(12EI)$ . Dengan alasan ini, dalam banyak persoalan praktis dari balok yang bertumpuan sederhana, di mana semua gaya terpakai bekerja, dalam arah yang sama, lebih efisienlah untuk menghitung defleksi pada tengah-tengah balok daripada mencoba untuk mendapatkan harga maksimum yang sesungguhnya dari defleksi.

#### CONTOH 11-12

Dalam sebuah balok yang bertumpuan sederhana, hitunglah defleksi maksimum dan perputaran kurva elastis pada ujung-ujung, yang disebabkan oleh penggunaan sebuah beban yang terdistribusi merata sebesar  $w_0$  N/m, Gambar 11-25(a). Kekakuan lentur  $EI$  adalah konstan.

#### PENYELESAIAN

Diagram momen lentur terdapat dalam Gambar 11-25(b). Seperti telah ditentukan dalam Contoh 4-6, diagram ini berbentuk parabola berderajat dua dengan harga maksimum pada puncak dari  $w_0L^2/8$ . Kurva elastis yang melalui titik-titik tumpuan  $A$  dan  $B$  diperlihatkan dalam Gambar 11-25(c).



Gambar 11-25

Dalam kasus ini, diagram  $M/(EI)$  adalah simetris terhadap garis vertikal yang melalui pusat. Karena itu lengkung kenyal haruslah pula simetris dan garis singgung pada lengkung ini yang melalui tengah-tengah balok adalah horisontal. Dari gambar tersebut kita melihat bahwa  $\Delta\theta_{BC}$  sama dengan  $\theta_B$ , dan perputaran ujung  $B$  sama dengan setengah luas\* total diagram  $M/(EI)$ . Jarak  $CC'$  adalah defleksi yang dikehendaki, dan dari geometri gambar itu kita melihat bahwa defleksi tersebut sama dengan  $t_{BC}$  (atau  $t_{AC}$ , tidak kelihatan).

$$\Phi = \frac{1}{EI} \left( \frac{2}{3} \frac{L}{2} \frac{w_o L^2}{8} \right) = \frac{w_o L^3}{24EI}$$

$$\theta_B = \Delta\theta_{BC} = \Phi = + \frac{w_o L^3}{24EI}$$

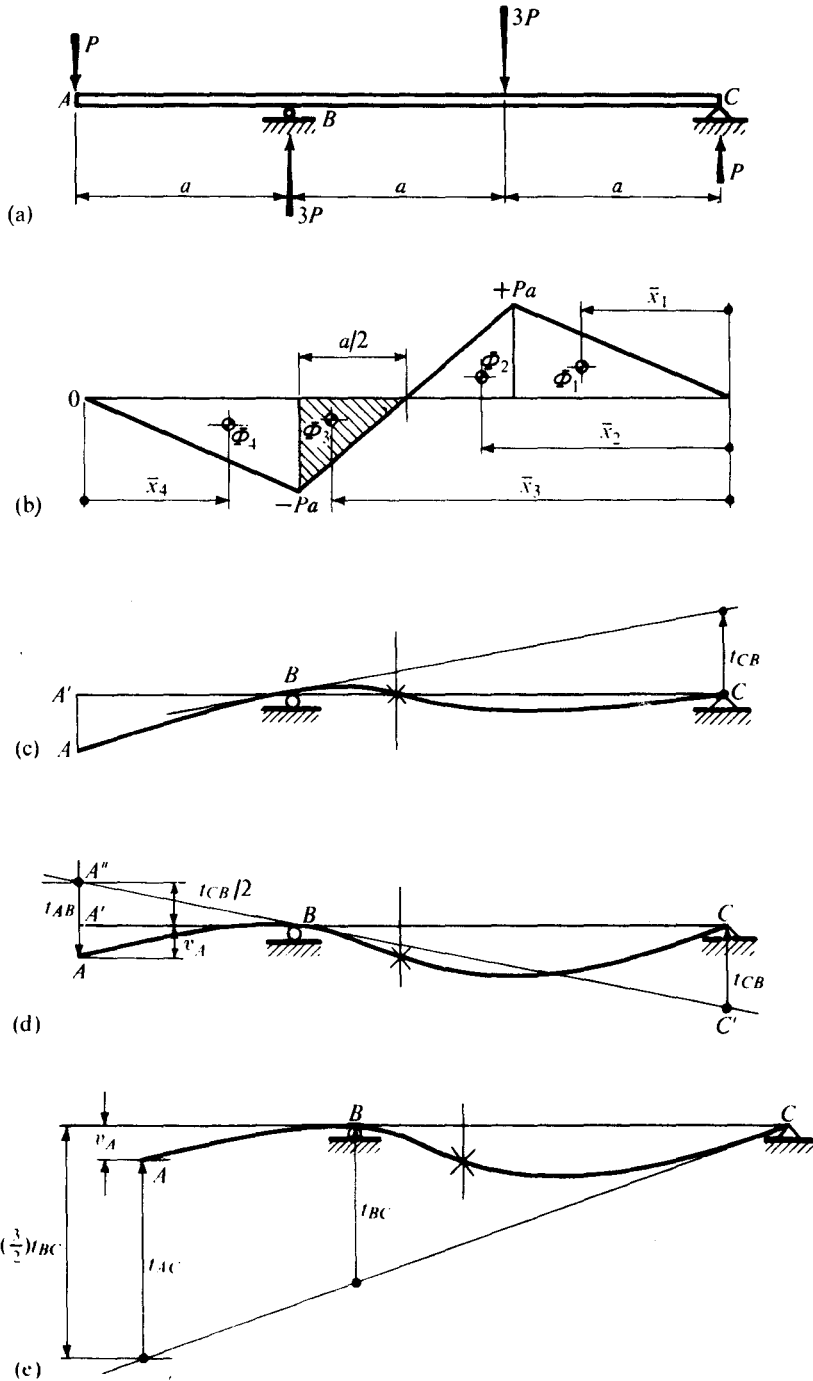
$$v_C = v_{\max} = t_{BC} = \Phi \bar{x} = \frac{w_o L^3}{24EI} \frac{5L}{16} = \frac{5w_o L^4}{384EI}$$

Harga defleksi ini sesuai dengan Persamaan 11-22, yang menghasilkan besaran yang sama dengan yang diturunkan dengan metoda integrasi. Karena titik  $B$  adalah di atas garis singgung melalui  $C$ , tanda  $v_C$  adalah positif.

#### CONTOH 11-13

Hitunglah defleksi ujung bebas  $A$  dari balok yang terlihat dalam Gambar 11-26(a) yang disebabkan oleh gaya-gaya terpakai.  $EI$  adalah tetap.

\* Lihat Tabel 2 dari Lampiran untuk rumus yang memberikan luas yang diselubungi oleh parabola praktis untuk  $\bar{x}$ .



Gambar 11-26

## PENYELESAIAN

Diagram momen lentur untuk gaya terpakai diperlihatkan dalam Gambar 11-26(b). Momen lentur berubah tanda pada jarak  $a/2$  dari titik tumpuan sebelah kiri. Pada titik ini terjadi suatu infleksi (pembengkokan) pada kurva elastis. Sesuai dengan momen positif, maka kurva tersebut berbentuk cekung ke atas dan demikian pula sebaliknya. Kurva elastis tersebut digambar melalui titik-titik tumpuan  $B$  dan  $C$ , Gambar 11-26(c). Sebagai permulaan, kemiringan garis singgung pada kurva elastis pada titik tumpuan  $B$  dapat ditentukan dengan menghitung  $t_{CB}$  sebagai momen luas statis dengan tanda-tanda yang tepat dari diagram  $M/(EI)$  antara garis-garis vertikal yang melalui  $C$  dan  $B$  sekitar  $C$ .

$$\begin{aligned} t_{CB} &= \Phi_1 \bar{x}_1 + \Phi_2 \bar{x}_2 + \Phi_3 \bar{x}_3 \\ &= \frac{1}{EI} \left[ \frac{a}{2} (+Pa) \frac{2a}{3} + \frac{1}{2} \frac{a}{2} (+Pa) \left( a + \frac{1}{3} \frac{a}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{a}{2} (-Pa) \left( \frac{3a}{2} + \frac{2}{3} \frac{a}{2} \right) \right] \\ &= + \frac{Pa^3}{6EI} \end{aligned}$$

Tanda positif  $t_{CB}$  menunjukkan bahwa titik  $C$  berada di atas garis singgung melalui  $B$ . Jadi skets kurva elastis yang benar telah kita buat, yaitu Gambar 11-26(d), di mana terlihat bahwa defleksi yang kita cari dihasilkan oleh jarak  $AA'$  dan yang sama dengan  $AA'' - A'A''$ . Selanjutnya, karena segitiga-segitiga  $A'A''B$  dan  $CC'B$  adalah sebangun, maka jarak  $A'A'' = t_{CB}/2$ . Dipihak lain, jarak  $AA''$  merupakan penyimpangan titik  $A$  dari garis singgung pada kurva elastis pada titik tumpuan  $B$ . Jadi

$$\begin{aligned} v_A &= AA' = AA'' - A'A'' = t_{AB} - t_{CB}/2 \\ t_{AB} &= \frac{1}{EI} (\Phi_4 \bar{x}_4) = \frac{1}{EI} \left[ \frac{a}{2} (-Pa) \frac{2a}{3} \right] = - \frac{Pa^3}{3EI} \end{aligned}$$

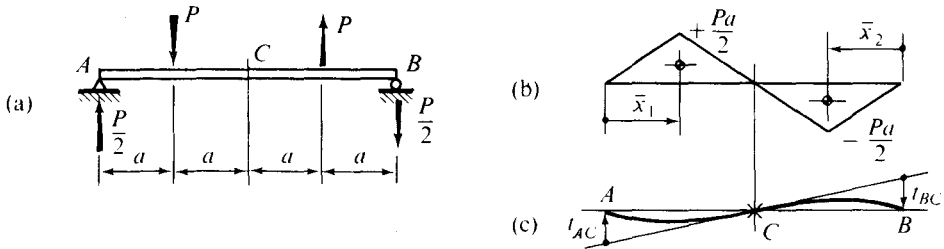
di mana tanda negatif berarti bahwa titik  $A$  berada di bawah garis singgung yang melalui titik  $B$ . Tanda ini untuk selanjutnya tidak digunakan lagi karena geometri kurva elastis menunjukkan arah penyimpangan yang sesungguhnya. Jadi defleksi titik  $A$  berada di bawah garis yang melalui titik-titik tumpuan yaitu

$$v_A = \frac{Pa^3}{3EI} - \frac{1}{2} \frac{Pa^3}{6EI} = \frac{Pa^3}{4EI}$$

Contoh ini menggambarkan perlunya perhatian terhadap tanda dari besaran-besaran yang dihitung dalam penggunaan metoda luas momen, meskipun biasanya lebih mudah untuk diselesaikan dibandingkan dengan contoh di atas. Umpamanya, bila defleksi ujung  $A$  ditentukan dengan pertama-tama mendapatkan rotasi kurva elastis pada  $C$ , kekacauan tidak akan didapati dalam arah garis singgung. Skema analisa ini diperlihatkan dalam Gambar 11-26(e), di mana  $v_A = \frac{3}{2} t_{BC} - t_{AC}$ .

## CONTOH 11-14

Sebuah balok sederhana menumpu dua gaya  $P$  yang sama, tapi berlawanan arah pada



Gambar 11-27

titik-titik seperempatan, Gambar 11-27(a). Tentukanlah defleksi balok tersebut pada tengah-tengah bentangan.  $EI$  adalah tetap.

#### PENYELESAIAN

Diagram momen lentur dan kurva elastis dengan sebuah garis singgung di  $C$  masing-masing diperlihatkan dalam Gambar 11-27(b) dan (c). Kemudian karena momen-momen statis dari luas positif dan negatif dari diagram momen lentur, masing-masing terhadap  $A$  dan  $B$ , secara numerik adalah sama, yaitu  $|t_{AC}| = |t_{BC}|$ , maka defleksi balok ditengah-tengah bentangannya adalah nol. Kurva elastis dalam kasus ini adalah *anti simetris*. Dengan memperhatikan hal ini banyak pekerjaan dapat dihindarkan dalam mendapatkan defleksi pada *tengah-tengah bentangan*. Sedangkan defleksi titik lain pada kurva elastis haruslah diperoleh dengan cara yang biasa.

Contoh-contoh yang baru lalu melukiskan cara di mana metoda luas momen dapat digunakan untuk memperoleh defleksi balok statis tertentu. Tidak peduli, bagaimanapun rumitnya diagram  $M/(EI)$  yang akan ditemui, prosedur di atas dapat dipakai. Dalam praktek, setiap diagram  $M/(EI)$  jenis apa pun dapat didekati dengan sejumlah segiempat dan segitiga. Juga adalah mungkin untuk memasukkan sudut terpusat yang berubah pada sendi untuk menghitung diskontinuitas arah garis singgung pada titik-titik yang demikian. Besarnya konsentrasi dapat diperoleh dari syarat-syarat kinematika.\*

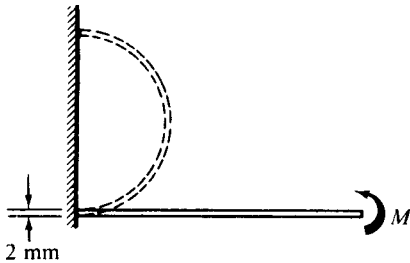
Untuk keadaan pembebanan yang lebih rumit, defleksi balok elastis yang ditentukan dengan metoda luas momen, sering lebih baik kalau diselesaikan dengan cara superposisi. Dengan cara ini luas diagram  $M/(EI)$  yang terpisah dapat berupa bentuk-bentuk geometri yang sederhana. Dalam bab yang berikut, superposisi akan digunakan dalam menyelesaikan soal-soal statis tak tentu.

Metoda yang digambarkan di sini dapat digunakan sangat efektif dalam menentukan defleksi balok yang tak elastis, asal saja diagram  $M/(EI)$  digantikan dengan diagram diagram kurva yang tepat.

\* Untuk pengerjaan yang sistematis dari persoalan-persoalan yang lebih rumit, lihat misalnya A.C. Scordelis and C.M. Smith, "An Analytical Procedure for Calculating Truss Displacements," *Proceeding of the American Society of Civil Engineers*, paper no. 732, July 1955, vol. 732.

## SOAL-SOAL UNTUK DISELESAIKAN

11-1. Sebuah pita baja  $2 \text{ mm} \times 6 \text{ mm}$  yang panjangnya 3142 mm dijepit pada salah satu ujung seperti yang terlihat dalam gambar. Berapakah momen ujung yang diperlukan untuk memaksa pita tersebut menyentuh dinding? Berapakah tegangan maksimum bila pita tersebut dalam keadaan membengkok? Ambil  $E = 200 \text{ GPa}$ . *Jawab:* 200 MPa.



GAMBAR SOAL 11 - 1

11-2. Sebuah batang aluminium yang bulat berdiameter 6 mm dibengkokkan menjadi sebuah cincin melingkar yang diameter rata-ratanya 3 m. Berapakah tegangan maksimum dalam batang tersebut?  $E = 7 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ . *Jawab:* 140 MPa.

11-3. Berapakah jari-jari lengkungan sebuah balok W 200  $\times$  30 yang dibengkokkan sekitar sumbu X-X bila tegangan dalam serat-serat terjadi adalah 140 MPa?  $E = 200 \times 10^3 \text{ MPa}$ . *Jawab:* 145 m.

11-4. Bila persamaan kurva elastis untuk sebuah balok bertumpuan sederhana yang panjangnya  $L$  dan mempunyai  $EI$  yang tetap adalah  $v = (k/360EI)(-3x^5 + 10x^3L^2 - 7xL^4)$ , bagaimanakah balok tersebut dibebani?

11-5. Sebuah balok elastis dengan  $EI$  tetap dan panjang  $L$  mempunyai bentuk defleksi  $EI v(x) = M_0(x^3 - x^2L)/(4L)$ . (a) Tentukanlah syarat pembebanan dan tumpuan. (b) Plotlah diagram geser dan momen untuk balok tersebut dan sketsalah bentuk defleksi.

11-6. Kerjakanlah kembali Contoh 11-2 dengan mengambil titik asal sistem koordinat pada ujung yang bebas. *Jawab:*  $v = (M_1/2EI)(x^2 - 2Lx + L^2)$ .

\*11-7. Dengan menggunakan persamaan diferensial eksak, Persamaan 11-8, buktikanlah bahwa persamaan kurva elastis dalam Contoh 11-2 adalah  $x^2 + (v - \rho)^2 = \rho^2$ , di mana  $\rho$  adalah tetap. (*Petunjuk:* ambil  $dv/dx = \tan \theta$  dan integrasikan).

11-8. sampai 11-19. Untuk balok-balok yang dibebani seperti yang terlihat dalam gambar yang bersangkutan dengan soal masing-masing, tentukanlah persamaan kurva elastis dengan menggunakan persamaan diferensial orde kedua atau persamaan diferensial orde keempat seperti yang ditunjukkan. Dalam semua kasus,  $EI$  adalah tetap. *Jawab:* Lihat Tabel 11 dalam Lampiran untuk beberapa jawaban, dan

Soal. 11-10:

$$EIv = -W(x^5 - 5L^4x + 4L^5)/(60L^2)$$

Soal. 11-11:

$$EIv = kL^3x^2/6 - kL^2x^3/12 + kx^5/120$$

Soal. 11-12:

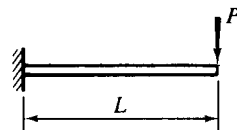
$$EIv = -k(L/\pi)^4 \sin \pi x/L$$

Soal. 11-13:

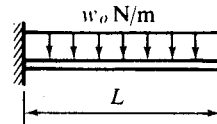
$$EIv = kL^3x^3/72 - kx^6/360 - kL^5x/90$$

Soal. 11-17:

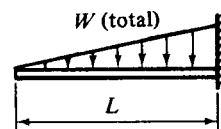
$$EIv = A[Lx^3/24 - x^5/(60L) - 5L^3x/192]$$



GAMBAR SOAL 11 - 8

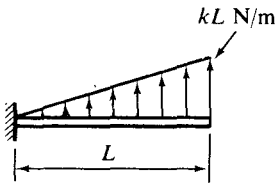


GAMBAR SOAL 11 - 9

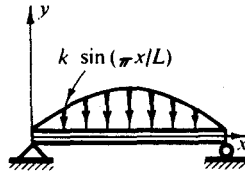


GAMBAR SOAL 11 - 10

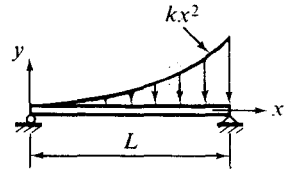




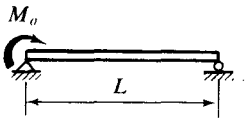
GAMBAR SOAL 11 – 11



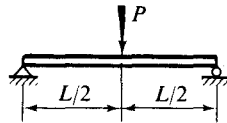
GAMBAR SOAL 11 – 12



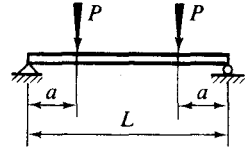
GAMBAR SOAL 11 – 13



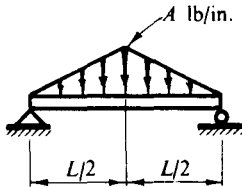
GAMBAR SOAL 11 – 14



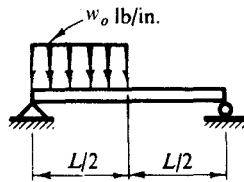
GAMBAR SOAL 11 – 15



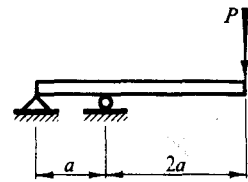
GAMBAR SOAL 11 – 16



GAMBAR SOAL 11 – 17



GAMBAR SOAL 11 – 18



GAMBAR SOAL 11 – 19

11-20. Bila sebuah kantilever dibebani seperti yang terlihat dalam Gambar Soal 11-8, sedang lebarnya serta kekuatannya adalah konstan, lihat Gambar 10-18(d), bagaimanakah persamaan kurva elastis dari kantilever tersebut? Abaikanlah pertambahan kedalaman pada ujung balok untuk gaya geser. *Jawab:*  $EI_0 v = 2 PL^2 x - \frac{4}{3} PL^{3/2} x^{3/2} - \frac{2}{3} PL^3$ , di mana  $I_0$  adalah momen inersia penampang balok pada ujung jepit.

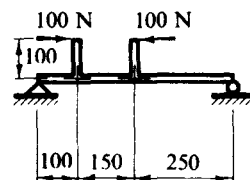
11-21. Bila dalam Soal 11-15, luas penampang balok adalah tetap, dan separoh sebelah kiri dari bentangan terbuat dari baja ( $E = 200 \times 10^3$  MPa) dan separoh sebelah kanan terbuat dari aluminium ( $E = 70 \times 10^3$  MPa), tentukanlah persamaan kurva elastis.

11-22. Kerjakanlah kembali Contoh 11-4 dengan menggunakan prosedur Contoh 11-5.

11-23. Tentukanlah persamaan kurva elastis untuk balok yang dibebani seperti yang terlihat dalam Gambar 11-9.

11-24. Hitunglah tegangan lentur maksimum dan defleksi maksimum untuk sebuah balok S 380 × 64 yang bertumpuan sederhana yang membentang sepanjang 6 m serta dibebani dengan gaya terpusat ke bawah sebesar 40 kN pada tengah-tengah bentangan dan beban gaya tarik bumi yang terdistribusi merata, termasuk berat balok tersebut sendiri, yang besarnya 15 kN per meter.  $E = 200$  GPa. Gunakanlah rumus-rumus yang diberikan dalam Lampiran dan metoda superposisi. *Jawab:* 131 MPa, -0,012.

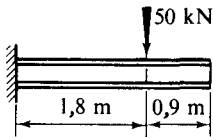
11-25. Dengan menggunakan prosedur semi-grafis seperti yang terlihat dalam Gambar 11-6



GAMBAR SOAL 11 – 25

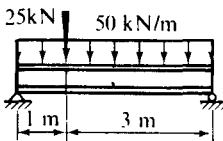
dan 11-8, tentukanlah defleksi balok pada tengah bentangan, lihat gambar. Ambil  $EI = 73 \text{ N}\cdot\text{m}^2$ . Abaikanlah pengaruh gaya aksial pada defleksi tersebut.

11-26. Sebuah kantilever W 250  $\times$  73 ( $I = 113,6 \times 10^6 \text{ mm}^4$ ) menumpu suatu gaya terpusat seperti yang terlihat dalam gambar. Hitunglah defleksi yang disebabkan oleh gaya terpakai, (a) pada gaya terpakai tersebut, (b) pada ujung bebas. Gunakanlah rumus-rumus yang diberikan dalam Lampiran.  $E = 200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$  (Petunjuk: kemiringan balok antara gaya terpakai dan ujung bebas adalah tetap). Jawab: 7,49 mm.



GAMBAR SOAL 11 – 26

11-27. Sebuah balok W 200  $\times$  60 dibebani seperti yang terlihat dalam gambar. Dengan menggunakan persamaan-persamaan yang diberikan dalam lampiran serta metoda superposisi, hitunglah defleksi pada tengah-tengah bentangan.  $E = 200 \text{ GPa}$ .

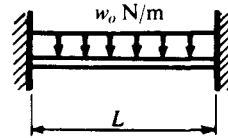


GAMBAR SOAL 11 – 27

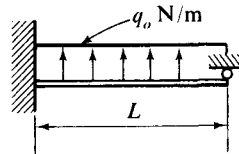
11-28. Defleksi maksimum untuk sebuah balok sederhana yang membentang 8 m dan membawa beban yang terdistribusi merata sebesar 500 kN (total) dibatasi sampai 15 mm. (a) Tentukanlah balok W yang dibutuhkan. (b) Tentukanlah tegangan serat maksimum. Ambil  $E = 200 \text{ GPa}$ .

11-29. sampai 11-31. Buatlah persamaan-persamaan kurva elastis untuk balok-balok statis tak tentu yang terlihat dalam masing-masing

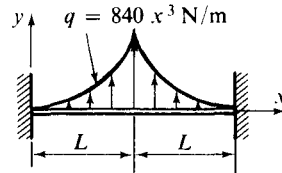
gambar yang bersangkutan. Semua balok mempunyai  $EI$  yang tetap.



GAMBAR SOAL 11 – 29



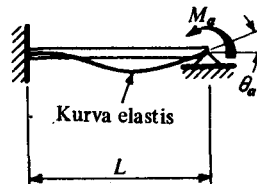
GAMBAR SOAL 11 – 30



GAMBAR SOAL 11 – 31

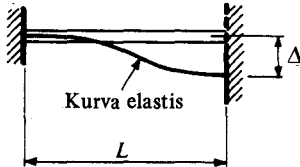
11-32. Kerjakan kembali Soal 11-30 bila beban terpakai adalah  $q = \sin x$ . Ambil  $L = \pi$ . Jawab:  $EIv = \sin x - x^3/(2\pi^2) + 3x^2/(2\pi) - x$ .

11-33. Untuk balok yang dibebani seperti yang terlihat dalam gambar, sesudah mendapatkan persamaan kurva elastis, (a) Tentukanlah perbandingan momen pada ujung yang terpasang terhadap momen terpakai  $M_a$ ; (b) Tentukanlah perputaran ujung bebas.  $EI$  adalah tetap. Jawab:  $-\frac{1}{2}$ ;  $-M_a L/(4EI)$ .



GAMBAR SOAL 11 – 33

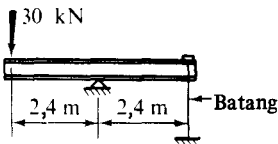
11-34. Satu ujung dari sebuah balok elastis disimpangkan sebesar  $\Delta$  terhadap ujung yang satunya lagi seperti yang terlihat dalam gambar. Tidak ada perputaran ujung-ujung balok yang terjadi. Turunkanlah ungkapan untuk kurva elastis dan plotlah diagram-diagram geser dan momen.  $EI$  adalah tetap.



GAMBAR SOAL 11 – 34

11-35. Sebuah kantilever S 75 × 11,2 panjangnya 1 m. Berapakah "tetapan pegas"-nya (spring constant) untuk suatu gaya yang bekerja ke bawah pada ujung?  $E = 200$  GPa.

11-36. Sebuah balok W 250 × 49 dibebani seperti yang terlihat dalam gambar. Sebuah batang baja bulat 24 mm yang panjangnya 2,4 m mempunyai tahanan pada ujung sebelah kanan. Tentukanlah defleksi ujung sebelah kiri yang disebabkan oleh gaya terpusat terpakai.  $E = 200$  GPa.

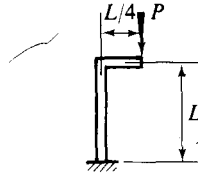


GAMBAR SOAL 11 – 36

11-37. Data-data untuk balok yang dibebani seperti yang terlihat dalam Gambar 11-14 adalah  $w_0 = 30$  kN/m,  $P = 25$  kN,  $L = 3$  m dan  $a = 1,2$  m. Bila balok tersebut terbuat dari irisan W 200 × 30 ( $I = 29 \times 10^6$  mm<sup>4</sup>), berapakah defleksi dari ujung bebas C yang disebabkan oleh beban terpakai?  $E = 200 \times 10^6$  kN/m<sup>2</sup>.

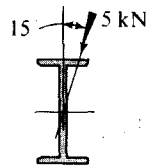
11-38. Sebuah kerangka kecil dibebani seperti yang terlihat dalam gambar. Luas penampang bagian-bagian vertikal dan horisontal dari kerangka adalah sama. Tentukanlah defleksi ver-

tikal dari ujung pada gaya terpakai. Abaikanlah pengaruh gaya aksial pada defleksi dan abaikan pula perpindahan kolom yang diakibatkan oleh gaya yang sama. Nyatakan hasil tersebut dalam bentuk-bentuk  $P$ ,  $L$ ,  $E$  dan  $I$  (Petunjuk: gabungkanlah jawaban hasil-hasil Contoh 11-2 dan rumus-rumus yang sesuai dari lampiran). Jawab:  $13 PL^3 / (192EI)$ .



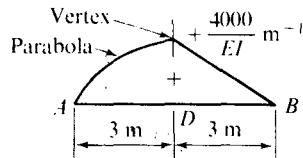
GAMBAR SOAL 11 – 38

11-39. Tentukanlah defleksi ujung sebuah kantilever S 200 × 27,4 yang mempunyai panjang 2 m akibat sebuah gaya serong dari 5 kN bekerja pada ujung tersebut seperti yang terlihat dalam gambar. Ambil  $E = 200$  GPa.



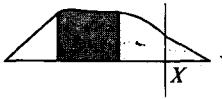
GAMBAR SOAL 11 – 39

11-40. Diagram  $M/EI$  untuk sebuah balok sederhana diperlihatkan dalam gambar. Gambarkanlah kurva elastis secara kualitatif dan hitunglah  $t_{AB}$  dan  $\Delta\theta_{AB}$ .



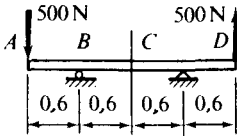
GAMBAR SOAL 11 – 40

11-41. Bila sebuah diagram  $M/EI$  yang positif untuk sebuah balok sederhana seperti yang terlihat dalam gambar, berapakah momen statis daerah gelap terhadap suatu garis yang melalui X? Gambarkanlah dalam sebuah skets.



GAMBAR SOAL 11 – 41

11-42. Sebuah batang aluminium lebar 40 mm dan kedalaman 30 mm mendapat tumpuan dan beban seperti yang terlihat dalam gambar. Hitunglah sudut (dalam radian) antara garis singgung pada kurva elastis pada titik A dan garis-garis singgung yang serupa pada B, C dan D yang disebabkan oleh beban-beban terpakai. Ambil  $E = 7 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ . Semua ukuran yang diperlihatkan dalam gambar adalah dalam meter.

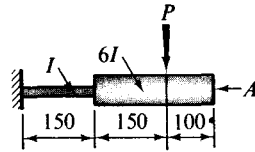


GAMBAR SOAL 11 – 42

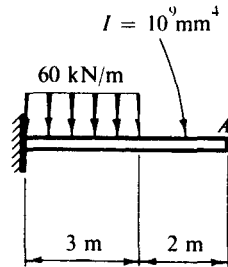
11-43. Bila suatu tambahan gaya ke bawah dari 10 kN diberikan kepada D pada balok dari Contoh 11-9, berapakah defleksi dari ujung B?

11-44. Dengan menggunakan metoda luas momen, hitunglah defleksi maksimum untuk balok dari Soal 11-10.

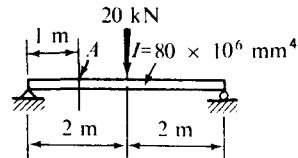
11-45. sampai 11-59. Dengan menggunakan metoda luas-momen untuk batang-batang yang dibebani seperti yang terlihat dalam masing-masing gambar yang bersangkutan, tentukanlah defleksi dan kemiringan kurva elastis pada titik-titik A. Jelaskan pula apakah defleksi tersebut ke atas atau ke bawah. Bila ukuran dari batang-batang tersebut tidak diberikan, anggaplah bahwa  $EI$  adalah konstan diseluruh panjangnya. Abaikanlah berat dari masing-masing batang tersebut. Bila diperlukan anggaplah  $E = 200.000 \text{ MPa}$ . Bilamana jawaban dinyatakan dalam bentuk  $EI$ , penyesuaian terhadap satuan-satuan tidak perlu dibuat. Jawab: Defleksi yang dicari tertulis di sudut kanan bawah dari gambar yang bersangkutan.



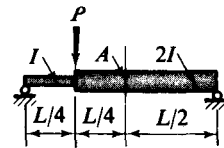
GAMBAR SOAL 11 – 45



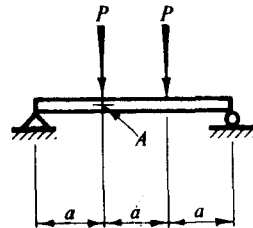
GAMBAR SOAL 11 – 46 (5,74)



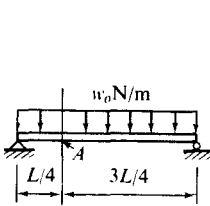
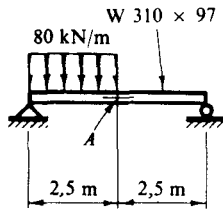
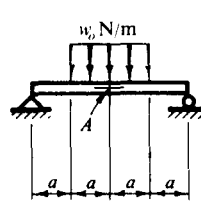
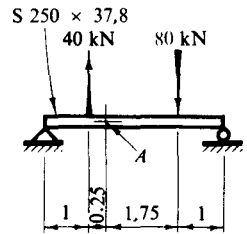
GAMBAR SOAL 11 – 47



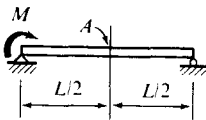
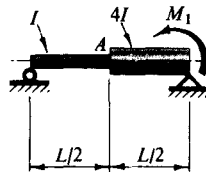
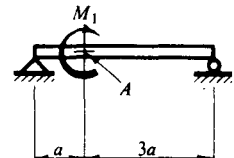
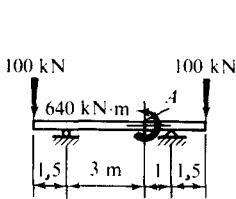
GAMBAR SOAL 11 – 48  $\left( \frac{25PL^3}{3072EI} \right)$



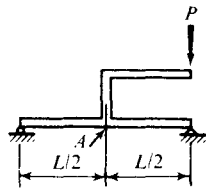
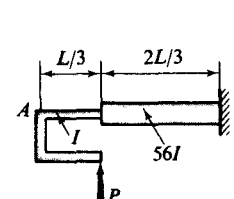
GAMBAR SOAL 11 – 49  $\left( \frac{5Pa^3}{6EI} \right)$

GAMBAR  
SOAL 11 - 50GAMBAR  
SOAL 11 - 51GAMBAR  
SOAL 11 - 52  $\left(\frac{57w_0a^4}{24EI}\right)$ 

GAMBAR SOAL 11 - 53

GAMBAR  
SOAL 11 - 54  $\left(\frac{M_0L^2}{16EI}\right)$ GAMBAR  
SOAL 11 - 55  $\left(\frac{M_1L^2}{32EI}\right)$ GAMBAR  
SOAL 11 - 56  $\left(\frac{M_1a^2}{2EI}\right)$ 

GAMBAR SOAL 11 - 57

GAMBAR  
SOAL 11 - 58  $\left(\frac{PL^3}{48EI}\right)$ GAMBAR  
SOAL 11 - 59  $\left(\frac{PL^3}{324EI}\right)$ 

11-60. Dengan menggunakan metoda luas-momen, buatlah persamaan kurva elastis untuk balok dari Soal 11-8.

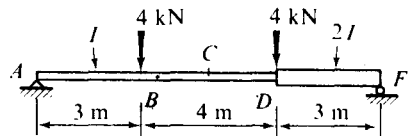
11-61. Dengan menggunakan metoda luas-momen, buatlah persamaan kurva elastis untuk balok dari Soal 11-15.

\*11-62. Dengan menggunakan metoda luas-momen, buatlah persamaan kurva elastis untuk balok dari Soal 11-50.

11-63. Dengan menggunakan metoda luas-momen, tentukanlah defleksi maksimum untuk balok dari Soal 11-54.

11-64. Sebuah balok dengan  $I$  yang berubah-ubah dibebani seperti yang terlihat dalam gambar. (a) Tentukanlah defleksi pada tengah-

tengah bentangan yang disebabkan oleh dua gaya terpusat. (b) Tentukanlah letak titik di mana terjadi defleksi maksimum. (Besar defleksi ini tidak perlu dicari). Anggaplah bahwa  $E$  dan  $I$  diketahui dan mempunyai satuan yang sesuai. Jawab: (a)  $123/EI$ , (b) 1,85 m dari B.

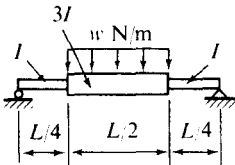


GAMBAR SOAL 11 - 64

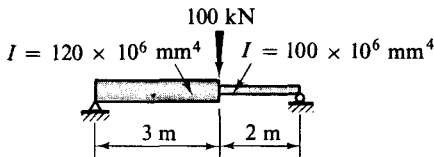
11-65. Tentukanlah defleksi maksimum dari balok dalam Soal 11-49.

11-66. Tentukanlah defleksi maksimum dari balok dalam Soal 11-52.

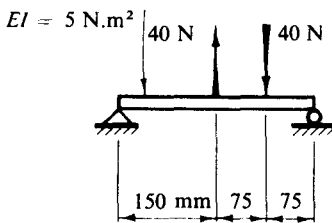
11-67. sampai 11-72. Dengan menggunakan metoda luas-momen untuk anggota-anggota struktur yang dibebani seperti yang terlihat dalam masing-masing gambar yang bersangkutan, tentukanlah letak dan besar defleksi maksimum *antara* tumpuan-tumpuan. Abaikanlah pengaruh gaya-gaya aksial terhadap defleksi apabila keadaan ini terjadi. Keadaan-keadaan lain sama dengan yang dalam Soal-soal 11-45 sampai 11-59. *Jawab:* Pojok sebelah kanan bawah masing-masing gambar.



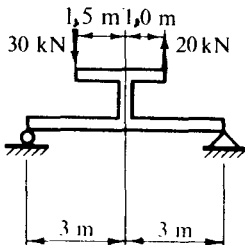
GAMBAR SOAL 11 - 67  $\left( \frac{73wL^4}{18,432EI} \right)$



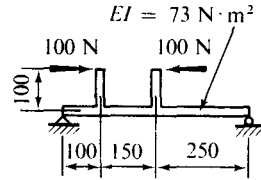
GAMBAR SOAL 11 - 68



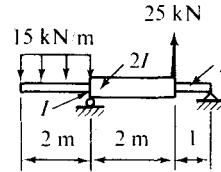
GAMBAR SOAL 11 - 69



GAMBAR SOAL 11 - 70



GAMBAR SOAL 11 - 71 (2 mm)

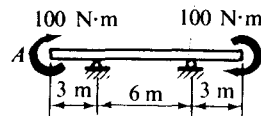


GAMBAR SOAL 11 - 72

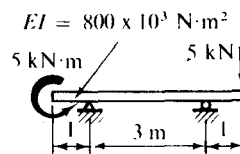
11-73. Untuk balok dari Soal 11-69, tentukanlah (a) defleksi pada tengah-tengah bentangan dan (b) defleksi pada titik pembengkokan (infleksi).

11-74. Kerjakanlah kembali Contoh 11-13 dengan menggunakan prosedur yang diperlihatkan dalam Gambar 11-26(e).

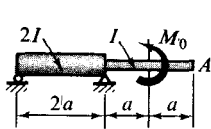
11-75. sampai 11-80. Dengan menggunakan metoda luas-momen, tentukanlah defleksi dan kemiringan kurva elastis dari ujung tergantung (overhang) pada titik A untuk balok-balok yang dibebani seperti yang diperlihatkan dalam masing-masing gambar yang bersangkutan. Keadaan-keadaan lain adalah sama dengan Soal-soal 11-67 sampai 11-72. *Jawab:* Defleksi tertulis pada sudut kanan bawah masing-masing gambar.



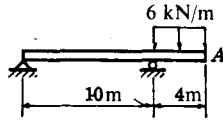
GAMBAR SOAL 11 - 75  $\left( \frac{750}{EI} \right)$



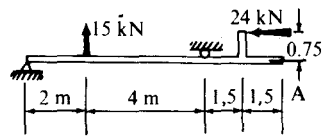
GAMBAR SOAL 11 - 76



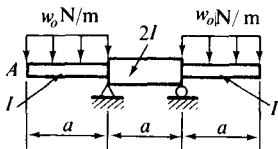
GAMBAR  
SOAL 11 - 77  $\left( \frac{13M_0 a^2}{6EI} \right)$



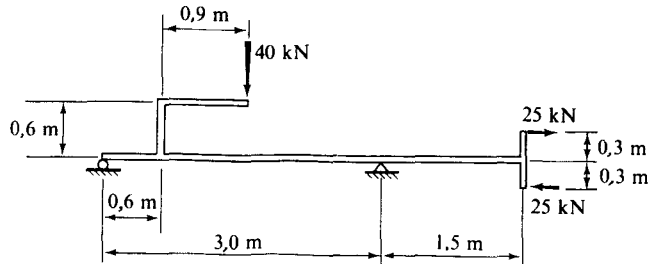
GAMBAR  
SOAL 11 - 78  $\left( \frac{832}{EI} \right)$



GAMBAR SOAL 11 - 79



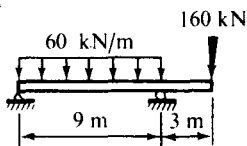
GAMBAR  
SOAL 11 - 80  $\left( \frac{w_0 a^4}{4EI} \right)$



GAMBAR SOAL 11 - 81

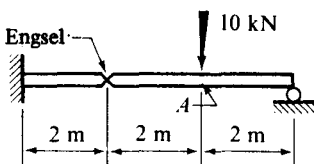
11-81. Tentukanlah letak dan besar defleksi maksimum *ke atas* dari balok yang terlihat dalam gambar. Nyatakanlah hasil-hasil dalam bentuk  $EI$ . *Jawab:* 0,824 m; 5,09/(EI).

11-82. Tentukanlah defleksi *ke atas* maksimum untuk bagian balok yang tergantung (overhang) yang dibebani seperti yang terlihat dalam gambar.  $E$  dan  $I$  adalah tetap.



GAMBAR SOAL 11 - 82

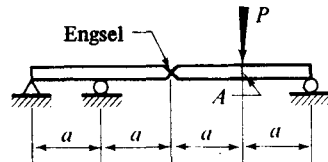
11-83. Sebuah struktur dibentuk dengan menyambungkan sebuah balok sederhana dengan sebuah balok kantilever melalui sebuah engsel



GAMBAR SOAL 11 - 83

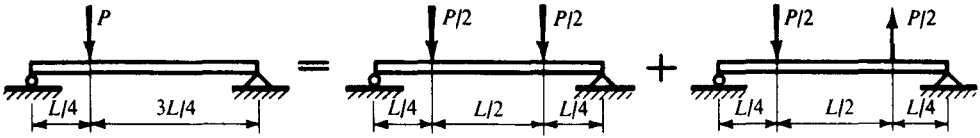
seperti yang terlihat dalam gambar. Bila sebuah gaya 10 kN diberikan pada tengah-tengah bentangan sederhana, tentukanlah defleksi yang disebabkan oleh gaya ini pada titik A. Gunakanlah metoda luas momen.  $EI$  adalah konstan disepanjang struktur.

11-84. Dua buah balok, keduanya dengan kekakuan lentur  $EI$  yang sama dan konstan, dihubungkan melalui sebuah engsel seperti yang terlihat dalam gambar. Tentukanlah defleksi pada A yang disebabkan oleh gaya terpakai  $P$ . Gunakanlah metoda luas-momen. *Jawab:*  $Pa^3/(3EI)$ .



GAMBAR SOAL 11 - 84

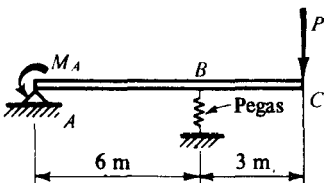
11-85. Tentukanlah defleksi ditengah-tengah bentangan sebuah balok sederhana, yang dibebani seperti yang terlihat dalam gambar, dengan menyelesaikan dua soal secara terpisah seperti yang ditunjukkan, kemudian hasil-hasilnya disuperposisikan. Gunakanlah metoda luas momen.  $EI$  adalah konstan. *Jawab:*  $11 PL^3/(768EI)$ .



GAMBAR SOAL 11 – 85

11-86. Tinjaulah struktur yang dibebani dengan gaya  $P$  seperti yang terlihat pada Gambar 11-13(a). Berapakah beban yang terdistribusi merata  $w_0$  yang harus diberikan kepada balok mendatar  $AB$  hingga penyimpangan mendatar titik  $C$  akan mengembalikannya kepada keadaan tanpa beban?

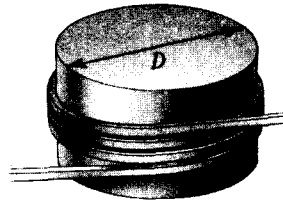
11-87. Sebuah balok baja mendapat tumpuan dan dibebani seperti yang terlihat dalam gambar. Gaya  $P = 50$  kN dan  $M_A = 150$  kN.m dengan garis mendatar  $AC$  sebagai referensi, tentukanlah kemiringan dan defleksi vertikal pada ujung  $C$ . Untuk balok ini  $E = 200$  GPa dan  $I = 400 \times 10^6$  mm<sup>4</sup>. Pegas pada  $B$ , bila terpisah sendiri, memerlukan gaya dari 80 kN untuk memperpendek dirinya sebesar 25 mm. Gunakanlah metoda apa pun yang anda sukai untuk menghitung kemiringan dan defleksi yang diinginkan.



GAMBAR SOAL 11 – 87

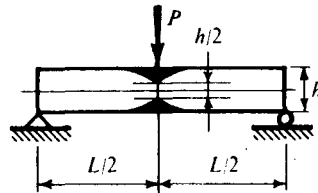
11-88. Sebuah batang bujursangkar 24 mm yang terbuat dari bahan elastis-plastis linier dililitkan mengelilingi sebuah mandril bundar seperti yang terlihat dalam gambar. (a) Berapakah diameter mandril  $D$  yang diperlukan supaya sepertiga penampang sebelah luar menjadi plastis, yaitu inti elastis mempunyai kedalaman 8 mm dan lebar 24 mm? Anggaplah bahan tersebut pada mulanya bebas tegangan dengan  $\sigma_{yp} = 250$  MPa. Ambillah  $E = 200$  GPa. Sudut miring antar lilitan sangat kecil hingga batang yang dilenturkan dapat dianggap terletak dalam satu bidang. (b) Berapakah diameter lilitan ter-

sebut setelah gaya yang digunakan untuk membentuknya dilepaskan? Dinyatakan secara lain, tentukanlah diameter lilitan setelah pegas elastis kembali.



GAMBAR SOAL 11 – 88

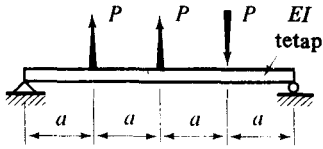
11-89. Sebuah balok sederhana sikuempat, tidak berberat, terbuat dari bahan elastis-plastis linier, dibebani ditengah-tengah dengan gaya  $P$  seperti yang terlihat dalam gambar. (a) Tentukanlah besar gaya  $P$  yang akan mengakibatkan zona plastis merembes  $\frac{1}{4}$  kedalam balok dari setiap sisi. (b) Untuk keadaan pembebanan di atas sketsa diagram kurva-momen dengan jelas memperlihatkannya untuk zona plastis.



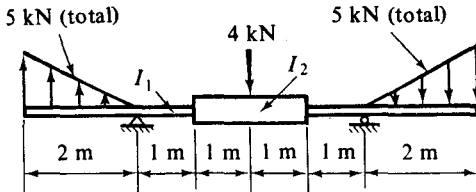
GAMBAR SOAL 11 – 89

11-90. dan 11-91. Dengan menggunakan metoda luas-momen, tentukanlah defleksi pada tengah-tengah bentangan untuk balok-balok yang dibebani seperti yang terlihat dalam gambar-gambar yang bersangkutan. Dalam Soal 11-91,  $I_1 = 10 \times 10^6$  mm<sup>4</sup>,  $I_2 = 20 \times 10^6$  mm<sup>4</sup>,  $E = 10 \times 10^7$  kN/m<sup>2</sup>. Jawab: Soal 11-90:  $4Pa^3/(3ET)$ .



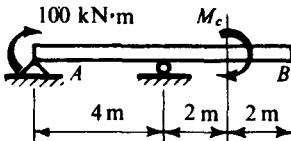


GAMBAR SOAL 11 – 90



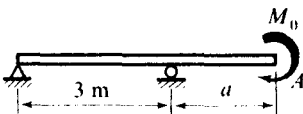
GAMBAR SOAL 11 – 91

11-92. Balok  $AB$  dikenakan pada suatu momen ujung di  $A$  dan suatu momen terpusat yang tidak diketahui  $M_C$  seperti yang terlihat dalam gambar. Dengan menggunakan metoda luas-momen, tentukanlah besar momen lentur  $M_C$  agar defleksi pada titik  $B$  akan sama dengan nol.  $EI$  adalah konstan. Jawab:  $23,5 \text{ kN}\cdot\text{m}$ .



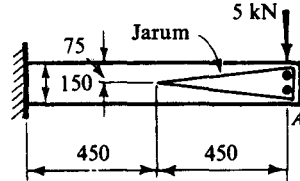
GAMBAR SOAL 11 – 92

11-93. Balok yang terlihat dalam gambar mempunyai  $EI$  konstan  $= 10 \times 10^6 \text{ N}\cdot\text{m}^2$ . Tentukanlah jarak  $a$  sehingga defleksi pada  $A$  akan menjadi 6 mm bila ujung mendapat momen terpusat  $M_0 = 20 \text{ kN}\cdot\text{m}$ .



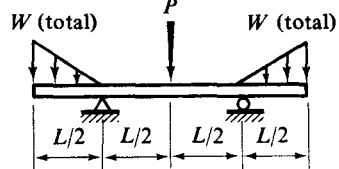
GAMBAR SOAL 11 – 93

11-94. Sebuah jarum penunjuk yang ringan hanya dipasang pada titik  $A$  kepada sebuah balok kayu  $150 \text{ mm} \times 150 \text{ mm}$  seperti yang terlihat dalam gambar. Tentukanlah kedudukan ujung jarum tersebut setelah suatu gaya terpusat dari 5 kN diberikan. Ambil  $E = 8 \text{ GPa}$ .



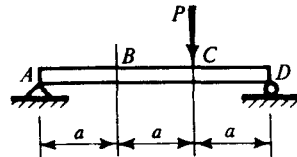
GAMBAR SOAL 11 – 94

11-95. Berapakah senarusnya perbandingan antara beban-beban  $W$  dan  $P$  untuk balok yang diperlihatkan dalam gambar agar kurva elastis akan mendatar pada titik-titik tumpuan?  $EI$  adalah konstan. Jawab:  $\frac{3}{8}$ .



GAMBAR SOAL 11 – 95

11-96. Balok  $ABCD$  semula adalah mendatar. Suatu beban  $P$  kemudian diberikan pada  $C$  seperti yang terlihat dalam gambar. Diinginkan untuk memberikan suatu gaya vertikal pada  $B$  untuk membawa kedudukan balok di  $B$  kembali ke tingkat semula  $ABCD$ . Berapakah gaya yang diperlukan pada  $B$ ? Jawab:  $7P/8$ .



GAMBAR SOAL 11 – 96



# 12 Masalah Statis Tak tentu

## 12-1 PENDAHULUAN

Persoalan-persoalan yang paling sederhana dalam mekanika bahan adalah statis tertentu luar. Dalam kasus seperti ini resultante gaya-gaya reaksi dan sistem tegangan dalam pada sebuah irisan dapat ditentukan dengan statika tanpa memperhatikan deformasi. Dalam bab yang lalu, dengan hanya memperkenalkan persamaan diferensial untuk defleksi balok maka metoda analisis balok elastis statis tak tentu dapat kita lakukan. Dalam bab ini, prosedur untuk memecahkan persoalan-persoalan statis tak tentu akan diperluas termasuk keadaan-keadaan tambahan.

Dalam dua pasal berikut dari bab ini, akan dibahas prosedur-prosedur analisis sistem statis tak tentu, yang berlaku untuk kedua tanggapan bahan yang linier dan tak linier. Akan diperlihatkan bagaimana persamaan keseimbangan statika dapat dilengkapi dengan persamaan-persamaan tambahan berdasarkan pertimbangan geometri dari deformasi. Persamaan tambahan yang dibutuhkan akan dirumuskan dengan menggunakan syarat kesesuaian pergeseran. Dalam analisis sistem tak tentu yang tak elastis, prosedur-prosedur ini dapat menjadi sangat rumit.

Azas superposisi kemudian dapat dipergunakan untuk mendapatkan metoda-metoda umum, yang sangat efektif dalam memecahkan persoalan-persoalan tak tentu yang tinggi mencakup bahan-bahan elastis linier. Metoda-metoda ini biasanya dihubungkan dengan yang disebut *metoda gaya* (force method atau metoda fleksibilitas atau flexibility method)\* dan *metoda pergeseran* (displacement method atau metoda kekakuan atau stiffness method). Lebih lanjut, metoda analisis untuk balok tak tentu dikembangkan pula dengan menggunakan teknik luas-momen dalam hubungannya dengan metoda gaya. Beberapa perhatian akan diberikan kepada *persamaan tiga-momen* (three-

\* Disebut juga *metoda deformasi tetap* (consistent deformation method).

momen equation) yang merupakan rumus berulang (recurrence formula) yang bermanfaat untuk analisis balok elastis kontinu.

Suatu prosedur untuk menentukan kapasitas muat batas atau ultimat dari balok, baik yang tertentu maupun tak tentu, yang terbuat dari bahan-bahan ulet, akan kita bahas pada akhir bab ini.

## 12-2 PENDEKATAN UMUM

Dalam semua persoalan statis tak tentu persamaan-persamaan keseimbangan statika masih tetap berlaku. Persamaan-persamaan ini adalah penting, tetapi tidak cukup untuk memecahkan persoalan tak tentu. Persamaan-persamaan tambahan dibuat berdasarkan pertimbangan geometri dari deformasi. Dalam sistem struktur dari kebutuhan fisis, unsur-unsur atau bagian-bagian tertentu haruslah berdefleksi bersama, memelintir bersama, memuai bersama, dan seterusnya atau sama-sama tetap stasioner. Dengan merumuskan pengamatan-pengamatan demikian secara kuantitatif memberikan kita persamaan-persamaan tambahan yang diperlukan. Misalnya, suatu pernyataan pergeseran yang umum dari beberapa batang dari sebuah sambungan dapat memberikan hubungan yang diperlukan. Persamaan-persamaan kinematika ini tidaklah tergantung pada sifat-sifat mekanis bahan, jadi tidak terbatas pada tanggapan elastis linier.

Prosedur-prosedur penting untuk menentukan deformasi linier batang berbeban aksial, pemelintiran sudut dari poros, dan defleksi dari balok telah kita kembangkan lebih dahulu. Di sini prosedur-prosedur yang sama akan kita pergunakan lagi kecuali penentuan gaya-gaya yang bekerja pada batang tersebut sebagai yang tidak diketahui dengan beberapa lambang aljabar yang tepat. Seperti sebelumnya, kita selalu mengandaikan bahwa deformasi yang terjadi adalah kecil dibandingkan dengan ukuran-ukuran linier dari benda.

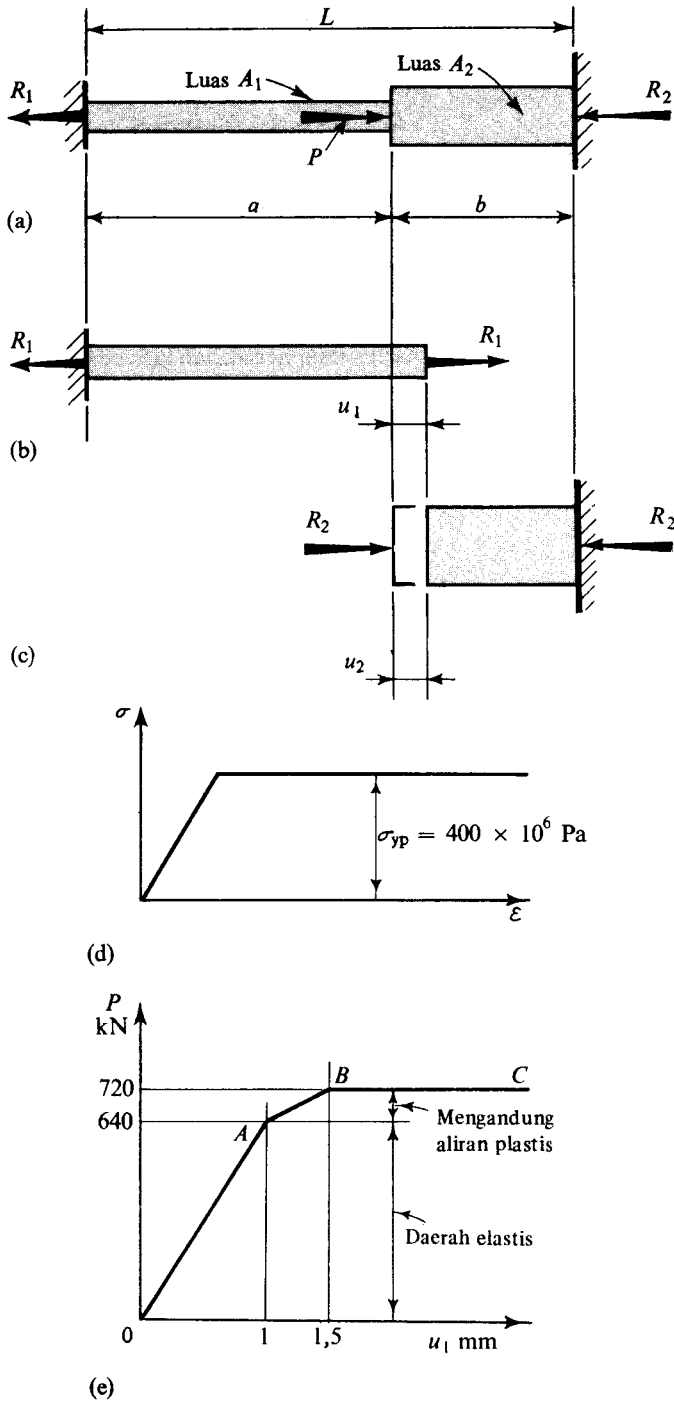
Beberapa contoh yang melukiskan metoda penambahan persamaan keseimbangan dengan hubungan pergeseran dapat dilihat dalam contoh berikut.

### CONTOH 12-1

Sebuah batang bertangga terpasang tetap ke dalam tumpuan-tumpuan yang tidak bergerak, Gambar 12-1(a). Bagian kiri batang mempunyai luas penampang  $A_1$ ; luas penampang yang bagian kanan adalah  $A_2$ . (a) Bila bahan batang tersebut elastis dengan modulus elastis  $E$ , berapakah reaksi-reaksi  $R_1$  dan  $R_2$  yang disebabkan oleh gaya aksial  $P$  yang bekerja pada titik diskontinuitas penampang? (b) Bila  $A_1 = 6 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ ,  $A_2 = 12 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ ,  $a = 0,75 \text{ m}$ ,  $b = 0,50 \text{ m}$ , dan bahan tersebut adalah elastis linier-plastis sempurna seperti yang terlihat dalam Gambar 12-1(d), tentukanlah pergeseran (displacement)  $u_1$  dari tangga sebagai fungsi gaya terpakai  $P$ . Ambil  $E = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$ .

### PENYELESAIAN

Kasus (a). Titik pada batang di mana gaya  $P$  bekerja membuat defleksi yang sama besar baik yang ditinjau adalah bagian kiri atau pun bagian kanan dari batang. Dengan memisahkan batang tersebut di  $P$ , kita memperoleh dua diagram benda bebas masing-masing dalam Gambar 12-1(b) dan (c). Bagian kiri dari batang dikenakan seluruh panjangnya kepada gaya tarik  $R_1$  dan bertambah panjang sebesar  $u_1$ . Sedang bagian yang



Gambar 12-1

kanan menyusut (memendek) sebesar  $u_2$  akibat pengaruh gaya tekan  $R_2$ . Bagi keperluan fisis, harga-harga mutlak kedua defleksi adalah sama:

Dari statika:  $R_1 + R_2 = P$   
 Dari geometri:  $|u_1| = |u_2|$

Dengan menggunakan Persamaan 2-4,  $\Delta = u = PL/(AE)$ , maka hubungan di atas menghasilkan

$$\frac{R_1 a}{A_1 E} = \frac{R_2 b}{A_2 E}$$

Dengan menyelesaikan kedua persamaan secara bersamaan kita peroleh :

$$R_1 = \frac{P}{1 + aA_2/(bA_1)} \quad \text{dan} \quad R_2 = \frac{P}{1 + bA_1/(aA_2)} \quad (12-1)$$

Kasus (b). Dengan memasukkan langsung data-data yang diberikan ke dalam Persamaan 12-1,

$$R_1 = \frac{P}{1 + 0,75(12 \times 10^{-4})/[0,5(6 \times 10^{-4})]} = \frac{P}{4} \quad \text{dan} \quad R_2 = \frac{3P}{4}$$

Jadi tegangan-tegangan normal adalah

$$\sigma_1 = R_1/A_1 = 10^4 P/24$$

dan  $\sigma_2 = R_2/A_2 = 10^4 P/16$  (tekan)

Karena  $|\sigma_2| > \sigma_1$ , maka beban pada peluluhan mendatang diperoleh dengan membuat  $|\sigma_2| = 400 \times 10^6$  Pa. Pada beban ini bagian kanan dari batang baru mencapai luluh, dan regangan mencapai sebesar  $\epsilon_{yp} = \sigma_{yp}/E$ . Karena itu

$$P_{yp} = 16 \times 10^{-4} \sigma_{yp} = 640 \times 10^3 \text{ N} = 640 \text{ kN}$$

dan  $|u_2| = |u_1| = \epsilon_{yp} b = 0,001 \text{ m} = 1 \text{ mm}$

Besaran-besaran ini menentukan letak titik  $A$  dalam Gambar 12-1(e).

Dengan bertambahnya  $P$  di atas 640 kN, bagian kanan dari batang terus meluluhkan pemuatan gaya tekan  $R_2 = \sigma_{yp} A_2 = 480 \text{ kN}$ . Pada titik peluluhan mendatang untuk seluruh batang, maka bagian kiri barulah mencapai luluh. Ini terjadi bila  $R_1 = \sigma_{yp} A_1 = 240 \text{ kN}$ , sedang regangan dalam bagian kiri baru mencapai  $\epsilon_{yp} = \sigma_{yp}/E$ . Karena itu

$$P = R_1 + R_2 = 720 \text{ kN} \quad \text{dan} \quad u_1 = \epsilon_{yp} a = 0,0015 \text{ m} = 1,5 \text{ mm}$$

Besaran-besaran ini menentukan letak titik  $B$  dalam Gambar 12-1(e). Di luar titik ini aliran plastis tidak terkandung dan  $P = 720 \text{ kN}$  adalah beban ultimat atau beban batas dari batang itu.

\* Dengan memandang pemanjangan batang adalah positif dan pemendekan adalah negatif, maka kemungkinan lain adalah kita mempunyai  $u_1 + u_2 = 0$ , yang berarti bahwa deformasi batang dari ujung ke ujung adalah nol.

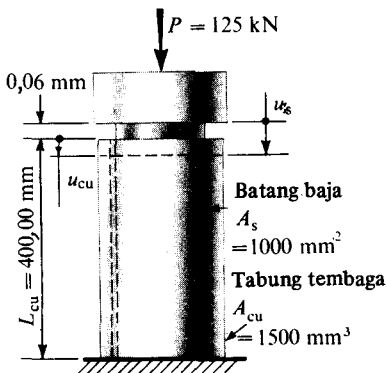
yp = yield point = titik luluh = titik leleh

Perhatikanlah kesederhanaan perhitungan beban batas ini, namun tidak memberikan keterangan mengenai karakteristik defleksi dari sistem tersebut. Pada umumnya, analisa batas plastis lebih mudah dari analisa elastis, sebaliknya lebih mudah dari penjejakan hubungan beban elastis-plastis dengan defleksi.

Soal-soal puntiran dapat pula berupa statis tak tentu. Umpamanya, bila sebuah poros dipasang tetap pada kedua ujungnya dan suatu momen puntir dikenakan pada beberapa titik antara maka kedua momen puntir pada ujung-ujung tidak dapat diperoleh dari statika saja. Tetapi, serupa dengan contoh di atas, dengan pemisahan poros tersebut pada momen puntir terpakai, dan menyamakan putaran sudut dari satu bagian dari poros dengan putaran sudut dari bagian yang satu lagi, maka suatu persamaan geometris pembantu dapat dirumuskan dan persoalan dapat diselesaikan.

#### CONTOH 12-2

Sebuah batang baja yang luas penampangnya  $1000 \text{ mm}^2$  dan panjangnya  $400,06 \text{ mm}$  dengan longgar dimasukkan ke dalam sebuah tabung tembaga seperti yang terlihat dalam Gambar 12-2. Tabung tembaga mempunyai luas penampang  $1500 \text{ mm}^2$  dan panjang  $400,00 \text{ mm}$ . Bila suatu gaya aksial  $P = 125 \text{ kN}$  diberikan pada tutup yang kaku, berapa tegangan-tegangan yang akan terbentuk dalam kedua bahan? Anggaplah bahwa modulus elastis baja dan tembaga masing-masing adalah  $E_s = 200 \text{ GPa}$  dan  $E_{cu} = 120 \text{ GPa}$ .



Gambar 12-2

#### PENYELESAIAN

Bila gaya  $P$  terpakai cukup besar untuk menutup celah yang kecil, gaya  $P_s$  akan terjadi dalam batang baja dan gaya  $P_{cu}$  dalam tabung tembaga. Lebih lanjut, terhadap pembebanan, batang baja akan tertekan secara aksial sebesar  $u_s$ , yang sama dengan deformasi aksial  $u_{cu}$  dari tabung tembaga ditambah celah mula-mula. Jadi

Dari statika: 
$$P_s + P_{cu} = 125 \text{ kN}$$

Dari geometri: 
$$u_s = u_{cu} + 0,06$$

Dengan menggunakan Persamaan 2-4,  $\Delta = u = PL/(AE)$ ,

$$\frac{P_s L_s}{A_s E_s} = \frac{P_{cu} L_{cu}}{A_{cu} E_{cu}} + 0,06$$

$$\text{atau} \quad \frac{400,06}{(1000)(200)10^3} P_s - \frac{400}{(1500)(120)10^3} P_{cu} = 0,06$$

$$\text{atau} \quad P_s - 1,111 P_{cu} = 30\,000 \text{ N}$$

Pemecahan persamaan-persamaan ini dengan serempak memberikan

$$P_{cu} = 45\,000 \text{ N} \quad \text{dan} \quad P_s = 80\,000 \text{ N}$$

dan dengan membagi gaya-gaya ini dengan luas penampang yang bersangkutan diperoleh

$$\sigma_{cu} = 45\,000/1500 = 30 \text{ MPa} \quad \text{dan} \quad \sigma_s = 80\,000/1000 = 80 \text{ MPa}$$

Bila salah satu tegangan ini berada di atas batas proporsional bahannya sendiri atau gaya terpakai terlalu kecil untuk menutup celah, maka jawab di atas tidak berlaku. Juga perhatikan bahwa deformasi yang kita tinjau kecil, maka cukup teliti bila kita menggunakan  $L_s = L_{cu}$ .

#### PENYELESAIAN CARA LAIN

Gaya  $F$  yang diperlukan untuk menutup celah dapat kita peroleh dahulu, dengan menggunakan Persamaan 2-4. Dalam melakukan gaya ini batang tersebut bekerja sebagai sebuah "pegas" dan melawan sebagian gaya terpakai. Gaya yang tinggal  $P'$  mengakibatkan defleksi yang sama  $u'_s$  dan  $u'_{cu}$  dalam kedua bahan.

$$F = \frac{u A_s E_s}{L_s} = \frac{(0,06)(1000)(200)10^3}{400,06} = 30\,000 \text{ N} = 30 \text{ kN}$$

$$P' = P - F = 125 - 30 = 95 \text{ kN}$$

Kemudian bila  $P'_s$  adalah gaya yang mendapat perlawanan dari batang baja, sebagai tambahan pada gaya  $F$ , dan  $P'_{cu}$  adalah gaya yang dibawa oleh tabung tembaga, maka

$$\text{Dari statika:} \quad P'_s + P'_{cu} = P' = 95$$

$$\text{Dari geometri:} \quad u'_s = u'_{cu} \quad \text{atau} \quad \frac{P'_s L'_s}{A_s E_s} = \frac{P'_{cu} L_{cu}}{A_{cu} E_{cu}}$$

$$\frac{400,06}{(1000)(200)10^3} P'_s = \frac{400}{(1500)(120)10^3} P'_{cu}, \quad P'_{cu} = \frac{9}{10} P'_s$$

Dengan memecahkan kedua persamaan masing-masing secara serempak, kita memperoleh bahwa  $P'_{cu} = 45 \text{ kN}$  dan  $P'_s = 50 \text{ kN}$ , atau  $P_s = P'_s + F = 80 \text{ kN}$ .

Bila  $(\sigma_{yp})_s = 275 \text{ MPa}$  dan  $(\sigma_{yp})_{cu} = 70 \text{ MPa}$ , maka beban batas untuk kumpulan ini dapat ditentukan sebagai berikut:

$$P_{ult} = (\sigma_{yp})_s A_s + (\sigma_{yp})_{cu} A_{cu} = 380 \text{ kN}$$

Pada beban ultimat kedua bahan menjadi luluh, karenanya perbedaan yang kecil dalam panjang awal bagian-bagian tersebut tidak berpengaruh apa-apa.



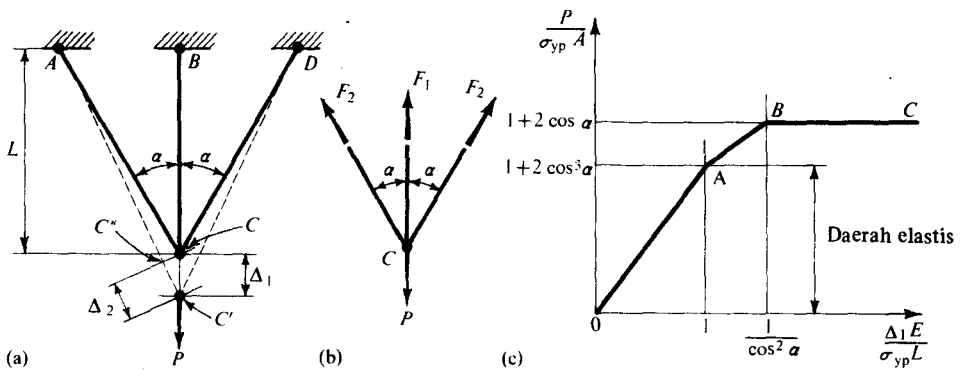
**CONTOH 12.3**

Tiga buah batang dari bahan elastis-plastis sempurna secara simetris disusun dalam sebuah bidang membentuk sistem seperti yang terlihat dalam Gambar 12-3(a). Selidikilah karakteristik beban-defleksi pada sambungan  $C$ . Luas penampang  $A$  dari masing-masing batang adalah sama.

**PENYELESAIAN**

Diagram benda bebas sambungan  $C$  diperlihatkan dalam Gambar 12-3(b), dari mana untuk deformasi kecil, persamaan keseimbangan yang didapat adalah

$$F_1 + 2F_2 \cos \alpha = P \quad (12-2)$$

**Gambar 12-3**

Hubungan ini dianggap benar tanpa memperhatikan tanggapan dari bahan yang terakhir, namun ia tergantung dari besar regangan yang dicapai.

Struktur yang berdeformasi dalam Gambar 12-3(a) diperlihatkan dengan garis putus  $AC'$ ,  $BC'$ , dan  $DC'$ . Perpanjangan batang  $BC'$  adalah  $\Delta_1$ . Perpanjangan batang-batang yang serong adalah  $\Delta_2$ . Untuk pergeseran yang serasi, maka

$$\Delta_2 = \Delta_1 \cos \alpha \quad (12-3)$$

di mana kita menganggap bahwa disebabkan oleh kecilnya deformasi yang sedang kita bicarakan, maka busur  $CC''$  dengan pusat pada  $A$  dapat digantikan oleh sebuah garis tegaklurus pada  $AC'$ .

Persamaan 12-3 berlaku untuk kedua daerah regangan elastis atau pun tak elastis asal saja deformasi kecil. Untuk daerah kenyal, dengan memperhatikan bahwa batang-batang yang miring panjangnya adalah  $L/\cos \alpha$ , serta menggunakan Persamaan 2-4 kita memperoleh

$$\frac{F_2(L/\cos \alpha)}{AE} = \frac{F_1 L}{AE} \cos \alpha, \quad \text{yaitu} \quad F_2 = F_1 \cos^2 \alpha \quad (12-4)$$

Pemecahan Persamaan-persamaan 12-2 dan 12-4 secara simultan menghasilkan

$$F_1 = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha} \quad \text{dan} \quad F_2 = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha} \cos^2 \alpha \quad (12-5)$$

Dari sini kita melihat bahwa gaya dan tegangan maksimum terdapat dalam batang yang vertikal. Pada peluluhan mendatang,  $F_1 = \sigma_{yp} A$  dan  $\Delta_1 = (\sigma_{yp}/E)L$ . Dengan  $F_1$  yang diketahui, gaya maksimum  $P$  yang dapat dipikul secara elastis menyusul Persamaan-persamaan 12-2 dan 12-4. Keadaan ini, dengan  $P = \sigma_{yp} A(1 + 2 \cos^3 \alpha)$ , sesuai dengan titik  $A$  dalam Gambar 12-3(c).

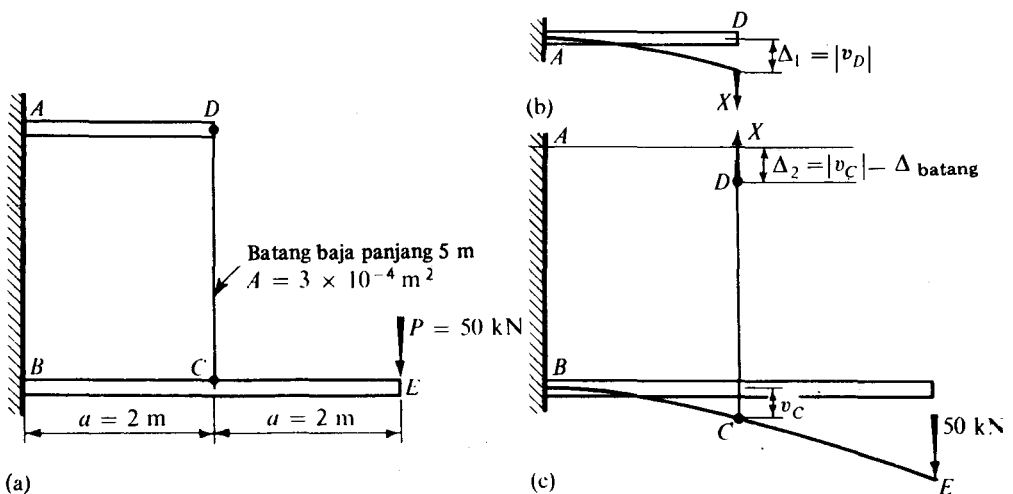
Bertambahnya gaya  $P$  di atas peluluhan mendatang dalam batang vertikal, gaya  $F_1 = \sigma_{yp} A$  tetap konstan, dan Persamaan 12-2 sendiri menjadi cukup untuk menentukan gaya  $F_2$ . Batang-batang yang miring bersifat elastis sampai tegangan-tegangannya mencapai  $\sigma_{yp}$ . Ini terjadi bila  $F_2 = \sigma_{yp} A$ . Pada peluluhan mendatang dalam batang miring, dengan menggunakan Persamaan 12-2,  $P = \sigma_{yp} A(1 + 2 \cos \alpha)$ . Keadaan ini sesuai dengan beban batas untuk sistem tersebut.

Pada peluluhan mendatang,  $\Delta_2 = (\sigma_{yp}/E)(L/\cos \alpha)$ . Jadi, dari Persamaan 12-3,  $\Delta_1 = (\sigma_{yp}/E)L/\cos^2 \alpha$ . Harga ini menentukan letak absis titik  $B$  dalam Gambar 12-3(c). Di luar titik ini terdapat aliran plastis kosong.

Kita perhatikan lagi kesederhanaan dalam mendapatkan beban batas sebagai satu tugas langsung dari sistem statis tak tentu.

#### CONTOH 12-4

Dua buah balok kantilever  $AD$  dan  $BE$  dengan kekakuan lentur yang sama  $EI = 24 \times 10^6 \text{ N}\cdot\text{m}^2$ , yang diperlihatkan dalam Gambar 12-4(a), saling dihubungkan dengan sebuah batang baja  $DC$  yang tegang ( $E_s = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$ ). Batang  $DC$  tersebut panjangnya 5 m dan mempunyai penampang  $3 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ . Tentukanlah defleksi kantilever  $AD$  di titik  $D$  yang disebabkan oleh gaya  $P = 50 \text{ kN}$  yang bekerja pada  $E$ .



Gambar 12-4

yp = yield point = titik luluh = titik leleh

## PENYELESAIAN

Dengan memisahkan struktur tersebut pada  $D$ , kita memperoleh kedua diagram benda bebas dalam Gambar-gambar 12-4(b) dan (c). Dalam kedua diagram tersebut gaya tidak diketahui yang sama  $X$  terlihat pula bekerja (suatu syarat statika). Defleksi titik  $D$  adalah sama, baik yang ditinjau tersebut adalah titik  $D$  pada balok  $AD$  maupun titik  $D$  pada bagian atas batang  $DC$ . Defleksi  $\Delta_1$  pada titik  $D$  dalam Gambar 12-4(b) disebabkan oleh  $X$ . Defleksi  $\Delta_2$  dari titik  $D$  pada batang adalah sama dengan defleksi  $v_C$  dari balok  $BE$  yang disebabkan oleh gaya-gaya  $P$  dan  $X$  yang lebih kecil dari regangan elastis batang  $DC$ .

Dari statika:  $X_{\text{mendorong } AD} = X_{\text{mendorong } DC} = X$

Dari geometri:  $\Delta_1 = \Delta_2$  atau  $|v_D| = |v_C| - \Delta_{\text{batang}}$

Defleksi balok dapat diperoleh dengan menggunakan salah satu metoda yang dibahas dalam bab yang lalu. Dari Tabel 11 dari Lampiran, dalam bentuk notasi soal ini, kita mempunyai

$$v_D = -\frac{Xa^3}{3EI} = -\frac{X \times 2^3}{3 \times 24 \times 10^6} = -\frac{10^{-6}X}{9} \quad (\text{ke bawah})$$

$$v_C \text{ akibat } X = +\frac{10^{-6}X}{9} \quad (\text{ke atas})$$

$$v_C \text{ akibat } P = -\frac{P}{6EI}[2(2a)^3 - 3(2a)^2a + a^3] = -\frac{10^{-3}(125)}{9} \quad (\text{ke bawah})$$

dan dengan menggunakan Persamaan 2-4

$$\Delta_{\text{batang}} = \frac{XL_{CD}}{A_{CD}E} = \frac{X(5)}{3(10^{-4})200(10^9)} = \frac{10^{-6}X}{12}$$

Kemudian

$$\frac{10^{-6}X}{9} = \frac{10^{-3}(125)}{9} - \frac{10^{-6}X}{9} - \frac{10^{-6}X}{12}$$

$$\text{dan} \quad X = +45\,500 \text{ N} = 45,5 \text{ kN}$$

$$\text{dan} \quad v_D = -\frac{10^{-6}(45\,500)}{9} = -0,005\,05 \text{ m} = -5,05 \text{ mm} \quad (\text{ke bawah})$$

Perhatikanlah bahwa defleksi titik  $C$  disebabkan oleh gaya terpakai  $P$  pada ujung kantilever seperti gaya tak diketahui  $X$ .

## 12-3 TEGANGAN KARENA SUHU

Kita mungkin saja mengabaikan deformasi yang disebabkan oleh suhu dalam sistem statis tertentu, karena dalam keadaan yang demikian batang akan leluasa untuk memuai atau menyusut. Tetapi dalam sistem statis tak tentu, pemuaian atau penyusutan sebuah benda dapat dihalangi atau dicegah sepenuhnya dalam arah-arrah tertentu. Ini dapat mengakibatkan tegangan-tegangan yang berarti yang harus kita selidiki.

Deformasi bebas yang disebabkan oleh perubahan suhu haruslah kita ketahui untuk penentuan tegangan yang disebabkan oleh suhu. Untuk suatu benda yang panjangnya  $L$  mempunyai regangan termis yang serbasama, deformasi linier  $\Delta$  yang disebabkan oleh perubahan suhu dari  $\delta T$  derajat adalah

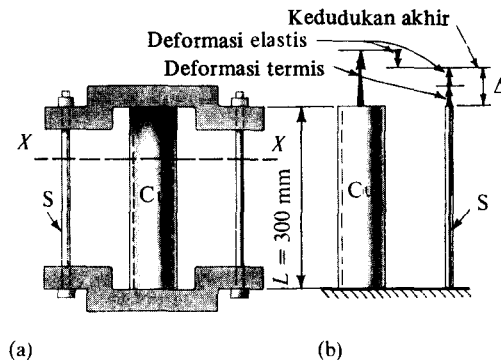
$$\Delta = \alpha(\delta T)L \quad (12-6)$$

di mana  $\alpha$  adalah koefisien pemuaian termis.

Pemecahan soal-soal tak tentu yang menyangkut deformasi suhu menyusul konsep-konsep yang telah dibahas dalam pasal yang baru lalu. Berikut ini menyusul dua buah contoh yang menggambarkan beberapa perincian penyelesaian.

#### CONTOH 12-5

Sebuah tabung tembaga yang panjangnya 300 mm dan mempunyai luas penampang 2000 mm<sup>2</sup> diletakkan antara dua buah tutup tegar yang terbuat dari Invar,\* Gambar 12-5(a). Empat baut baja berukuran 22 mm secara simetris disusun sejajar dengan sumbu tabung dan dengan enteng diertatkan. Hitunglah tegangan dalam tabung bila suhu susunan tersebut naik dari 15°C menjadi 70°C. Ambillah  $E_{cu} = 120$  GPa,  $E_s = 200$  GPa,  $\alpha_{cu} = 0,000016$  per °C dan  $\alpha_s = 0,000012$  per °C.



Gambar 12-5

#### PENYELESAIAN

Bila tabung tembaga dan baut-baut baja bebas memuai, maka perpanjangan termal aksial yang terlihat dalam Gambar 12-5(b) dapat terjadi. Tetapi karena deformasi aksial tabung haruslah sama dengan yang pada baut, maka tabung tembaga akan terdorong kembali sedang baut tertarik ke luar hingga deformasi seluruhnya menjadi sama. Selanjutnya, seperti dapat dilakukan dengan meninjau benda bebas dari susunan tersebut di atas bidang tertentu seperti  $X-X$  dalam Gambar 12-5(a), maka gaya tekan  $P_{cu}$  dalam tabung tembaga sama dengan gaya tarik  $P_s$  dalam baut baja. Jadi

\* Invar adalah paduan baja yang pada suhu biasa mempunyai  $\alpha \approx 0$  dan berdasarkan pertimbangan inilah ia digunakan dalam pita alat ukur dan pegas arloji yang bermutu tinggi.

Dari statika:  $P_{cu} = P_s = P$

Dari geometri:  $\Delta_{cu} = \Delta_s = \Delta$

Hubungan kinematika ini, berdasarkan Gambar 12-5(b) dengan bantuan Persamaan-persamaan 12-6 dan 2-4, menjadi

$$\alpha_{cu}(\delta T)L_{cu} - \frac{P_{cu}L_{cu}}{A_{cu}E_{cu}} = \alpha_s(\delta T)L_s + \frac{P_sL_s}{A_sE_s}$$

atau, karena  $\delta T = 55^\circ$  dan penampang setiap baut luasnya adalah  $380 \text{ mm}^2$ , maka

$$(0,000\ 016)(55) - \frac{P_{cu}}{2000(120)10^3} = (0,000\ 012)(55) + \frac{P_s}{4(380)200(10^3)}$$

Pemecahan kedua persamaan dengan simultan menghasilkan,  $P = 29.500 \text{ N}$ . Karena itu tegangan dalam tabung tembaga adalah  $\sigma_{cu} = (29.500)/(2000) = 14,8 \text{ MPa}$ .

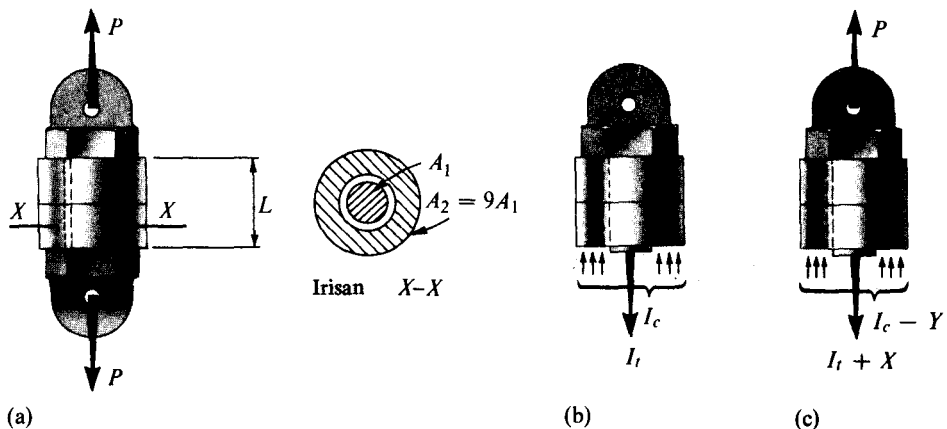
Ungkapan kinematika yang digunakan di atas dapat pula dibuat berdasarkan pernyataan berikut: Pemuai diferensial dua bahan yang disebabkan oleh perubahan suhu dapat ditampung oleh atau sama dengan deformasi elastis yang terjadi dalam kedua bahan.

#### CONTOH 12-6

Sebuah baut baja yang mempunyai luas penampang  $A_1 = 1000 \text{ mm}^2$  dipergunakan untuk menjepit dua buah cincin baja dengan tebal total  $L$ , masing-masing mempunyai luas penampang  $A_2 = 9000 \text{ mm}^2$ , Gambar 12-6(a). Bila baut tersebut dalam susunan ini semula dieratkan agar tegangannya menjadi  $150 \text{ MPa}$ , berapakah tegangan akhir dalam baut ini setelah suatu gaya  $P = 100 \text{ kN}$  dikenakan kepada susunan tersebut?

#### PENYELESAIAN

Sebuah benda bebas yang berhubungan dengan keadaan awal dari susunan tersebut ada dalam Gambar 12-6(b), di mana  $I_t$  adalah gaya tarik awal dalam baut dan  $I_c$  gaya tekan



Gambar 12-6

awal dalam cincin-cincin. Dari statika,  $I_t = I_c$ . Benda bebas dari susunan tersebut sesudah gaya  $P$  bekerja terlihat dalam Gambar 12-6(c), di mana  $X$  menyatakan kenaikan gaya tarik dalam baut, sedang  $Y$  merupakan pengurangan gaya tekan pada cincin yang disebabkan oleh  $P$ . Sebagai hasil gaya-gaya  $X$  dan  $Y$  ini, bila bagian-bagian yang berdekatan tersebut masih bersentuhan, baut memanjang dengan besar yang sama dengan cincin yang memuai dengan elastis. Jadi keadaan-keadaan akhir adalah sebagai berikut:

Dari statika: 
$$P + (I_c - Y) = (I_t + X)$$

atau karena 
$$I_c = I_t$$

$$X + Y = P$$

Dari geometri: 
$$\Delta_{\text{baut}} = \Delta_{\text{cincin}}$$

Dengan menggunakan Persamaan 2-4,

$$\frac{XL}{A_1 E} = \frac{YL}{A_2 E}, \quad \text{yaitu} \quad Y = \frac{A_2}{A_1} X$$

Pemecahan kedua persamaan bersama-sama, menghasilkan

$$X = \frac{P}{1 + (A_2/A_1)} = \frac{P}{1 + 9} = 0,1P = 10 \text{ kN}$$

Karena itu kenaikan tegangan dalam baut adalah  $X/A_1 = 10 \text{ MPa}$  dan tegangan dalam baut sesudah penggunaan gaya  $P$  menjadi  $160 \text{ MPa}$ . Hasil yang luar biasa ini menunjukkan bahwa kebanyakan gaya terpakai diambil untuk penurunan gaya tekan awal pada cincin yang tersusun karena  $Y = 0,9P$ .

Pemecahan tersebut tidak berlaku bila salah satu bahan berhenti bersifat elastis atau bila gaya terpakai adalah sedemikian rupa hingga gaya pra-tekan awal dari bagian-bagian yang tersusun tersebut dirusakkan.

Keadaan yang mendekati persoalan ideal di atas ditemui dalam banyak penggunaan praktis. Sebuah paku keling panas yang digunakan dalam pemasangan pelat, ketika didinginkan, membentuk di dalam dirinya sendiri tegangan tarik yang sangat besar. Baut-baut yang dipererat sepenuhnya, seperti pada kepala mesin mobil atau pada flens bejana tekan, mempunyai tegangan tarik awal yang tinggi; demikian pula dengan urat baja dalam balok beton pra-tegangan. Adalah menentukan sekali bahwa pada pemakaian beban kerja, hanya sedikit kenaikan yang terjadi dalam tegangan tarik awal.

## 12-4 ANALISA SISTEM TAK TENTU BERDASARKAN SUPERPOSISI

Sistem struktur yang hanya mengalami deformasi kecil dan terdiri dari bahan-bahan elastis linier merupakan sistem struktur linier. Azas superposisi berlaku untuk struktur seperti ini dan membentuk dasar untuk dua metoda yang sangat efektif untuk penelaahan sistem tak tentu.

Hal yang pertama dari metoda-metoda ini, sistem statis tak tentu diperkecil mula-mula menjadi satu yang tertentu dengan mengeluarkan reaksi-reaksi yang berlebihan (yang tak berguna) untuk menjaga keseimbangan statik. Kemudian reaksi-reaksi ini ditinjau sebagai beban terpakai luar yang besarnya disesuaikan hingga memenuhi syarat

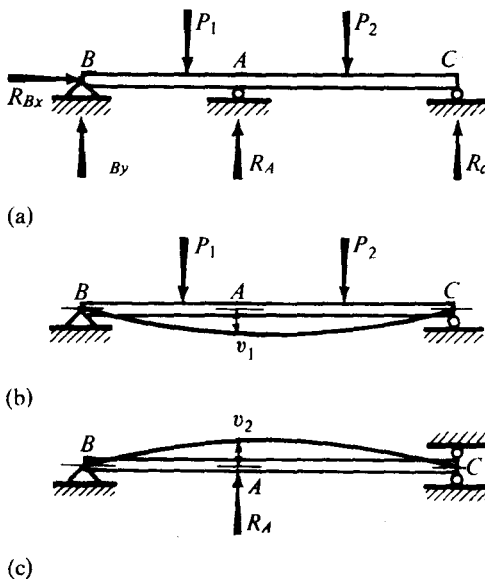
deformasi yang ditetapkan pada titik tangkapnya. Apabila reaksi kelebihan (redundant reaction) ditentukan, maka sistem berubah menjadi statis tertentu. Dengan demikian karakteristik kekuatan atau kekakuan dari sistem ini dapat dianalisis dengan metoda-metoda yang sudah diperkenalkan sebelum ini. Metoda yang luas penggunaannya ini biasanya dikenal sebagai *metoda gaya* (atau metoda fleksibilitas).

Pada metoda kedua, dikenal sebagai *metoda pergeseran* (*displacement method*) (atau metoda kekakuan), maka pergeseran sambungan sebuah struktur diperlakukan sebagai yang tidak diketahui. Sistem mula-mula diperkecil menjadi serangkaian batang yang *sambungannya* dihayalkan dapat dikendalikan secara sempurna dari sembarang gerakan. Sambungan tersebut kemudian dilepaskan sampai cukup untuk memenuhi keadaan keseimbangan gaya pada tiap sambungan. Metoda ini cocok sekali untuk diolah dengan komputer, hingga lebih luas lagi pemakaiannya dalam praktek dibandingkan dengan metoda gaya. Terutama untuk analisis struktur berskala besar.

Di samping beberapa metoda klasik yang terus dipergunakan dengan kegunaan yang terbatas, maka metoda-metoda gaya dan pergeseran merupakan dua pendekatan modern terhadap pemecahan sistem struktur tak tentu. Metoda-metoda ini dapat pula dirumuskan dalam batasan yang lebih umum dengan menggunakan azas-azas energi dalam mekanika struktur. Dan berlaku pula untuk persoalan-persoalan linier dan bukan linier.

### \*12-5 METODA GAYA (FORCE METHOD)

Langkah pertama dalam penelaahan sistem struktur dengan menggunakan metoda gaya adalah menentukan derajat ketakentuan statis yang sama dengan jumlah reaksi kelebihan seperti telah dibahas dalam Pasal 11-7. Reaksi lebih untuk sementara di-



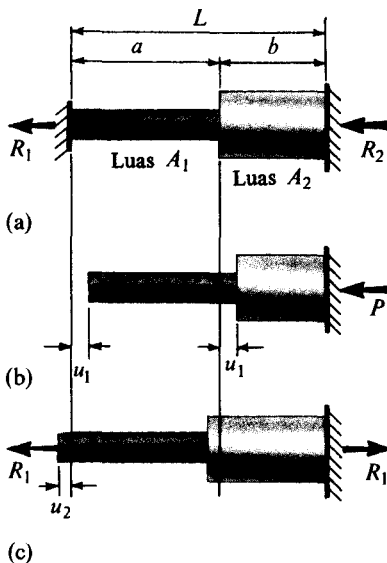
Gambar 12-7 Gambaran teknik superposisi untuk metoda gaya

keluarkan untuk mendapatkan struktur statis tak tentu yang dihubungkan sebagai struktur *lepas* atau *primer*. Kemudian karena struktur ini secara buatan dipermudah menjadi statis tertentu, kita mungkin mendapatkan suatu defleksi yang dikehendaki dengan metoda-metoda yang dibahas sebelumnya. Misalnya dengan mengeluarkan reaksi lebih\* di  $A$  dari balok tak tentu yang terlihat dalam Gambar 12-7(a), maka kita memperoleh defleksi  $v_1$  di  $A$ , Gambar 12-7(b) dapat dibuat. Dengan menggunakan kembali reaksi lebih yang telah dipindahkan  $R_A$  kepada balok tertentu yang sama, Gambar 12-7(c), maka dapat pula ditentukan defleksi  $v_2$  sebagai fungsi dari  $R_A$ . Lalu menjumlahkan kedua defleksi, karena  $v_1 + v_2 = 0$ , maka kita peroleh jawaban untuk  $R_A$ . Efek superposisi ini adalah bahwa di bawah pengaruh gaya terpakai dan reaksi lebih, titik  $A$  sesungguhnya tidak bergerak.

Prosedur ini sering disebut sebagai *metoda gaya*, karena pada pendekatan ini gaya-gaya lebih diperlakukan sebagai yang tidak diketahui. Perhatikanlah terutama bahwa sesudah reaksi-reaksi lebih ditentukan, persoalan menjadi statis tertentu, hingga analisis tegangan dan deformasi selanjutnya dapat dilakukan dengan cara yang biasa.

#### CONTOH 12-7

Kerjakanlah kembali Contoh 12-1 dengan menggunakan metoda gaya, Gambar 12-8(a).



Gambar 12-8

#### PENYELESAIAN

Andaikan batang tersebut terpotong pada tumpuan sebelah kiri. Kemudian, dalam anggota tertentu ini ujung yang terpotong berdefleksi sebesar  $u_1$  disebabkan gaya terpakai  $P$ , Gambar 12-8(b). Penggunaan kembali gaya yang tidak diketahui  $R_1$ , Gambar 12-8(c), mengakibatkan defleksi  $u_2$ . Dengan mensuperposisikan defleksi-defleksi ini

\* Dalam analisa balok, momen lentur pada tumpuan sering diperlakukan sebagai berlebihan. Dalam hal demikian, perputaran garis singgung pada tumpuan yang ditinjau dari pada defleksi.



sehingga tidak ada pergerakan dari ujung kiri batang, seperti syarat-syarat yang diminta dalam soal, maka diperoleh

$$u_1 + u_2 = 0$$

Kemudian dengan menggunakan Persamaan 2-4,  $\Delta = u = PL/(AE)$  dan dengan mengambil defleksi ke kanan sebagai positif, maka

$$\frac{Pb}{A_2E} - \left( \frac{R_1a}{A_1E} + \frac{R_1b}{A_2E} \right) = 0$$

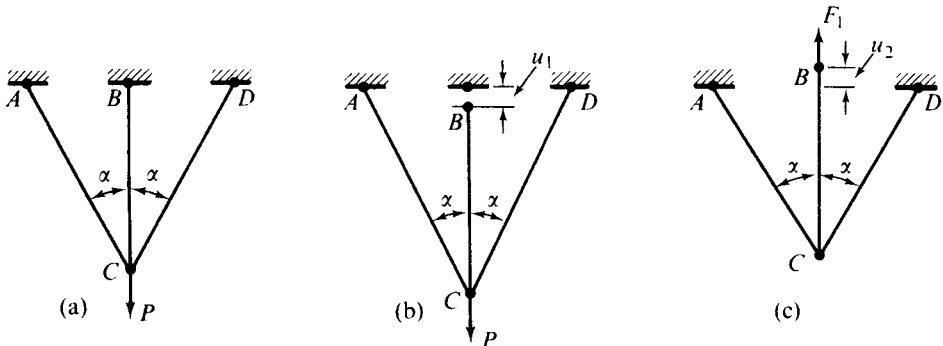
dan

$$R_1 = \frac{P}{1 + aA_2/(bA_1)}$$

sama dengan hasil yang diperoleh dalam Contoh 12-1. Reaksi sebelah kanan dapat diperoleh dari syarat statika:  $R_1 + R_2 = P$ .

#### CONTOH 12-8

Kerjakan kembali Contoh 12-3 dengan menggunakan metoda gaya, Gambar 12-9(a).



Gambar 12-9

#### PENYELESAIAN

Batang  $BC$  kita bayangkan terpotong pada tumpuan  $B$  dan pergeseran  $u_1$  dengan tegangan nol dalam anggota  $BC$  dapat ditentukan, Gambar 12-9(b). Kemudian gaya tidak diketahui  $F_1$  dalam batang  $BC$  diberikan, seperti yang terlihat dalam Gambar 12-9(c), mengakibatkan defleksi  $u_2$ . Superposisi kedua hasil ini bersama syarat geometris defleksi tumpuan  $B$  adalah nol, yaitu  $u_1 + u_2 = 0$ , memungkinkan kita menentukan gaya  $F_1$ . Dengan menggunakan Persamaan 2-4, dan secara tetap mengambil defleksi ke bawah sebagai positif, maka

$$\left[ \frac{\left( \frac{P}{2 \cos \alpha} \right) \left( \frac{L}{\cos \alpha} \right)}{AE} \frac{1}{\cos \alpha} \right] - \left[ \frac{F_1 L}{AE} + \frac{\left( \frac{F_1}{2 \cos \alpha} \right) \left( \frac{L}{\cos \alpha} \right)}{AE} \frac{1}{\cos \alpha} \right] = 0$$

dan

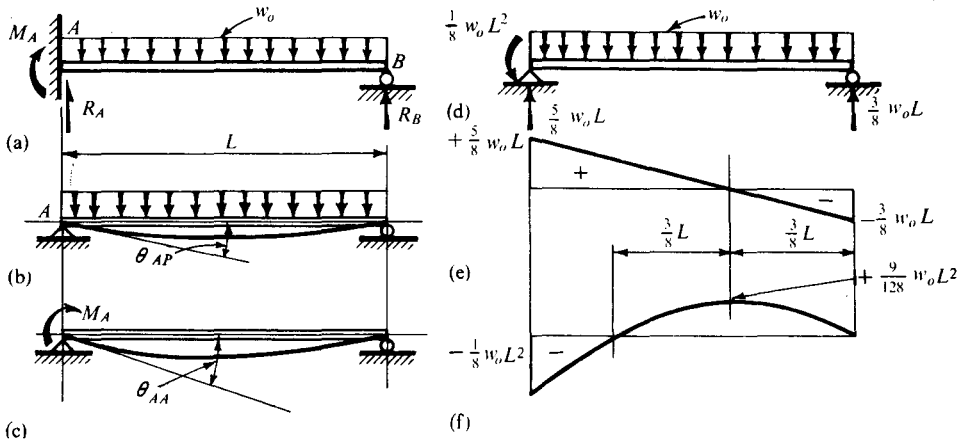
$$F_1 = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha}$$

yang sama dengan hasil yang diperoleh dalam Contoh 12-3. Gaya  $F_2$  dalam batang-batang  $AC$  dan  $DC$  kemudian dapat ditentukan dari syarat-syarat statika:  $F_1 + 2F_2 \cos \alpha = P$ .

Metoda gaya merupakan pula metoda yang sangat baik dalam menganalisa persoalan puntiran elastis statis tak tentu. Dalam hal demikian, batang yang memuntir diandaikan terpotong pada salah satu tumpuan dan perputaran ujung yang dilepaskan lantas dihitung. Besar momen puntir lebih ditentukan dengan membuatnya cukup besar untuk mengembalikan ujung batang yang terpotong kepada kedudukan yang sesungguhnya.

### CONTOH 12-9

Plotlah diagram-diagram geser dan momen untuk balok yang dibebani secara merata yang terjepit pada salah satu ujung dan mendapat tumpuan sederhana pada ujung lain, Gambar 12-10(a).  $EI$  adalah tetap.



Gambar 12-10

### PENYELESAIAN

Balok ini merupakan tak tentu berderajat satu, tetapi dapat dipermudah menjadi tertentu dengan mengeluarkan  $M_A$  seperti dalam Gambar 12-10(b). Momen positif  $M_A$  yang bekerja pada  $A$  pada struktur yang sama dapat dilihat dalam Gambar 12-10(c). Perputaran di  $A$  untuk kedua kasus tertentu dapat diperoleh dari Tabel 11 dalam Lampiran. (Juga lihat Contoh 11-3). Syarat rotasi nol di  $A$  dalam struktur asal memberikan persamaan yang diperlukan untuk menentukan  $M_A$

$$\theta_{AP} = w_o L^3 / (24EI) \quad (\text{searah putaran jarum jam})$$

dan  $\theta_{AA} = M_A L / (3EI) \quad (\text{searah putaran jarum jam})$

$$\theta_A = \theta_{AP} + \theta_{AA} = 0$$

Dengan mengambil arah putaran jarum jam sebagai positif,

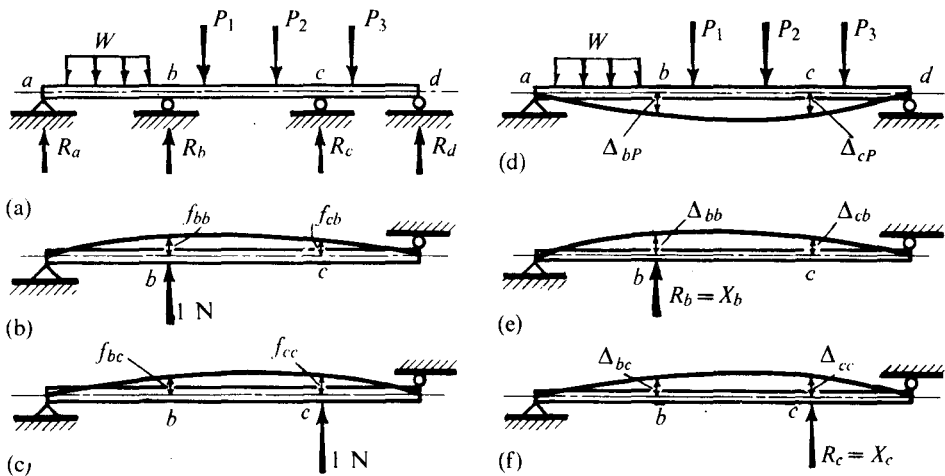
$$\frac{w_0 L^3}{24EI} + \frac{M_A L}{3EI} = 0 \quad \text{dan} \quad M_A = -\frac{w_0 L^2}{8}$$

Tanda negatif dari hasil di atas menunjukkan bahwa  $M_A$  bekerja dalam arah yang berlawanan dengan yang diandaikan semula. Sikapnya yang betul dapat dilihat dalam Gambar 12-10(d).

Soal yang selebihnya dapat diselesaikan dengan bantuan statika. Reaksi, diagram geser dan momen masing-masing terdapat dalam Gambar 12-10(d), (e) dan (f).

Persoalan ini dapat pula dianalisa dengan memperlakukan  $R_B$  sebagai reaksi lebih.

Seperti dinyatakan sebelumnya, prosedur superposisi berlaku untuk sistem linier yang tidak tertentu berderajat tinggi. Dalam hal seperti itu, adalah penting untuk mengingat bahwa pergeseran setiap titik pada suatu struktur yang dipermudah menjadi statis tertentu dipengaruhi oleh masing-masing gaya lebih yang dipakai kembali. Sebagai contoh, tinjaulah balok dalam Gambar 12-11(a).



Gambar 12-11 Metoda superposisi untuk balok menerus

Dalam membuang reaksi-reaksi lebih\*  $R_b$  dan  $R_c$  balok tersebut menjadi tertentu, dan defleksi pada  $b$  dan  $c$  dapat dihitung, Gambar 12-11(d). Defleksi-defleksi ini masing-masing ditulis  $\Delta_{bp}$  dan  $\Delta_{cp}$ , di mana tanda huruf yang pertama menunjukkan titik di mana defleksi terjadi, sedang tanda huruf yang kedua menunjukkan penyebab dari defleksi. Dengan menggunakan kembali reaksi  $R_b$  kepada balok yang sama, maka defleksi pada  $b$  dan  $c$  yang disebabkan oleh  $R_b$  pada  $b$  dapat diperoleh, Gambar 12-11(e). Defleksi-defleksi ini masing-masing ditulis sebagai  $\Delta_{bb}$  dan  $\Delta_{cb}$ . Dengan cara yang sama,  $\Delta_{bc}$  dan  $\Delta_{cc}$  yang disebabkan oleh  $R_c$ , dapat pula dibuat, Gambar 12-11(f). Dengan mensuperposisikan defleksi pada masing-masing tumpuan, dan membuat jumlahnya

\* Pemilihan reaksi-reaksi lebih adalah tertentu.

menjadi nol, berhubung titik-titik  $b$  dan  $c$  sesungguhnya tidak berdefleksi, kita memperoleh dua persamaan:

$$\begin{aligned}\Delta_b &= \Delta_{bP} + \Delta_{bb} + \Delta_{bc} = 0 \\ \Delta_c &= \Delta_{cP} + \Delta_{cb} + \Delta_{cc} = 0\end{aligned}\quad (12-7)$$

Ini dapat ditulis kembali dalam bentuk yang lebih berarti dengan menggunakan *koefisien-koefisien fleksibilitas*  $f_{bb}$ ,  $f_{bc}$ ,  $f_{cb}$ , dan  $f_{cc}$  yang didefinisikan sebagai defleksi yang terlihat dalam Gambar-gambar 12-11(b) dan (c) yang disebabkan oleh gaya satuan dalam arah reaksi-reaksi lebih. Kemudian, karena yang sedang ditinjau adalah suatu struktur linier, maka defleksi pada titik  $b$  yang disebabkan oleh gaya-gaya lebih dapat dinyatakan sebagai

$$\Delta_{bb} = f_{bb}X_b \quad \text{dan} \quad \Delta_{bc} = f_{bc}X_c \quad (12-8)$$

dan dengan cara yang sama pada titik  $c$

$$\Delta_{cb} = f_{cb} X_b \quad \text{dan} \quad \Delta_{cc} = f_{cc} X_c \quad (12-9)$$

di mana  $X_b$  dan  $X_c$  adalah faktor-faktor tanpa dimensi yang bila dikalikan dengan gaya-gaya satuan yang bersangkutan, memberikan satuan-satuan besaran gaya lebih. Dengan menggunakan notasi ini, Persamaan 12-7 menjadi

$$\begin{aligned} f_{bb}X_b + f_{bc}X_c + \Delta_{bP} &= 0 \\ f_{cb}X_b + f_{cc}X_c + \Delta_{cP} &= 0 \end{aligned} \quad (12-10)$$

di mana besaran-besaran tidak diketahui hanyalah  $X_b$  dan  $X_c$ ; pemecahan secara berbarengan persamaan-persamaan ini merupakan jawaban dari persoalan tersebut.

Bentuk resmi persamaan-persamaan superposisi\* metoda gaya untuk sistem dengan  $n$  gaya lebih yang tidak diketahui dapat ditulis sebagai:

$$\begin{aligned} f_{aa}X_a + f_{ab}X_b + \cdots + f_{an}X_n + \Delta_{aP} &= \Delta_a \\ f_{ba}X_a + f_{bb}X_b + \cdots + f_{bn}X_n + \Delta_{bP} &= \Delta_b \\ \vdots &\vdots \\ f_{na}X_a + f_{nb}X_b + \cdots + f_{nn}X_n + \Delta_{nP} &= \Delta_n \end{aligned} \quad (12-11)$$

Pada umumnya, defleksi berbagai titik yang ditulis dalam Persamaan 12-11 sebagai  $\Delta_a, \Delta_b, \dots, \Delta_n$  tidak perlu harus nol. Dalam persamaan-persamaan ini  $f_{ij}$ ,  $\Delta_{ip}$ , dan  $\Delta_i$  menyatakan defleksi linier ataupun sudut tergantung apakah mereka bersangkutan dengan suatu gaya atau kopel.

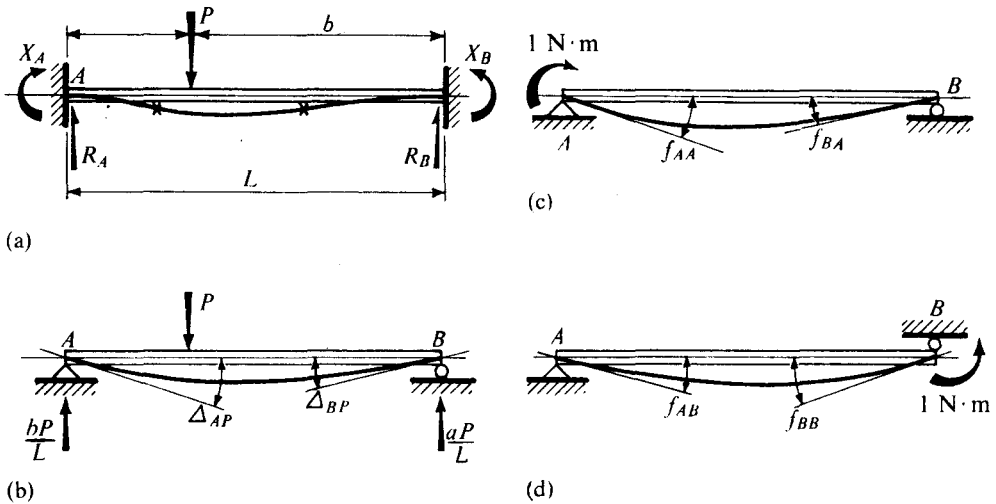
Kita dapat melihat† bahwa matrik koefisien fleksibilitas  $f_{ij}$  adalah simetris, yaitu  $f_{ij} = f_{ji}$ .

\* Kadang-kadang ini disebut persamaan-persamaan Maxwell-Mohr.

† Lihat misalnya, E.P. Popov, *Introduction to Mechanics of Solids*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1968, hal. 494.

**CONTOH 12-10**

Untuk balok dengan ujung-ujung terjepit seperti yang terlihat dalam Gambar 12-12(a), dengan menggunakan metoda gaya, tentukanlah momen yang terbentuk pada tumpuan yang disebabkan oleh gaya  $P$ .  $EI$  adalah tetap.

**Gambar 12-12****PENYELESAIAN**

Balok ini, tak tentu berderajat dua, diturunkan menjadi tertentu dengan mengeluarkan momen-momen ujung, Gambar 12-12(b). Dalam balok tertentu ini, perputaran garis singgung pada tumpuan-tumpuan yang disebabkan oleh beban terpakai dapat diambil dari jawab dalam Contoh 11-4. Ini menghasilkan

$$|\Delta_{AP}| = \left| \left( \frac{dv}{dx} \right)_{x=0} \right| = \frac{Pab}{6EI} (a + 2b)$$

$$|\Delta_{BP}| = \left| \left( \frac{dv}{dx} \right)_{x=L} \right| = \frac{Pab}{6EI} (b + 2a)$$

Perputaran ujung-ujung balok yang disebabkan oleh kopel-kopel satuan yang terlihat dalam Gambar-gambar 12-12(c) dan (d) dapat diperoleh pada Tabel 11 dari Lampiran. Dengan  $M_0 = 1$ , ini memberikan

$$|f_{AA}| = |f_{BB}| = \frac{L}{3EI} \quad \text{dan} \quad |f_{AB}| = |f_{BA}| = \frac{L}{6EI}$$

Sikap semua perputaran di atas terlihat dalam Gambar 12-12. Ini harus diperhatikan sekali dalam membuat hubungan-hubungan superposisi yang dinyatakan oleh Persamaan 12-11. Pada masing-masing persamaan pergeseran positif diukur dalam arah pergeseran yang disebabkan oleh besaran gaya lebih yang bersangkutan. Berdasarkan ini kita peroleh dua persamaan.

$$\circlearrowleft + \Delta_A \equiv \theta_A = +\frac{L}{3EI}X_A + \frac{L}{6EI}X_B + \frac{Pab}{6EIL}(a+2b) = 0$$

$$\circlearrowleft + \Delta_B \equiv \theta_B = +\frac{L}{6EI}X_A + \frac{L}{3EI}X_B + \frac{Pab}{6EIL}(b+2a) = 0$$

Pemecahan persamaan-persamaan ini dengan simultan menghasilkan,

$$X_A = -\frac{Pab^2}{L^2} \quad \text{and} \quad X_B = -\frac{Pa^2b}{L^2}$$

di mana tanda negatif dari momen lentur menunjukkan bahwa arah yang diandaikan semula adalah salah.

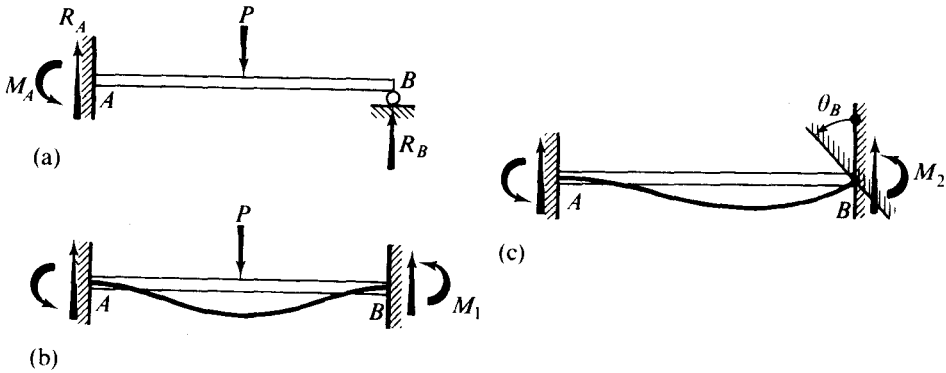
Soal ini dapat pula diselesaikan dengan memperlakukan  $R_B$  dan  $X_B$  sebagai gaya-gaya lebih karena pengeluaran sementara mereka membuat struktur menjadi tertentu. Prosedur ini khususnya baik digunakan bila ditentukan bahwa salah satu tumpuan bergerak vertikal. Dalam hal seperti itu defleksi yang disebabkan oleh gaya terpakai dan gaya lebih disamakan dengan gerakan tumpuan.

### \*12-6 METODA PERGESERAN (DISPLACEMENT METHOD)

Dalam metoda gaya yang dibahas dalam pasal yang lalu, gaya-gaya lebih (redundant force) diandaikan sebagai tidak diketahui, dan struktur yang dilepaskan pertama-tama diperoleh dengan mengeluarkan gaya-gaya lebih tersebut. Pada metoda pergeseran, di lain pihak, pergeseran linier atau sudut dari titik-titik sambungan (titik sentuh bagian struktur dengan tumpuan, titik-titik potong dua atau lebih bagian struktur, ujung bebas batang yang diproyeksikan) diambil sebagai yang tidak diketahui. Langkah pertama untuk menggunakan metoda ini adalah mencegah pergeseran titik-titik sambungan ini, yang disebut juga sebagai *indeterminan kinematik* atau *derajat kebebasan*. Penekanan derajat-derajat kebebasan ini menghasilkan sistem yang baru yang terdiri dari rangkaian batang yang masing-masing titik ujungnya dikekang dari perpindahan dan perputaran. Perhitungan reaksi-reaksi pada ujung yang sengaja dikekang ini oleh beban-beban terpakai luar dapat dilakukan dengan menggunakan metoda analisis lain seperti metoda gaya. Tetapi hasil-hasil perhitungan demikian biasanya tersedia dalam tabel-tabel untuk pelbagai keadaan pembebanan seperti Tabel 12 dari Lampiran. Dalam jenis analisis ini, momen-momen yang berlawanan arah putaran jarum jam dan reaksi-reaksi ke atas yang bekerja *pada salah satu ujung batang diambil secara tetap* sebagai positif. Ini menghasilkan suatu perumusan yang konsisten dari persamaan-persamaan superposisi. **Kaedah tanda ini berbeda-beda dengan yang dipergunakan sebelum ini pada kaedah tanda balok.**

Dengan mengendalikan tumpuan  $B$  yang menyangga kantilever yang terlihat dalam Gambar 12-13(a) mengurangi soal tersebut menjadi sebuah balok ujung jepit hingga momen  $M_1$  pada  $B$  dapat diperoleh, Gambar 12-13(b). Momen ujung  $M_2$  yang dibutuhkan untuk memutar ujung jepit  $B$  sebesar sudut  $\theta_B$  dapat pula ditentukan. Dengan mensuperposisikan kedua momen dan dengan memperhatikan bahwa  $M_1 + M_2 = 0$  berhubung balok yang sedang ditinjau sesungguhnya ditumpu sederhana di titik  $B$ , kita memperoleh jawab untuk  $\theta_B$  sebagai putaran balok di  $B$ .

Prosedur ini sering disebut sebagai *metoda pergeseran* (displacement method), karena pergeseran titik sambungan dalam pendekatan ini diperlakukan sebagai yang

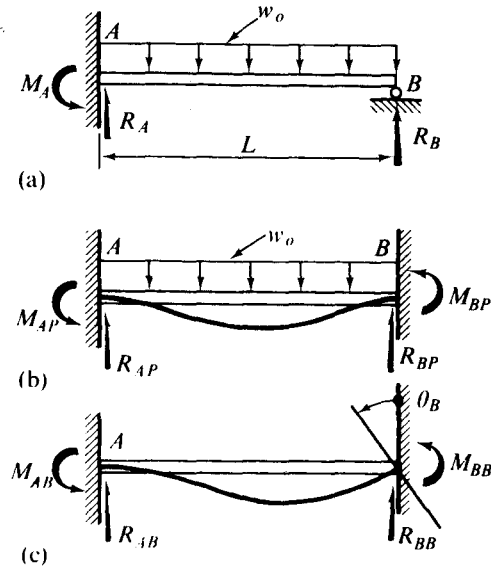


Gambar 12-13

tidak diketahui. Khususnya perhatikan bahwa begitu perpindahan sambungan ditentukan, maka semua reaksi tumpuan dapat diperoleh dengan mensuperposisikan reaksi-reaksi yang bersangkutan seperti yang terdapat dalam Gambar 12-13(b) dan (c). Analisis tegangan dan deformasi yang selanjutnya, dapat dilakukan dengan cara yang biasa.

**CONTOH 12-11**

Kerjakan kembali Contoh 12-9 dengan menggunakan metoda perpindahan, Gambar 12-14(a).



Gambar 12-14

**PENYELESAIAN**

Dengan menganggap bahwa deformasi aksial diabaikan, maka balok ini secara kinematik tak tentu berderajat satu karena perpindahan sambungan yang tidak diketahui hanyalah

perputaran balok pada tumpuan  $B$ . Balok berujung jepit diperoleh dengan mengendalikan perputaran di  $B$ , Gambar 12-14(b). Reaksi-reaksi pada  $A$  dan  $B$  yang disebabkan oleh beban yang terdistribusi merata dapat diperoleh dari Tabel 12 dari Lampiran. Di sini reaksi-reaksi ini membawa tanda huruf ganda; pertama menentukan letak mereka, sedang kedua menentukan bahwa mereka disebabkan oleh beban terpakai yang kita tulis  $P$  untuk umumnya. Tabel yang sama dapat pula kita lihat untuk mendapatkan reaksi-reaksi pada balok berujung jepit yang tidak dibebani yang mana ujung  $B$  mengalami putaran  $\theta_B$ . Di sini lagi-lagi tanda huruf yang pertama menentukan kedudukan reaksi sedang yang kedua menentukan letak pergeseran terpakai. Syarat momen nol pada  $B$  dalam struktur asal memberikan syarat penting untuk menentukan  $\theta_B$ .

Dengan menggunakan notasi di atas dan dengan memperhatikan bahwa gaya terpakai  $w_o$  bekerja ke bawah (negatif), dari Tabel 12 Lampiran,

$$M_{BP} = -w_o L^2/12, \quad M_{BB} = +4EI\theta_B/L$$

Syarat keseimbangan membutuhkan bahwa momen total  $M_B$  pada ujung  $B$  adalah nol, yaitu

$$M_B = M_{BP} + M_{BB} = 0$$

$$\text{Jadi,} \quad -\frac{w_o L^2}{12} + \frac{4EI}{L}\theta_B = 0, \quad \text{atau} \quad \theta_B = \frac{w_o L^3}{48EI}$$

Kemudian dengan menggunakan superposisi, serta menggunakan Tabel 12,

$$M_A = M_{AP} + M_{AB} = +\frac{w_o L^2}{12} + \frac{2EI}{L}\theta_B = +\frac{w_o L^2}{8} \quad (\text{berlawanan arah putaran jarum jam})$$

$$R_A = R_{AP} + R_{AB} = \frac{w_o L}{2} + \frac{6EI}{L^2}\theta_B = +\frac{5}{8}w_o L \quad (\text{arah ke atas})$$

$$R_B = R_{BP} + R_{BB} = \frac{w_o L}{2} - \frac{6EI}{L^2}\theta_B = +\frac{3}{8}w_o L \quad (\text{arah ke atas})$$

Tanda-tanda semua besaran sesuai dengan kaedah tanda yang terlihat dalam Gambar-gambar 12-13(b) dan (c).

Menurut kaidah tanda balok, momen  $M_A$  pada  $A$  adalah negatif. Reaksi-reaksi dan diagram-diagram geser dan momen konvensional masing-masing dapat dilihat pada Gambar 12-10(d), (e) dan (f).

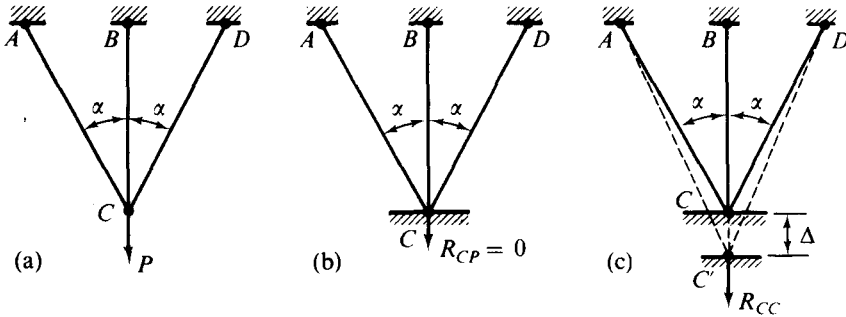
#### CONTOH 12-12

Kerjakanlah kembali Contoh 12-3 dengan mempergunakan metoda pergeseran, Gambar 12-15(a).

#### PENYELESAIAN

Pergeseran-pergeseran titik sambung yang tidak diketahui dalam soal ini adalah gerakan-gerakan horisontal dan vertikal dari titik  $C$ . Tetapi disebabkan oleh simetri yang terlibat, maka pergeseran horisontal titik  $C$  adalah nol, dan yang tinggal hanyalah ketaktentuan kinematik atau derajat kebebasan berderajat satu.





Gambar 12-15

Langkah pertama dalam pemecahan sistem tak tentu ini, dengan menggunakan metoda pergeseran, ialah mengeliminasi derajat kebebasan ini dan memperoleh sistem yang terdiri dari tiga batang pengendali, Gambar 12-15(b). Untuk suatu sistem seperti ini, reaksi\*  $R_{CP}$  pada C adalah nol, karena tidak terdapat beban terpakai luar (selain dari beban yang bekerja langsung pada sambungan C) antara ujung-ujung yang terkendali pada ketiga batang.<sup>†</sup>

Langkah berikutnya dalam proses pemecahan soal ini adalah menghitung gaya  $R_{CC}$  yang dibutuhkan untuk mengenakan sambungan C pada pergeseran vertikal  $\Delta$ , Gambar 12-15(c). Untuk deformasi yang serasi,  $\Delta_{BC} = \Delta$  dan  $\Delta_{AC} = \Delta_{DC} = \Delta \cos \alpha$ . Kemudian, dengan menggunakan Persamaan 2-4,

$$F_{BC} = \frac{\Delta AE}{L} \quad (\text{tarik})$$

$$F_{AC} = F_{DC} = \frac{(\Delta \cos \alpha) AE}{L / \cos \alpha} = \frac{\Delta AE}{L} \cos^2 \alpha \quad (\text{tarik})$$

$$\text{dan} \quad R_{CC} = F_{BC} + F_{AC} \cos \alpha + F_{DC} \cos \alpha$$

$$\text{atau} \quad R_{CC} = \frac{\Delta AE}{L} (1 + 2 \cos^3 \alpha)$$

Akhirnya, dengan mensuperposisikan hasil-hasil dalam kedua langkah di atas dan memasukkan syarat keseimbangan dalam arah vertikal pada sambungan C, kita memperoleh

$$R_C = R_{CP} + R_{CC} = P$$

$$\text{jadi} \quad \frac{\Delta AE}{L} (1 + 2 \cos^3 \alpha) = P$$

$$\text{atau} \quad \Delta = \frac{PL}{AE(1 + 2 \cos^3 \alpha)}$$

Dengan memasukkan pernyataan  $\Delta$  ke dalam persamaan-persamaan yang sebelumnya untuk gaya-gaya batang yang dinyatakan dalam  $\Delta$ , kita memperoleh

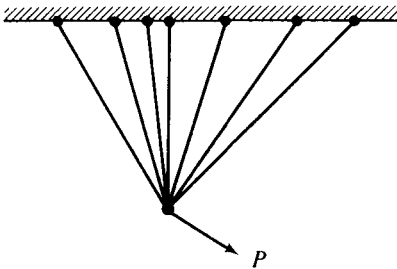
\* Dipakai sistem notasi yang sama dengan contoh yang lalu.

<sup>†</sup> Andaikanlah beban tambahan ke bawah  $P$  bekerja pada batang  $BC$  pada jarak  $L/4$  di atas  $C$ . Dengan menggunakan Persamaan 12-1, kita kemudian memperoleh  $R_{CP} = -3P/4$ .

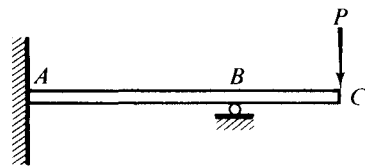
$$F_{BC} = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha} \quad \text{dan} \quad F_{AC} = F_{DC} = \frac{P \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha}$$

yang sama dengan hasil yang diperoleh dalam Contoh-contoh 12-3 dan 12-8.

Perlu diperhatikan bahwa bila dalam soal di atas tidak terdapat simetri terhadap sumbu vertikal (mungkin disebabkan kekurangan simetri dalam struktur itu sendiri atau karena pemakaian beban  $P$  pada  $C$  di luar arah vertikal), maka suatu pergeseran horisontal harus pula diikutkan pada sambungan  $C$ . Kedua persamaan keseimbangan gaya, dalam arah-arrah horisontal dan vertikal, harus diadakan dan diselesaikan secara bersamaan untuk mendapatkan pergeseran horisontal dan vertikal dari titik  $C$ . Selanjutnya, adalah menarik untuk memperhatikan bahwa penambahan sejumlah batang (Gambar 12-16) tidak meningkatkan ketaktentuan kinematika dari bangunan ini, sedang jumlah maksimum persamaan simultan yang harus diselesaikan untuk sistem yang demikian masih tetap dua. Pada metoda gaya, di pihak lainnya, jumlah gaya lebih yang statis bertambah sedang jumlah persamaan simultan sama dengan jumlah gaya lebih tersebut. Tetapi ini tidak menyatakan bahwa metoda pergeseran selalu mempunyai jawab jumlah persamaan yang lebih sedikit dibandingkan dengan metoda gaya. Tinjaulah umpamanya keadaan sebuah katilever yang disangga dengan sebuah balok gantung seperti yang terlihat dalam Gambar 12-17. Balok ini adalah statis tak tentu berderajat satu saja, tetapi secara kinematis merupakan tak tentu berderajat tiga (rotasi pada  $B$  dan  $C$  dan pergeseran vertikal di  $C$ ); jadi kita membutuhkan untuk memecahkan hanya sebuah persamaan dalam metoda gaya tetapi tiga persamaan simultan perlu dipecahkan dalam metoda pergeseran untuk menyelesaikan soal ini.

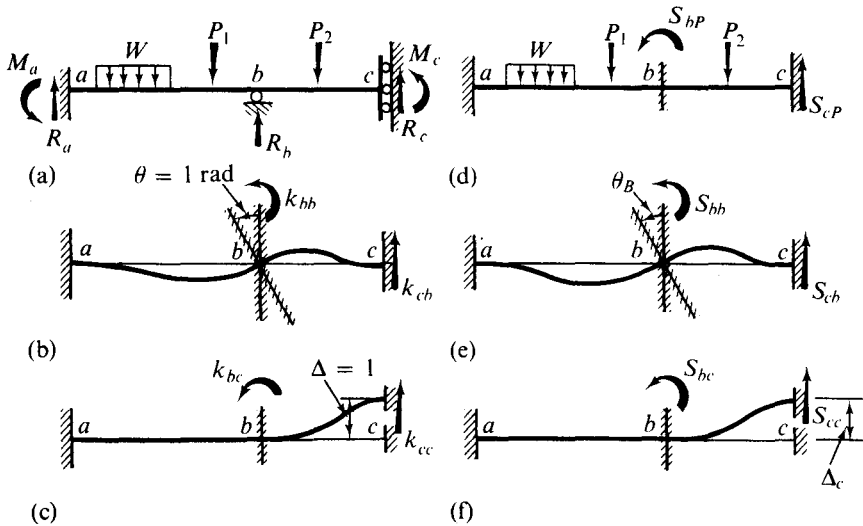


Gambar 12-16



Gambar 12-17

Tinjau sekarang balok yang terlihat dalam Gambar 12-18(a), di mana tumpuan yang dikemukakan di  $c$  membolehkan pergeseran vertikal tetapi tidak untuk rotasi balok pada  $c$ . Derajat kebebasan lain dari balok ini adalah perputaran garis singgungnya pada tumpuan  $b$ . Balok ini secara kinematis merupakan tak tentu berderajat dua. Dalam mengendalikan kedua derajat kebebasan ini, kita memperoleh suatu sistem yang terdiri dari dua balok yang berujung jepit  $ab$  dan  $bc$ , Gambar 12-18(d). Efek beban-beban terpakai luar terhadap kedua balok berujung jepit ini adalah menghasilkan sekumpulan gaya-gaya reaktif pada tumpuan-tumpuan yang dikenal sebagai *aksi ujung jepit* (fixed-



Gambar 12-18

end actions). Jadi umpamanya,  $S_{bP}$  adalah momen ujung jepit pada  $b$ , dan  $S_{cP}$  adalah reaksi ujung jepit di  $c$ . Kemudian tumpuan jepit pada  $b$  berputar dengan sudut  $\theta_b$  yang memperbesar harga-harga  $S_{bb}$  dan  $S_{cb}$ , seperti yang terlihat dalam Gambar 12-18(e) masing-masing pada  $b$  dan  $c$ . Dengan cara yang sama,  $S_{bc}$  dan  $S_{cc}$  yang disebabkan oleh pergerakan vertikal dari tumpuan jepit pada  $c$  melalui jarak  $\Delta_c$ , Gambar 12-18(f). Berhubung tidak ada momen terpakai luar di  $b$  dan tidak ada gaya vertikal di  $c$  dalam struktur awal, maka gaya resultante yang bersangkutan  $S_b$  dan  $S_c$  pada titik-titik ini sama dengan nol. Selain dari pada itu, kedua gaya ini dapat diperoleh dengan superposisi (penjumlahan) hasil-hasil tiga analisa yang terpisah, pada Gambar-gambar 12-18(d) sampai (f). Pertimbangan-pertimbangan ini menuju kepada dua persamaan simultan:

$$\begin{aligned} S_b &= S_{bP} + S_{bb} + S_{bc} = 0 \\ S_c &= S_{cP} + S_{cb} + S_{cc} = 0 \end{aligned} \quad (12-12)$$

Ini dapat ditulis kembali dalam bentuk yang lebih berarti dengan menggunakan *koeffisien kekakuan* (stiffness coefficient)  $k_{bb}$ ,  $k_{bc}$ ,  $k_{cb}$ , dan  $k_{cc}$  yang didefinisikan sebagai aksi-aksi ujung jepit yang terlihat dalam Gambar-gambar 12-18(b) dan (c) yang disebabkan oleh pergeseran satuan (linier atau angular) sesuai dengan indeterminan kinematik. Kemudian, karena yang sedang ditinjau adalah suatu sistem linier, maka momen-momen pada  $b$  yang disebabkan oleh indeterminan kinematik dapat dinyatakan sebagai

$$S_{bb} = k_{bb}X_b \quad \text{dan} \quad S_{bc} = k_{bc}X_c \quad (12-13)$$

dan dengan cara yang sama dengan reaksi vertikal di  $c$  sebagai

$$S_{cb} = k_{cb}X_b \quad \text{dan} \quad S_{cc} = k_{cc}X_c \quad (12-14)$$



## PENYELESAIAN

Kebebasan perputaran pada tumpuan-tumpuan  $b$  dan  $c$  membuat balok ini secara kinematik menjadi tak tentu berderajat dua. Dengan menahan secara temporer tumpuan-tumpuan pada  $b$  dan  $c$  terhadap perputaran, kita memperoleh suatu sistem dua balok ujung jepit yang mendapat gaya luar, Gambar 12-19(b). Momen-momen ujung jepit  $S_{bP}$  dan  $S_{cP}$  dapat diperoleh dengan mempergunakan rumus standar seperti yang diberikan dalam Tabel 12 dari Lampiran. Jadi, dengan memperhatikan bahwa momen-momen ujung jepit bekerja pada sambungan pada  $b$  dari kedua belah sisi, maka

$$S_{bP} = \left[ -\frac{PL}{8} \right]_{ba} + \left[ \frac{w_o(2L)^2}{12} \right]_{bc} = -\frac{PL}{8} + \frac{w_o L^2}{3}$$

dan

$$S_{cP} = -\frac{w_o(2L)^2}{12} = -\frac{w_o L^2}{3}$$

*Koefisien kekakuan* dapat dihitung dengan menghadapkan secara temporer ujung-ujung jepit  $b$  dan  $c$ , kepada rotasi satuan *sekaligus*, seperti yang terlihat dalam Gambar-gambar 12-9(c) dan (d). Sekali lagi, dengan menggunakan rumus-rumus dalam Tabel 12 dari Lampiran dan dengan memperhatikan bahwa kedua bentangan yang berdampingan memperbesar kekakuan dari sambungan di  $b$ , kita mendapatkan

$$\begin{aligned} k_{bb} &= \left[ \frac{4EI}{L} \right]_{ba} + \left[ \frac{4EI}{2L} \right]_{bc} = \frac{6EI}{L} & k_{bc} &= \left[ \frac{2EI}{2L} \right]_{bc} = \frac{EI}{L} \\ k_{cb} &= \left[ \frac{2EI}{2L} \right]_{cb} = \frac{EI}{L} & k_{cc} &= \left[ \frac{4EI}{2L} \right]_{cc} = \frac{2EI}{L} \end{aligned}$$

Sikap semua gaya ujung-jepit di atas diperlihatkan dalam Gambar 12-9 dan harus hati-hati dalam membuat persamaan-persamaan superposisi keseimbangan gaya yang dinyatakan oleh Persamaan 12-16. Pada tiap persamaan, gaya-gaya positif diukur dalam arah gaya yang disebabkan oleh besaran kinematik yang bersangkutan yang tidak diketahui. Berdasarkan ini kedua persamaan didapatkan:

$$S_b = \frac{6EI}{L} X_b + \frac{EI}{L} X_c - \frac{PL}{8} + \frac{w_o L^2}{3} = 0$$

$$S_c = \frac{EI}{L} X_b + \frac{2EI}{L} X_c - \frac{w_o L^2}{3} = 0$$

Pemecahan persamaan-persamaan ini secara bersamaan, menghasilkan

$$X_b = \frac{L^2}{11EI} \left( \frac{P}{4} - w_o L \right) = \theta_b$$

dan

$$X_c = \frac{L^2}{11EI} \left( -\frac{P}{8} + \frac{7}{3} w_o L \right) = \theta_c$$

Dalam masalah ini sambungan  $a$  adalah jepit dan tidak berputar, karenanya  $\theta_a = X_a = 0$ . Dengan keterangan ini pada perputaran sambungan, maka reaksi-reaksi yang disebabkan oleh putaran ini untuk tiap bentangan ditentukan dengan menggunakan Tabel 12 dari Lampiran. Untuk tiap bentangan reaksi-reaksi ini disuperposisikan dengan aksi ujung

jepit yang disebabkan oleh beban terpakai, Gambar 12-19(b). Umpamanya dengan mendefinisikan momen pada ujung  $b$  untuk balok  $bc$  sebagai  $M_{bc}$ , maka

$$M_{bc} = [S_{bP}]_{bc} + \frac{4EI}{(2L)}\theta_b + \frac{2EI}{(2L)}\theta_c = +\frac{4}{11}w_0L^2 + \frac{3}{88}PL$$

Perhitungan yang serupa dengan momen  $M_{ba}$  pada ujung  $b$  untuk balok  $ba$  menunjukkan momen ini secara numerik sama dengan  $M_{bc}$ , tetapi tandanya berlawanan. Ini memang harus demikian, karena dalam hal ini tidak ada momen luar yang bekerja pada  $b$ , jadi  $S_b \equiv M_b = M_{ba} + M_{bc} = 0$ .

### \*12-7 METODA LUAS-MOMEN UNTUK BALOK STATIS TAK TENTU

Konsep dasar yang melatar belakangi metoda gaya yang dibicarakan dalam Pasal 12-5 bersama teorema luas-momen yang diturunkan dalam Pasal 11-12 akan dipergunakan untuk mengembangkan teknik khusus yang bermanfaat untuk analisa *balok statis tak tentu*. Kemudian teknik luas-momen ini akan kita perluas dalam dua pasal yang berikut untuk mendapatkan rumus ulang (recurrence formula) yang menguntungkan analisa balok menerus.

Penggunaan metoda luas-momen dengan teknik superposisi untuk memecahkan soal-soal tak tentu dapat lebih dipercepat, dengan pertimbangan berikut: Balok-balok pengekang\* dan menerus berbeda dari balok-balok tumpuan sederhana terutama oleh adanya momen-momen lebih pada tumpuan-tumpuan. Karenanya diagram momen lentur untuk balok-balok ini dapat dipandang terdiri dari dua bagian yang tidak saling bergantung — satu bagian momen disebabkan oleh semua pembebanan terpakai pada balok yang diandaikan mendapat tumpuan sederhana, sedang yang satu lagi oleh momen lebih (redundant moment). Jadi efek momen ujung lebih tersebut, disuperposisikan dengan balok yang diandaikan mempunyai tumpuan sederhana. Secara fisis notasi ini dapat diperjelas dengan menandaikan balok tak tentu terpotong melalui tumpuan sedang reaksi vertikal dipertahankan. Kontinuitas kurva elastis dari balok dipelihara oleh momen-momen lebih.

Meskipun ordinat-ordinat kritis dari diagram momen lentur yang disebabkan oleh momen lebih tersebut tidak diketahui, tetapi bentuk dapat diketahui. Pemakaian momen lebih (redundant moment) pada ujung sebuah balok sederhana menghasilkan diagram momen berbentuk segitiga dengan maksimum pada momen terpakai dan ordinat nol pada ujung yang lain. Demikian pula, bila momen-momen ujung terdapat pada kedua ujung sebuah balok sederhana, kita memperoleh dua diagram momen segitiga yang disuperposisikan menjadi diagram berbentuk trapesium. (Turunkanlah pernyataan ini).

Bagian-bagian yang diketahui dan yang tidak diketahui dari diagram momen lentur bersama-sama memberikan suatu diagram momen lentur yang lengkap. Sepenuhnya diagram ini kemudian dapat dipergunakan dalam pemakaian teorema luas-momen terhadap kurva elastis kontinu sebuah balok. Keadaan geometris suatu soal, seperti kontinuitas kurva elastis pada tumpuan, atau garis singgung pada ujung-ujung terpasang yang

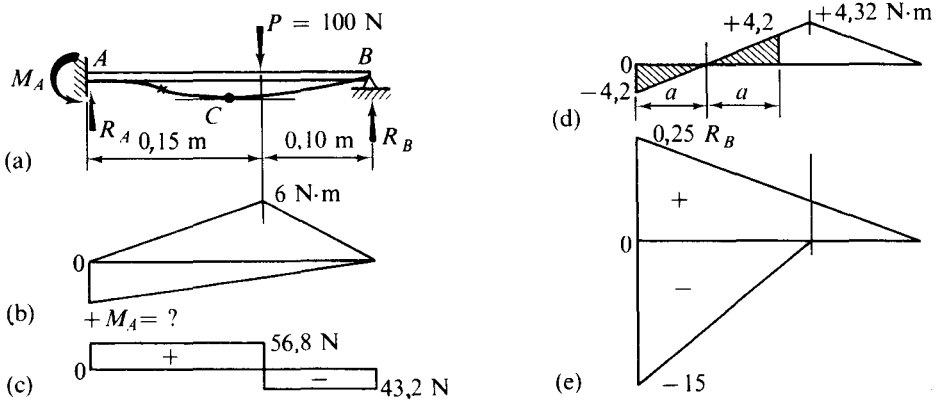
\* Balok tak tentu dengan satu atau lebih ujung tetap disebut balok pengekang.

tidak berputar, memperkenankan perumusan cepat dari persamaan untuk harga-momen lebih yang tidak diketahui pada tumpuan-tumpuan.

Untuk balok yang kekakuan lenturnya berubah-ubah, harus digunakan diagram  $M/(EI)$ .

#### CONTOH 12-14

Hitunglah defleksi maksimum ke bawah dari balok aluminium kecil yang terlihat dalam Gambar 12-20(a) yang disebabkan oleh suatu gaya terpakai  $P = 100 \text{ N}$ . Kekakuan lentur tetap balok  $EI = 60 \text{ N}\cdot\text{m}^2$ .



Gambar 12-20

#### PENYELESAIAN

Penyelesaian persoalan ini terdiri dari dua bagian. Pertama, reaksi lebih (redundant reaction) harus ditentukan lebih dahulu untuk menetapkan harga-harga numerik yang perlu untuk pembuatan diagram momen lentur; kemudian prosedur luas-momen yang biasa dapat kita lakukan untuk mendapatkan defleksi.

Dengan mengandaikan bahwa balok tersebut dilepaskan dari momen ujung lebih, sebuah diagram momen lentur sederhana dapat kita gambarkan di atas garis dasar dalam Gambar 12-20(b). Diagram momen dari bentuk yang diketahui yang disebabkan oleh momen lebih  $M_A$  yang tidak diketahui diperlihatkan pada diagram yang sama di bawah garis dasar. Kita andaikan  $M_A$  positif, sehubungan dengan cara ini tandanya yang betul otomatis sesuai dengan kaidah tanda balok. Diagram yang digabung menunjukkan suatu diagram momen lentur *lengkap*.

Garis singgung pada ujung terpasang tetap horisontal sesudah pemakaian gaya  $P$ . Jadi syarat geometris adalah  $t_{BA} = 0$ . Suatu persamaan yang dirumuskan berdasarkan ini memberikan jawab untuk  $M_A$ .<sup>\*</sup> Persamaan-persamaan keseimbangan statika digunakan untuk menghitung reaksi. Diagram momen-lentur akhir, Gambar 12-20(d) diperoleh dengan cara yang biasa setelah gaya-gaya reaksi tersebut diketahui. Jadi karena  $t_{BA} = 0$ ,

$$\frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} (0,25)(6) \frac{1}{3} (0,25 + 0,10) + \frac{1}{2} (0,25) M_A \frac{2}{3} (0,25) \right] = 0$$

<sup>\*</sup> Balok tak tentu dengan satu atau lebih ujung terjepit disebut balok pengegang.

Jadi,  $M_A = -4,2 \text{ N}\cdot\text{m}$

$$\sum M_A = 0 \odot +, \quad 100(0,15) - R_B(0,25) - 4,2 = 0, \quad R_B = 43,2 \text{ N}$$

$$\sum M_B = 0 \odot +, \quad 100(0,10) + 4,2 - R_A(0,25) = 0, \quad R_A = 56,8 \text{ N}$$

Periksa:  $\sum F_y = 0 \uparrow +, \quad 43,2 + 56,8 - 100 = 0$

Defleksi maksimum terjadi bila garis singgung pada kurva elastis adalah horisontal, yaitu titik  $C$  dalam Gambar 12-20(a). Jadi dengan memperhatikan bahwa garis singgung di titik  $A$  juga mendatar dan dengan menggunakan teorema luas-momen pertama, maka titik  $C$  dapat ditentukan letaknya. Ini terjadi bila daerah-daerah yang bergaris-garis dalam Gambar 12-20(d) yang mempunyai tanda yang berlawanan adalah sama luasnya yaitu pada jarak  $2a = 2(4,2/56,8) = 0,148 \text{ m}$  dari titik  $A$ . Simpangan singgung  $t_{AC}$  (atau  $t_{CA}$ ) memberikan defleksi titik  $C$ .

$$\begin{aligned} v_{\max} &= v_C = t_{AC} \\ &= \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} \times 0,074(+4,2) \left( 0,074 + \frac{2}{3} \times 0,074 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \times 0,074(-4,2) \frac{1}{3} \times 0,074 \right] \\ &= (15,36)10^{-3}/(EI) = 0,000 256 \text{ m} \quad (\text{ke bawah}) \end{aligned}$$

#### PENYELESAIAN CARA LAIN

Penyelesaian yang cepat dapat pula diperoleh dengan menggambar diagram momen dengan bagian-bagian kantilever. Ini diperlihatkan dalam Gambar 12-20(e). Perhatikan bahwa salah satu ordinat adalah dalam bentuk reaksi lebih  $R_B$ . Sekali lagi, dengan menggunakan syarat geometris  $t_{BA} = 0$ , kita memperoleh persamaan yang menghasilkan  $R_B$ . Reaksi-reaksi yang lain menyusul dari statika. Dari  $t_{BA} = 0$

$$\frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} (0,25)(+0,25R_B) \frac{2}{3} (0,25) + \frac{1}{2} (0,15)(-15) \left( 0,1 + \frac{2}{3} \times 0,15 \right) \right] = 0$$

Jadi,  $R_B = 43,2 \text{ N}$ , arah ke atas sebagaimana diandaikan semula.

$$\sum M_A = 0 \odot +, \quad M_A + 43,2(0,25) - 100(0,15) = 0, \quad M_A = 4,2 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Sesudah diagram momen gabungan digambar, Gambar 12-20(d), maka sisa pekerjaan ini sama dengan pada penyelesaian sebelumnya.

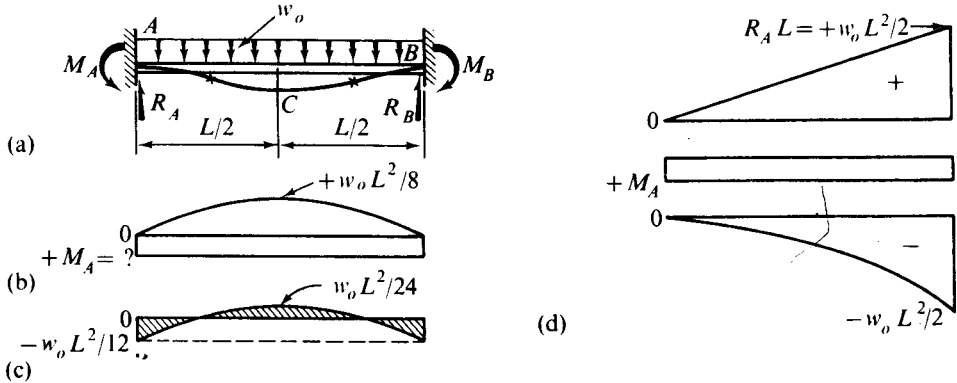
#### CONTOH 12-15

Hitunglah momen pada tumpuan-tumpuan untuk sebuah balok ujung jepit yang di-beban dengan beban yang terdistribusi merata  $w_0$  newton per satuan panjang, Gambar 12-21(a).

#### PENYELESAIAN

Momen-momen yang terdapat pada tumpuan disebut momen-momen ujung jepit dan penentuan mereka penting sekali dalam teori struktur. Oleh karena simetri terdapat dalam soal ini, maka momen-momen ujung jepit adalah sama, sebagaimana halnya





Gambar 12-21

dengan reaksi vertikal yang masing-masingnya adalah  $w_o L/2$ . Diagram momen untuk balok ini yang kita tinjau sebagai bertumpuan sederhana merupakan sebuah parabola seperti yang terlihat dalam Gambar 12-21(b), di mana di samping itu momen-momen ujung jepit, dalam gambar yang sama, memberikan diagram segiempat.

Meskipun balok ini merupakan statis tak tentu berderajat dua, tetapi karena simetri sebuah persamaan berdasarkan keadaan geometris sudah cukup memberikan momen-momen lebih. Dari geometri kurva elastis, salah satu syarat berikut dapat digunakan;  $\Delta\theta_{AB} = 0^*$ ,  $t_{BA} = 0$  atau  $t_{AB} = 0$ . Dari syarat pertama,  $\Delta\theta_{AB} = 0$ ,

$$\frac{1}{EI} \left[ \frac{2}{3} L \left( +\frac{w_o L^2}{8} \right) + L(+M_A) \right] = 0$$

kemudian

$$M_A = M_B = -\frac{w_o L^2}{12}$$

Diagram momen gabungan dapat dilihat dalam Gambar 12-21(c). Dibandingkan dengan momen lentur maksimum dari sebuah balok sederhana, terjadi pengurangan yang berarti dalam besar momen kritis.

#### PENYELESAIAN CARA LAIN

Diagram momen tiap bagian kantilever terlihat dalam Gambar 12-21(d). Dengan memperhatikan  $R_A = R_B = w_o L/2$  dan dengan menggunakan syarat geometris yang sama seperti di atas,  $\Delta\theta_{AB} = 0$ , kita dapat menurunkan penyelesaian yang lalu sebagai berikut:

$$\frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} L \left( +\frac{w_o L^2}{2} \right) + L(+M_A) + \frac{1}{3} L \left( -\frac{w_o L^2}{2} \right) \right] = 0$$

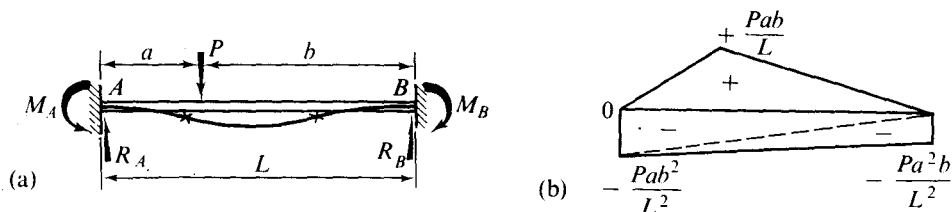
atau

$$M_A = -\frac{w_o L^2}{12}$$

#### CONTOH 12-16

Kerjakan kembali Contoh 12-10 dengan menggunakan metoda luas-momen, Gambar 12-22(a).

\* Juga karena garis singgung pada tengah-tengah bentangan adalah horisontal,  $\Delta\theta_{AC} = 0$  dan  $\Delta\theta_{CB} = 0$ .



Gambar 12-22

## PENYELESAIAN

Dengan memperlakukan balok  $AB$  sebagai balok sederhana, maka diagram momen yang disebabkan oleh  $P$  terlihat di atas garis dasar dalam Gambar 12-22(b). Momen-momen ujung jepit *tidaklah sama besar* dan menghasilkan diagram trapesium. Tiga syarat geometris untuk kurva elastis tersedia untuk memecahkan persoalan ini yang merupakan tak tentu berderajat dua:

- (a)  $\Delta\theta_{AB} = 0$ , karena garis-garis singgung di  $A$  dan  $B$  adalah saling sejajar.
- (b)  $t_{BA} = 0$ , karena tumpuan  $B$  tidak menyimpang dari garis singgung tetap di  $A$ .
- (c) Begitu pula,  $t_{AB} = 0$ .

Setiap dua dari syarat-syarat di atas dapat dipergunakan; pemilihan kedua syarat ini biasanya didasarkan kepada kemudahan dalam hitung menghitung persamaan-persamaan yang dihasilkan. Jadi dengan menggunakan syarat (a) yang selalu paling mudah serta syarat (b), maka kedua persamaan adalah\*

$$\Delta\theta_{AB} = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} L \frac{Pab}{L} + \frac{1}{2} LM_A + \frac{1}{2} LM_B \right) = 0$$

atau 
$$M_A + M_B = -\frac{Pab}{L}$$

$$t_{BA} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} L \frac{Pab}{L} \frac{1}{3} (L+b) + \frac{1}{2} LM_A \frac{2}{3} L + \frac{1}{2} LM_B \frac{1}{3} L \right] = 0$$

atau 
$$2M_A + M_B = -\frac{Pab}{L^2} (L+b)$$

Pemecahan kedua persamaan yang sudah disederhanakan di atas secara bersamaan memberikan

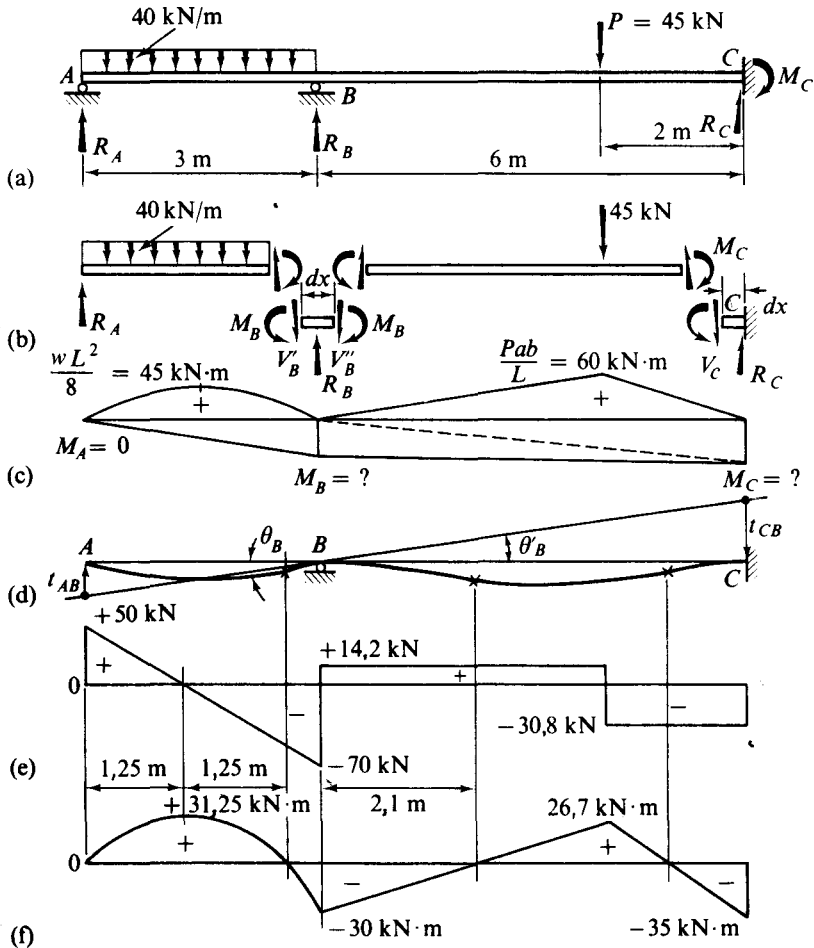
$$M_A = -\frac{Pab^2}{L^2} \quad \text{dan} \quad M_B = -\frac{Pa^2b}{L^2}$$

Hasil-hasil ini sesuai dengan yang terdapat dalam Contoh 12-10, kecuali bahwa tanda-tanda momen menurut kaidah tanda balok. Tanda-tanda ini berasal dari pengambilan  $M_A$  dan  $M_B$  sebagai besaran-besaran yang positif.

## CONTOH 12-17

Plotlah diagram momen dan geser untuk sebuah balok menerus yang dibebani seperti yang terlihat dalam Gambar 12-23(a).  $EI$  adalah konstan untuk seluruh batang.

\* Lihat Tabel 2 dari Lampiran untuk jarak titik berat dari seluruh segitiga.



Gambar 12-23

## PENYELESAIAN

Balok ini adalah statis tak tentu berderajat dua. Dengan memperlakukan masing-masing bentangan sebagai balok sederhana dengan momen-momen lebih, seperti dalam Gambar 12-23(b), maka diperoleh diagram momen pada Gambar 12-23(c). Tidak terdapatnya momen ujung di A adalah karena ujung ini terletak di atas rol. Petunjuk pada penyelesaian ini terkandung dalam dua syarat geometris untuk kurva elastis untuk seluruh balok, Gambar 12-23(d):

- $\theta_B = \theta'_B$ . Karena balok ini secara fisis adalah menerus, maka terdapat sebuah garis pada tumpuan B yang merupakan garis singgung pada kurva elastis dalam *tiap bentangan*.
- $t_{BC} = 0$ , karena tumpuan B tidak menyimpang dari garis singgung tetap di C.

Untuk menggunakan syarat (a), ditentukan dahulu  $t_{AB}$  dan  $t_{CB}$  dan dengan membagi besaran-besaran ini dengan panjang bentangan yang bersangkutan, maka diperoleh dua sudut  $\theta_B$  dan  $\theta'_B$ . Kedua sudut ini adalah sama. Tetapi meskipun  $t_{CB}$  secara aljabar dinyatakan sebagai besaran positif, garis singgung melalui titik  $B$  berada di atas titik  $C$ . Karenanya penyimpangan ini haruslah dipandang negatif. Jadi dengan menggunakan syarat (a), diperoleh sebuah persamaan dengan momen-momen lebih.

$$t_{AB} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{2}{3}(3)(+45) \frac{1}{2}(3) + \frac{1}{2}(3)(+M_B) \frac{2}{3}(3) \right] \\ = \frac{1}{EI} (135 + 3M_B)$$

$$t_{CB} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2}(6)(+60) \frac{1}{3}(6+2) + \frac{1}{2}(6)(+M_B) \frac{2}{3}(6) + \frac{1}{2}(6)(+M_C) \frac{1}{3}(6) \right] \\ = \frac{1}{EI} (480 + 12M_B + 6M_C)$$

Karena  $\theta_B = \theta'_B$ , atau  $\frac{t_{AB}}{L_{AB}} = -\frac{t_{CB}}{L_{CB}}$ ,

$$\frac{1}{EI} \left( \frac{135 + 3M_B}{3} \right) = -\frac{1}{EI} \left( \frac{480 + 12M_B + 6M_C}{6} \right)$$

atau  $3M_B + M_C = -125$

Dengan menggunakan syarat (b) untuk bentangan  $BC$  diperoleh persamaan lain,  $t_{BC} = 0$ , atau

$$\frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2}(6)(+60) \frac{1}{3}(4+6) + \frac{1}{2}(6)(+M_B) \frac{1}{3}(6) + \frac{1}{2}(6)(+M_C) \frac{2}{3}(6) \right] = 0$$

atau  $M_B + 2M_C = -100$

Pemecahan kedua persamaan yang sudah disederhanakan di atas secara bersamaan, mendapatkan

$$M_B = -30 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \text{dan} \quad M_C = -35 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

di mana tanda-tanda sesuai dengan kaedah tanda yang digunakan untuk balok. Momen-momen ini dengan sikap yang tepat dapat dilihat dalam Gambar 12-23(b).

Sesudah momen-momen lebih  $M_A$  dan  $M_B$  didapatkan, tidak diperlukan teknik-teknik baru untuk menggambarkan diagram-diagram momen dan geser. Tetapi kewaspadaan khusus harus diberikan untuk mengikutkan momen-momen pada tumpuan di samping perhitungan gaya-gaya geser dan reaksi. Biasanya, balok-balok yang terpisah seperti yang terlihat dalam Gambar 12-23(b) merupakan benda-benda bebas yang paling menguntungkan untuk menentukan geser. Reaksi-reaksi menyusul dengan menambahkan geseran pada balok-balok yang bersebelahan.

Untuk benda bebas  $AB$ :

$$\sum M_B = 0 \odot +, \quad 40(3)(1,5) - 30 - 3R_A = 0 \quad R_A = 50 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum M_A = 0 \odot +, \quad 40(3)(1,5) + 30 - 3V'_B = 0 \quad V'_B = 70 \text{ kN} \uparrow$$

Untuk benda bebas  $BC$ :

$$\sum M_C = 0 \quad \circlearrowleft +, \quad 45(2) + 30 - 35 - 6V_B'' = 0 \quad V_B'' = 14,2 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum M_B = 0 \quad \circlearrowleft +, \quad 45(4) - 30 + 35 - 6V_C = 0 \quad V_C = R_C = 30,8 \text{ kN} \uparrow$$

Periksa:  $R_A + V_B' = 120 \text{ kN} \uparrow$  dan  $V_B'' + R_C = 45 \text{ kN} \uparrow$

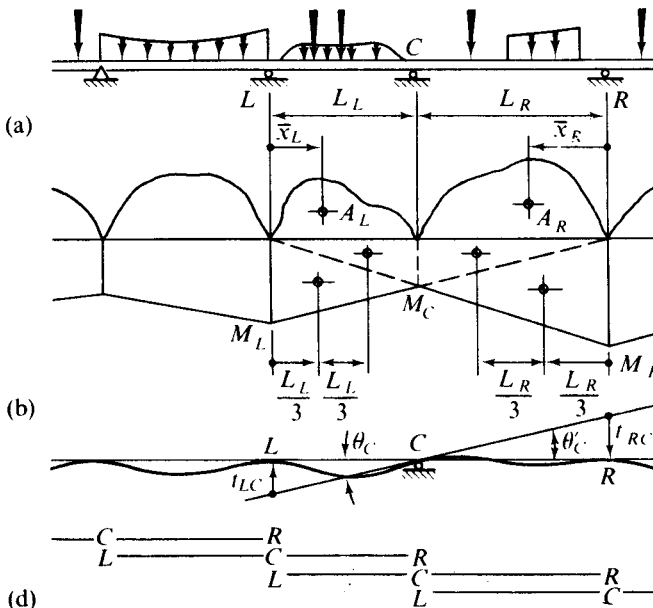
Dari atas,  $R_B = V_B' + V_B'' = 84,2 \text{ kN} \uparrow$ .

Diagram-diagram geser dan momen yang lengkap, masing-masing dapat dilihat dalam Gambar 12-23(e) dan (f).

### \*12-8 PERSAMAAN TIGA MOMEN

Dengan mengembangkan prosedur yang dipergunakan dalam contoh yang baru lalu, suatu rumus berulang (rekurensi), yaitu suatu persamaan yang akan berlaku berulang-ulang untuk *setiap dua bentangan yang berdekatan*, dapat kita turunkan untuk balok-balok menerus. Untuk sejumlah  $n$  bentangan, kita dapat menulis  $n - 1$  persamaan. Ini memberikan persamaan-persamaan simultan yang cukup untuk menyelesaikan momen-momen lebih pada tumpuan-tumpuan. Rumus berulang ini disebut *persamaan tiga-momen* (three-momen equation) karena ada tiga momen yang tidak diketahui muncul di sana.

Tinjaulah sebuah balok menerus, seperti yang terlihat dalam Gambar 12-24(a), yang dihadapkan pada suatu pembebanan transversal. Untuk setiap dua bentangan yang berdekatan, seperti  $LC$  dan  $CR$ , diagram momen lentur yang ditinjau terdiri dari dua



Gambar 12-24 Penurunan persamaan tiga-momen

bagian. Daerah-daerah  $A_L$  dan  $A_R$  yang terletak disebelah kiri dan kanan titik tumpuan tengah  $C$  dalam Gambar 12-24(b), sesuai dengan diagram-diagram momen lentur dalam bentangan yang bersangkutan bila bentangan-bentangan ini diperlakukan sebagai *bertumpuan sederhana*. Diagram-diagram momen ini tergantung seluruhnya pada hakekat gaya yang diketahui yang bekerja dalam tiap bentangan. Bagian lain diagram momen dari bentuk yang diketahui disebabkan oleh momen-momen tidak diketahui  $M_L$  pada tumpuan sebelah kiri,  $M_C$  pada tumpuan tengah dan  $M_R$  pada tumpuan kanan.

Berikutnya, kurva elastis yang terlihat dalam Gambar 12-24(c) harus pula ditinjau. Kurva ini kontinu untuk suatu balok menerus. Jadi sudut-sudut  $\theta_C$  dan  $\theta'_C$  yang dari masing-masing sisi didefinisikan sebagai kemiringan garis singgung yang sama pada kurva elastis di titik  $C$ , adalah sama pula. Dengan menggunakan teorema luas momen yang kedua untuk mendapatkan  $t_{LC}$  dan  $t_{RC}$ , maka sudut-sudut didefinisikan sebagai  $\theta_C = t_{LC}/L_L$  dan  $\theta'_C = -t_{RC}/L_R$ , di mana  $L_L$  dan  $L_R$  masing-masing adalah panjang bentangan sebelah kiri dan kanan titik  $C$ . Tanda negatif sudut yang kedua adalah penting karena garis singgung dari titik  $C$  berada *di atas* tumpuan  $R$ , sedangkan penyimpangan positif  $t_{RC}$  menentukan letak garis singgung di bawah tumpuan yang sama. Jadi, langkah-langkah berikutnya adalah seperti di bawah,

$$\theta_C = \theta'_C \quad \text{atau} \quad \frac{t_{LC}}{L_L} = -\frac{t_{RC}}{L_R}$$

$$\begin{aligned} \text{dan} \quad \frac{1}{L_L} \frac{1}{EI_L} \left( A_L \bar{x}_L + \frac{1}{2} L_L M_L \frac{1}{3} L_L + \frac{1}{2} L_L M_C \frac{2}{3} L_L \right) \\ = -\frac{1}{L_R} \frac{1}{EI_R} \left( A_R \bar{x}_R + \frac{1}{2} L_R M_R \frac{1}{3} L_R + \frac{1}{2} L_R M_C \frac{2}{3} L_R \right) \end{aligned}$$

di mana  $I_L$  dan  $I_R$  adalah momen inersia luas penampang balok, masing-masing pada bentangan sebelah kiri dan kanan. Melalui masing-masing bentangan,  $I_L$  dan  $I_R$  dianggap konstan.\* Besaran-besaran  $\bar{x}_L$  merupakan jarak *dari tumpuan kiri*  $L$  ke titik berat luas  $A_L$ , dan  $\bar{x}_R$  jarak yang serupa untuk  $A_R$  diukur *dari titik tumpuan kanan*  $R$ . Faktor-faktor  $M_L$ ,  $M_C$  dan  $M_R$  menunjukkan momen-momen yang tidak diketahui pada tumpuan-tumpuan.

Dengan menyederhanakan pernyataan di atas, persamaan tiga momen† menjadi

$$L_L M_L + 2 \left( L_L + \frac{I_L}{I_R} L_R \right) M_C + \frac{I_L}{I_R} L_R M_R = -6 A_L \frac{\bar{x}_L}{L_L} - 6 A_R \frac{I_L \bar{x}_R}{I_R L_R} \quad (12-17)$$

Persamaan 12-17 berlaku untuk balok menerus pada tumpuan-tumpuan yang tidak menghasilkan pengaruh dengan  $I$  yang konstan dalam tiap bentangan balok. Dalam persoalan khusus, semua faktor, kecuali momen lebih yang terdapat pada tumpuan, adalah konstan. Sejumlah persamaan simultan yang cukup untuk momen yang tidak diketahui diperoleh dengan berturut-turut memperkirakan tumpuan bentangan yang berdekatan

\* Ungkapan tersebut menjadi berbelit-belit bila  $I$  berubah-ubah dalam salah satu bentangan.

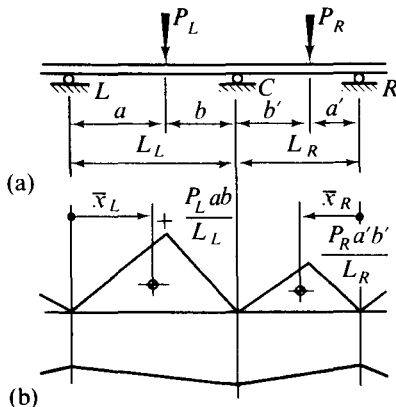
† Persamaan tiga momen mulanya diturunkan oleh E. Clapeyron (seorang insinyur Perancis) dalam tahun 1857, dan kadang-kadang disebut sebagai persamaan Clapeyron.

seperti  $L$ ,  $C$  dan  $R$  seperti yang terlihat dalam Gambar 12-24(d). Tetapi dalam persamaan ini tanda huruf  $M$  haruslah sesuai dengan penandaan tumpuan yang sesungguhnya seperti  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , dan seterusnya. Perhatikan pula bahwa pada ujung-ujung balok yang memakai pasak, momen-momen diketahui nol. Juga bila balok menerus mempunyai balok gantung (overhang), momen pada tumpuan pertama diketahui dari statika. Tumpuan-tumpuan jepit akan dibahas dalam Contoh 12-19. Untuk balok simetris yang dibebani dengan simetris pula, pekerjaan dapat diperingan dengan memperhatikan bahwa momen pada tumpuan yang letaknya simetris adalah sama.

Dalam menurunkan persamaan tiga momen, momen pada tumpuan dianggap positif. Jadi jawab aljabar dari persamaan-persamaan simultan otomatis memberikan tanda momen yang betul menurut kaedah tanda balok.

### \*12-9 KONSTANTA PADA KASUS BEBAN KHUSUS

Sebagai suatu contoh khusus dari perhitungan faktor konstan yang terdapat pada ruas kanan persamaan tiga momen, tinjaulah dua buah bentangan yang berdekatan yang dibebani dengan gaya-gaya terpusat  $P_L$  dan  $P_R$ , Gambar 12-25. Dengan memandang



Gambar 12-25 Menentukan konstanta-konstanta pada ruas kanan persamaan tiga momen untuk pembebanan terpusat

bentangan-bentangan ini sebagai mendapatkan tumpuan sederhana dan berhubung momen maksimum dalam bentangan kiri adalah  $+P_L ab/L_L$  serta  $\bar{x}_L = \frac{1}{3}(L_L + a)$ , maka

$$-6A_L \frac{\bar{x}_L}{L_L} = -6\left(\frac{L_L}{2}\right) \frac{P_L ab}{L_L} \frac{(L_L + a)}{3L_L} = -P_L ab \left(1 + \frac{a}{L_L}\right) \quad (12-18)$$

Begitu pula, dengan mempertukarkan peranan ukuran-ukuran  $a$  dan  $b$  pada bentangan sebelah kanan, yaitu dengan selalu mengukur  $a$  dari tumpuan sebelah luar terhadap gaya, maka

$$-6A_R \frac{I_L}{I_R} \frac{\bar{x}_R}{L_R} = -P_R a' b' \left(1 + \frac{a'}{L_R}\right) \frac{I_L}{I_R} \quad (12-19)$$

Bila ada sejumlah gaya terpusat pada sebuah bentangan, maka pengaruh mereka masing-masing terhadap konstanta di atas dapat diperlakukan secara terpisah. Jadi,

faktor konstan pada ruas kanan persamaan tiga momen yang berlaku untuk sejumlah gaya terpusat dalam bentangan adalah

$$-\sum P_L ab \left(1 + \frac{a}{L_L}\right) - \sum P_R a'b' \left(1 + \frac{a'}{L_R}\right) \frac{I_L}{I_R} \quad (12-20)$$

di mana tanda penjumlahan menandakan kenyataan bahwa suku yang terpisah muncul untuk *setiap gaya terpusat*  $P_L$  pada bentangan sebelah kiri, demikian pula, untuk *setiap gaya*  $P_R$  pada bentangan sebelah kanan. Dalam kedua hal tersebut,  $a$  atau  $a'$  adalah jarak dari *tumpuan luar* kepada gaya terpusat khusus, sedang  $b$  atau  $b'$  adalah jarak kepada gaya tersebut dari *tumpuan tengah*. Bila salah satu dari gaya-gaya ini bekerja ke atas, maka faktor yang bersangkutan dengan konstanta tersebut oleh gaya seperti itu mempunyai tanda yang berlawanan.

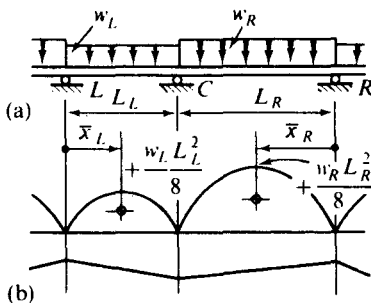
Konstanta pada ruas kanan persamaan tiga-momen, bila sekiranya *beban-beban terdistribusi merata* dipekerjakan pada sebuah balok, ditentukan dengan cara yang sama. Jadi dengan menggunakan diagram yang diperlihatkan dalam Gambar 12-26,

$$-6A_L \frac{\bar{x}_L}{L_L} = -6 \left( \frac{2}{3} L_L \right) \frac{w_L L_L^2}{8} \frac{1}{2} \frac{L_L}{L_L} = -\frac{w_L L_L^3}{4} \quad (12-21)$$

dan dengan cara yang sama,

$$-6A_R \frac{I_L}{I_R} \frac{\bar{x}_R}{L_R} = -\frac{w_R L_R^3}{4} \frac{I_L}{I_R} \quad (12-22)$$

Konstanta-konstanta untuk jenis-jenis yang lain dari pembebanan dapat ditentukan dengan menggunakan prosedur yang sama seperti di atas.



Gambar 12-26 Menentukan konstanta pada ruas kanan persamaan tiga momen untuk beban terdistribusi merata

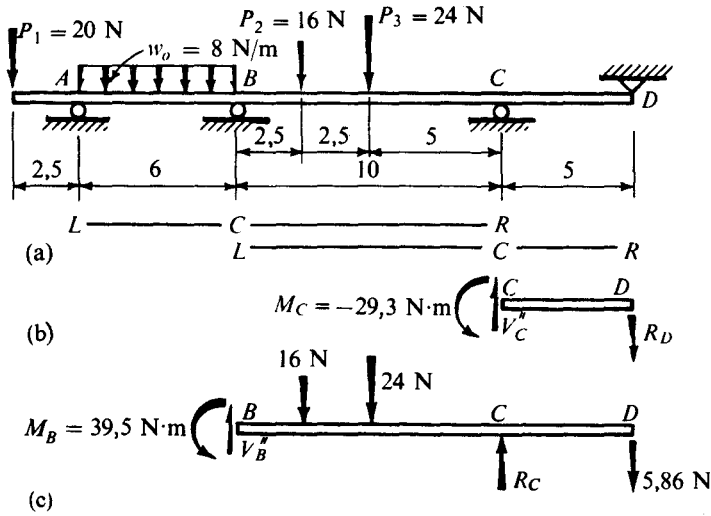
#### CONTOH 12-18

Hitunglah momen-momen pada semua tumpuan dan reaksi-reaksi di  $C$  dan  $D$  untuk balok kontinu yang dibebani seperti yang terlihat dalam Gambar 12-27(a). Kekakuan lentur  $EI$  adalah konstan.

#### PENYELESAIAN

Dengan menggunakan Persamaan 12-17 dan memperlakukan bentangan  $AB$  sebagai bentangan sebelah kiri dan  $BC$  sebagai bentangan kanan, maka kita menuliskan sebuah





(Semua ukuran dalam meter)

Gambar 12-27

persamaan. Dari statika, dan kaidah balok digunakan untuk tanda, maka  $M_A = -20(25) = -50 \text{ N}\cdot\text{m}$ . Persamaan 12-20 dan 12-21 digunakan untuk mendapatkan ruas-ruas kanan. Momen-momen inersia  $I_R$  dan  $I_L$  adalah sama.

$$\begin{aligned}
 6M_A + 2(6 + 10)M_B + 10M_C \\
 = -\frac{8(6)^3}{4} - 16(7,5)(2,5)\left(1 + \frac{7,5}{10}\right) - 24(5)5\left(1 + \frac{5}{10}\right)
 \end{aligned}$$

Substitusikan harga  $M_A = -50 \text{ N}\cdot\text{m}$  dan sederhanakan, diperoleh

$$32M_B + 10M_C = -1557$$

Berikutnya, Persamaan 12-12 dipakai lagi untuk bentangan  $BC$  dan  $CD$ . Tidak ada faktor-faktor konstan yang terdapat dalam ruas kanan persamaan tiga momen oleh bentangan  $CD$  yang tidak dibebani. Pada ujung berpasak,  $M_D = 0$ .

$$\begin{aligned}
 10M_B + 2(10 + 5)M_C + 5M_D \\
 = -16(2,5)(7,5)\left(1 + \frac{2,5}{10}\right) - 24(5)5\left(1 + \frac{5}{10}\right)
 \end{aligned}$$

atau

$$10M_B + 30M_C = -1275$$

Pemecahan persamaan yang sudah dipermudah di atas dengan simultan memberikan

$$M_B = -39,5 \text{ N}\cdot\text{m} \quad \text{dan} \quad M_C = -29,3 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Dengan pemisahan tersendiri bentangan  $CD$  sebagai dalam Gambar 12-27(b), kita mendapatkan reaksi  $R_D$  dari statika. Selain dari pemisahan sendiri bentangan  $BC$  dan

menghitung  $V'_C$  yang ditambahkan pada  $V''_C$  untuk mendapatkan  $R_C$ , sebagai telah dikerjakan dalam Contoh 12-17, maka benda bebas yang terlihat dalam Gambar 12-27(c) dapat pula digunakan. Untuk benda bebas  $CD$ :

$$\sum M_C = 0 \circlearrowleft +, \quad 29,3 - 5R_D = 0, \quad R_D = 5,86 \text{ N} \downarrow$$

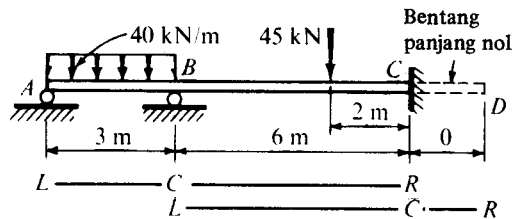
Untuk benda bebas  $BD$ :

$$\sum M_B = 0 \circlearrowleft +,$$

$$16(2,5) + 24(5) - R_C(10) + 5,86(15) - 39,5 = 0, \quad R_C = 20,84 \text{ N}$$

#### CONTOH 12-19

Kerjakanlah kembali Contoh 12-17 dengan menggunakan persamaan tiga-momen, Gambar 12-28.



Gambar 12-28

#### PENYELESAIAN

Tidak ada kesukaran yang dihadapi dalam menetapkan persamaan tiga-momen untuk bentangan  $AB$  dan  $BC$ . Ini dilakukan dengan cara yang serupa dengan yang dilakukan dalam contoh yang lalu. Perhatikan bahwa suatu momen yang tidak diketahui terdapat pada ujung balok yang terpasang dan karena ujung  $A$  berada di atas rol, maka  $M_A = 0$

$$3M_A + 2(3 + 6)M_B + 6M_C = -\frac{(40)(3)^3}{4} - (45)(2)(4)\left(1 + \frac{2}{6}\right)$$

$$18M_B + 6M_C = -750$$

Untuk mengadakan persamaan yang berikut, suatu kecerdikan diperkenalkan. Andaikan sebuah bentangan khayal dengan panjang nol ditambahkan pada ujung jepit, hingga persamaan tiga-momen dapat dibuat dengan cara yang biasa:

$$6M_B + 2(6 + 0)M_C + 0(M_D) = -(45)(4)(2)\left(1 + \frac{4}{6}\right)$$

$$6M_B + 12M_C = -600$$

Pemecahan persamaan-persamaan yang sudah disederhanakan secara simultan memberikan,

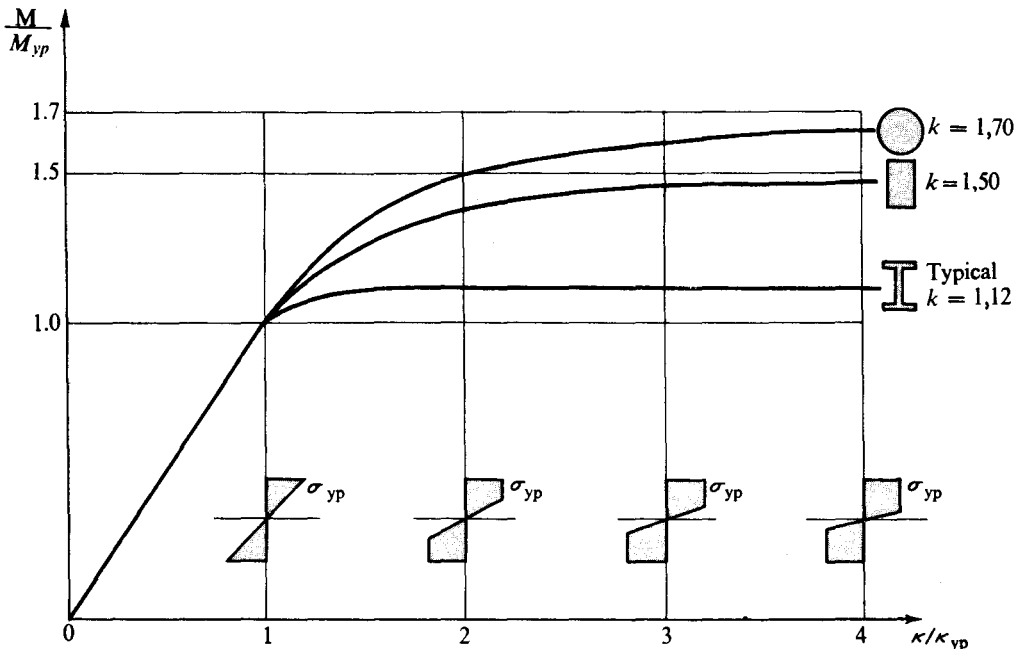
$$M_B = -30 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \text{dan} \quad M_C = -35 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Penyelesaian selanjutnya dari soal ini sama dengan yang sebelum ini.

Penggunaan bentangan panjang nol pada ujung jepit balok dibenarkan oleh prosedur luas momen. Tindakan yang bijaksana ini sepadan dengan syarat penyimpangan nol dari tumpuan yang terdekat dengan ujung jepit dari garis singgung pada ujung jepit. Misalnya bila persamaan yang disederhanakan yang kedua di atas dibagi dengan 6, maka persamaan yang bersangkutan dalam Contoh 12-17 dapat diperoleh; di sana syarat yang lebih akhir dapat dipergunakan langsung.

### \*12-10 ANALISA BATAS BALOK

Contoh-contoh perhitungan beban ultimat atau batas untuk sistem batang berbeban aksial yang terbuat dari bahan elastis-plastis telah diberikan pada permulaan bab ini (lihat Contoh 12-1 dan 12-3). Perlu diperhatikan bahwa dalam soal-soal yang demikian ada tiga tingkat pembebanan. Pertama, ada daerah tanggapan elastis linier (lihat Gambar 12-1(e) dan 12-3(c)). Kemudian satu bagian dari struktur menghasilkan sebagai yang sisa, yang meneruskan untuk berdeformasi dengan elastis. Ini merupakan daerah aliran plastis yang terkandung. Akhirnya, struktur tersebut terus meluluh tanpa kenaikan beban. Pada tingkat ini deformasi plastis dari struktur menjadi tak terbatas.\* Keadaan ini berhubungan dengan beban batas dari struktur.



Gambar 12-29 Hubungan kurva momen untuk penampang-penampang lingkaran, sikuempat dan bentuk I.  $M_p/M_{yp} = k$ , faktor bentuk

Berhubung sifat umum yang sama dialami pula oleh balok elastis-plastis, maka tujuan sekarang adalah mengembangkan suatu prosedur untuk menentukan beban-beban

\* Dalam kenyataan suatu struktur tidak diperbolehkan berdeformasi secara berlebihan.

yp = yield point = titik luluh = titik leleh

batas untuk balok di atas. Dengan melewati babak-babak yang lebih dahulu serta langsung menuju kepada penentuan beban batas, maka prosedur tersebut menjadi relatif sederhana. Untuk latar belakang, beberapa hasil yang telah dibuat sebelumnya akan diperiksa kembali.

Hubungan kurva momen yang khas dari balok elastis-plastis yang mempunyai beberapa penampang yang berbeda terlihat dalam Gambar 12-29. Hasil-hasil seperti ini telah didapatkan dalam Contoh 11-7 untuk balok sikuempat. (Lihat Gambar 11-17). Terutama perhatikanlah kenaikan yang cepat kurva-kurva yang menuju asimptot masing-masing yang sesuai dengan penampang bersangkutan. Ini berarti bahwa segera sesudah kapasitas elastis balok habis, momen yang agak konstan tercapai dan dipertahankan. Keadaan ini sama dengan sendi plastis. Berbeda dengan engsel tanpa gesekan yang mampu menimbulkan perputaran yang besar tanpa ada momen, maka sendi plastis memungkinkan terjadinya putaran yang besar pada momen yang konstan. Momen yang konstan ini kira-kira  $M_p$ , yaitu momen ultimat atau plastis untuk suatu penampang.

Dengan menggunakan sendi plastis, suatu jumlah yang cukup dapat dimasukkan ke dalam sebuah struktur pada titik-titik momen maksimum untuk menghasilkan mekanisme keruntuhan yang dapat diterima secara kinematis. Mekanisme yang demikian, membolehkan gerakan yang tak terbatas dari suatu sistem, yang memungkinkan kita menentukan kapasitas muat ultimat atau batas dari sebuah balok atau kerangka. Pendekatan ini sekarang akan kita lukiskan dalam beberapa contoh, yang membatasi pembicaraan pada balok.

Bila pendekatan analisa batas dipergunakan dalam pemilihan struktur-struktur, maka beban kerja dikalikan dengan faktor beban yang lebih besar dari satu untuk mendapatkan beban batas untuk mana perhitungan-perhitungan dapat dilakukan. Ini serupa dengan penggunaan faktor keamanan pada analisa elastisitas. Dalam pekerjaan baja struktur istilah *disain plastis* biasanya dipakai dalam pendekatan ini.

#### CONTOH 12-20

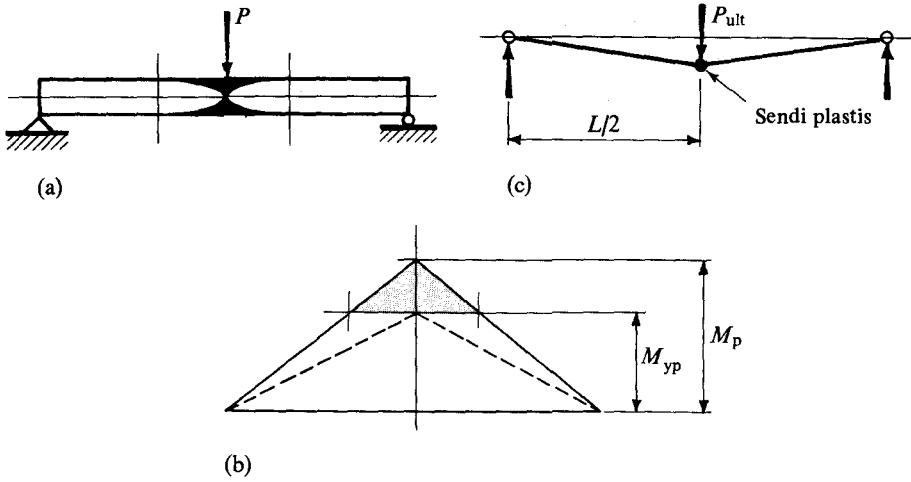
Suatu gaya  $P$  bekerja ditengah-tengah balok yang bertumpuan sederhana, Gambar 12-30(a). Bila balok tersebut terbuat dari bahan liat, berapakah beban batas  $P_{ult}$ ? Abaikanlah berat balok tersebut.

#### PENYELESAIAN

Bentuk diagram momen adalah sama tanpa memperhatikan besar beban. Untuk suatu harga  $P$ , momen maksimum  $M = PL/4$  dan bila  $M \leq M_{yp}$ , maka balok akan bersifat elastis. Sekali  $M_{yp}$  dilewati, peluluhan terkandung dari balok mulai terjadi dan terus sampai mencapai momen plastis maksimum  $M_p$ . Pada saat itu sendi plastis terbentuk di tengah-tengah bentangan membentuk mekanisme keruntuhan yang terlihat dalam Gambar 12-30(c). Dengan membuat momen plastis  $M_p$  sama dengan  $PL/4$  dengan  $P = P_{ult}$  kita mendapatkan hasil yang dicari :

$$P_{ult} = 4M_p/L$$

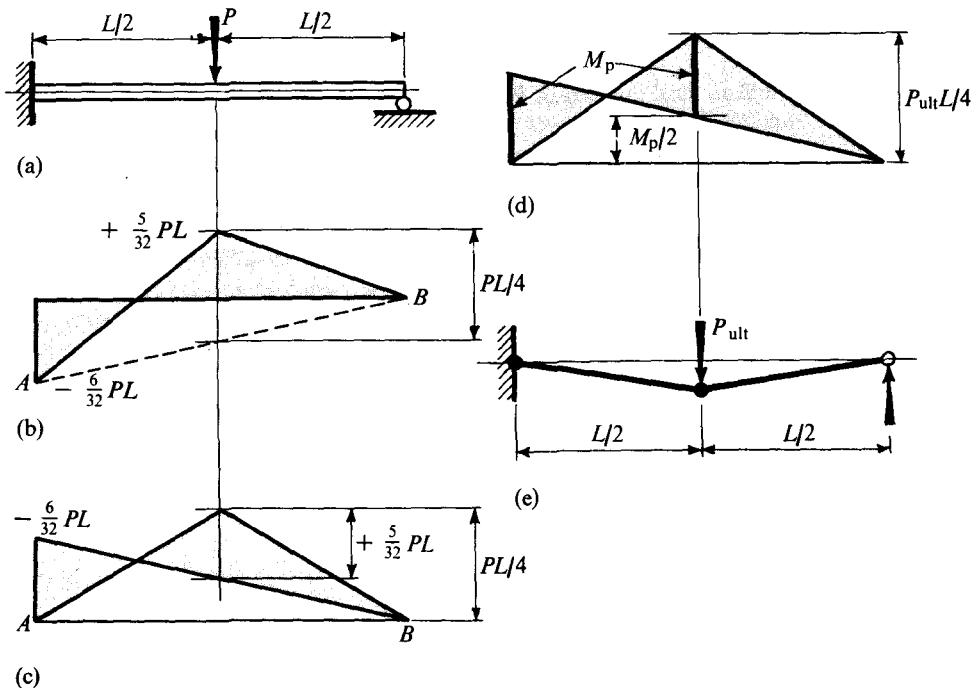
Perhatikan bahwa peninjauan zona plastis yang sesungguhnya yang ditunjukkan oleh daerah gelap dalam Gambar 12-30(a) tidak perlu dalam perhitungan ini.



Gambar 12-30

**CONTOH 12-21**

Sebuah balok pengekan yang terbuat dari bahan liat dibebani seperti yang terlihat dalam Gambar 12-31(a). Hitunglah beban batas  $P_{ult}$ . Abaikanlah berat balok tersebut.



Gambar 12-31

## PENYELESAIAN

Hasil-hasil suatu analisis elastisitas terlihat dalam Gambar 12-31(b) dengan cara yang biasa. Hasil-hasil yang sama diplot kembali dalam Gambar 12-31(c) dari garis alas mendatar  $AB$ . Pada kedua diagram harga ordinat-ordinat momen adalah sama, dan bagian-bagian warna gelap dari diagram menunjukkan hasil-hasil akhir. Perhatikan bahwa ordinat pembantu  $PL/4$  secara tepat mempunyai harga momen maksimum dalam sebuah balok sederhana dengan gaya terpusat di tengah-tengah.

Dengan membuat momen elastis maksimum sama dengan  $M_{yp}$ , kita mendapatkan beban  $P_{yp}$  pada titik luluh:

$$P_{yp} = (16/3)M_{yp}/L$$

Bila beban naik di atas  $P_{yp}$ , maka momen pada ujung terpasang dapat mencapai tetapi tidak melebihi  $M_p$ . Ini juga benar untuk momen di tengah-tengah bentangan dan membatasi syarat yang terlihat dalam Gambar 12-31(d). Rangkaian penyelesaian di mana  $M_p$  terjadi tidaklah penting. Dalam menentukan batas beban adalah penting mendapat hanya mekanisme yang termasuk kinematis. Dengan dua sendi plastis dan sebuah rol di sebelah kanan, syarat ini dapat dipercaya, Gambar 12-31(e).

Dari Gambar 12-31(d) dapat dilihat bahwa dengan perbandingan-perbandingan momen ujung  $M_p$  memberikan ordinat  $M_p/2$  di tengah-tengah bentangan. Karena itu, ordinat balok sederhana  $P_{ult}L/4$  di tengah-tengah bentangan haruslah disamakan dengan  $3M_p/2$  untuk mendapatkan beban batas. Ini memberikan

$$P_{ult} = 6M_p/L$$

Dengan membandingkan hasil ini dengan  $P_{yp}$  kita mempunyai

$$P_{ult} = \frac{9M_p}{8M_{yp}}P_{yp} = \frac{9}{8}kP_{yp}$$

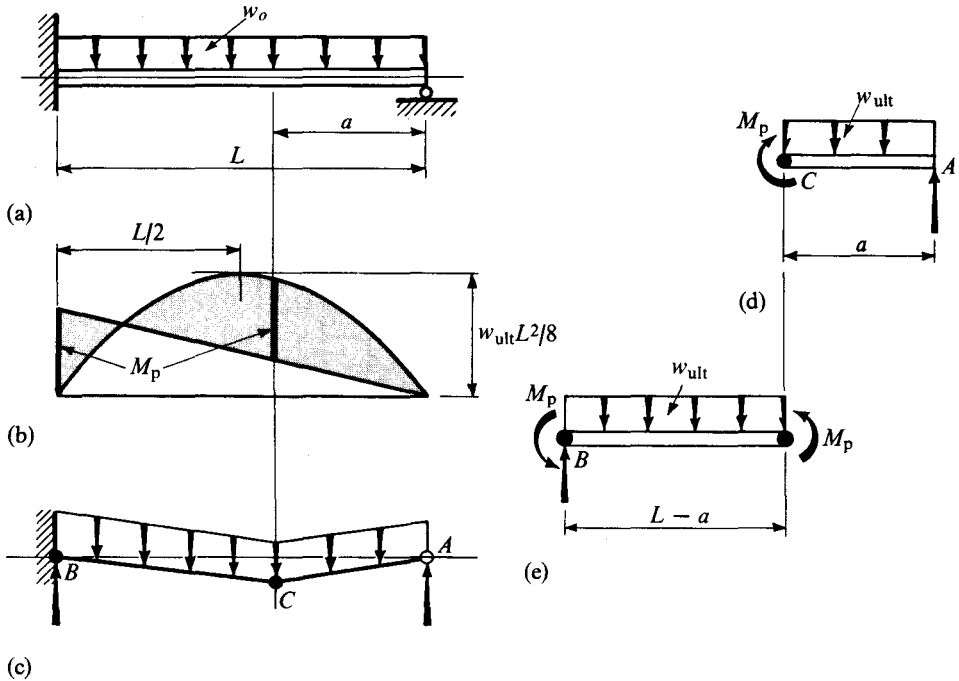
yang memperlihatkan bahwa kenaikan  $P_{ult}$  di atas  $P_{yp}$  dikarenakan oleh dua sebab:  $M_p > M_{yp}$  dan momen maksimum didistribusikan secara lebih menguntungkan dalam keadaan plastis. (Bandingkan dengan diagram-diagram momen dalam Gambar 12-31(c) dan (d)).

## CONTOH 12-22

Sebuah balok pengeang yang terbuat dari bahan liat memuat beban terdistribusi merata seperti yang terlihat dalam Gambar 12-32(a). Hitunglah beban batas  $w_{ult}$ .

## PENYELESAIAN

Dalam soal ini dua sendi plastis dibutuhkan untuk menciptakan mekanisme keruntuhan. Salah satu sendi ini terdapat pada ujung terpasang. Letak sendi yang berhubungan dengan momen maksimum yang lainnya tidak segera diketahui karena momen yang berada didekat pertengahan bentangan berubah secara sangat berangsur-angsur. Tetapi kita dapat menganggap mekanisme tersebut seperti yang terlihat dalam Gambar 12-32(c) karena ini akan sesuai dengan diagram momen Gambar 12-32(b).



Gambar 12-32

Untuk tujuan analisis, balok dengan sendi-sendi plastis dipisahkan ke dalam dua bagian seperti dalam Gambar 12-32(d) dan (e). Kemudian dengan memperhatikan bahwa tidak ada geseran yang mungkin terdapat di C karena ia merupakan titik momen maksimum pada lengkung kontinu, maka kita dapat menuliskan kedua persamaan keseimbangan statika:

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0 \quad \odot +, & M_p - w_{ult}a^2/2 &= 0 \\ \sum M_B &= 0 \quad \odot +, & 2M_p - w_{ult}(L-a)^2/2 &= 0\end{aligned}$$

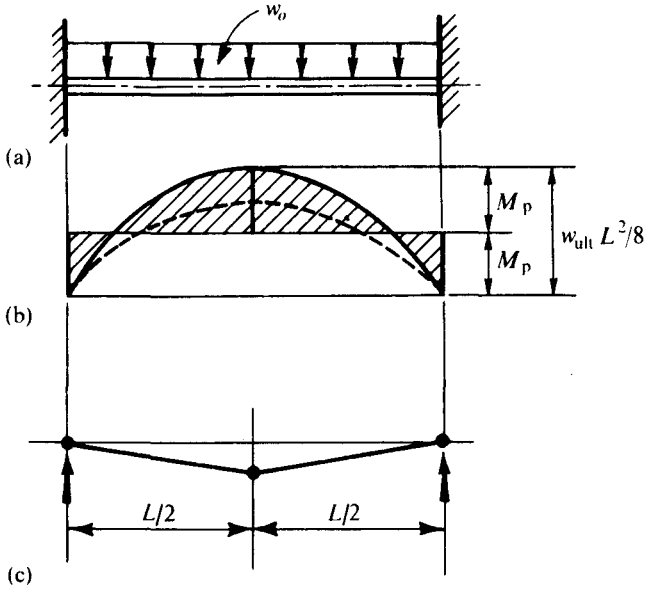
Jawab simultan persamaan-persamaan ini memberikan  $a = (\sqrt{2} - 1)L$  yang menentukan letak sendi plastis C. Persamaan-persamaan yang sama menghasilkan beban batas

$$w_{ult} = 2M_p/a^2 = 2M_p/[(\sqrt{2} - 1)L]^2$$

Dalam persoalan-persoalan dengan beberapa gaya terpusat yang bekerja pada sebuah balok, suatu penyelidikan sendi plastis dalam harus pula dibuat. Beban terkecil untuk sendi dalam yang diandaikan di bawah salah satu beban merupakan jawab dari persoalan. Suatu keseimbangan pada beban yang lebih tinggi membutuhkan momen yang lebih besar dari  $M_p$  dan karenanya tidak mungkin. Untuk menerangkan ini memerlukan beberapa percobaan.

**CONTOH 12-23**

Sebuah balok terjepit dari bahan liat menumpu sebuah beban yang terdistribusi merata, Gambar 12-33(a). Tentukanlah beban batas  $w_{ult}$ .



**Gambar 12-33**

**PENYELESAIAN**

Menurut analisis kekenyalan (lihat Contoh 12-15 dan Gambar 12-21(c)) momen maksimum terjadi pada ujung-ujung yang terpasang dan sama dengan  $w_0 L^2 / 12$ . Karenanya

$$M_{yp} = w_{yp} L^2 / 12 \quad \text{atau} \quad w_{yp} = 12 M_{yp} / L^2$$

Dengan bertambahnya beban, sendi-sendi plastis pun terbentuk pada tumpuan-tumpuan. Mekanisme peruntuhan tidak terbentuk, sampai sebuah sendi plastis terjadi pula di tengah-tengah bentangan, Gambar 12-33(b) dan (c).

Momen maksimum untuk balok yang bertumpuan sederhana dan dibebani merata adalah  $w_0 L^2 / 8$ . Karena itu, seperti dapat dilihat dari Gambar 12-33(b), untuk mendapatkan beban batas pada sebuah balok yang dijepit, besaran ini haruslah disamakan dengan  $2M_p$  dengan  $w_0 = w_{ult}$ . Jadi

$$w_{ult} L^2 / 8 = 2M_p \quad \text{atau} \quad w_{ult} = 16 M_p / L^2$$

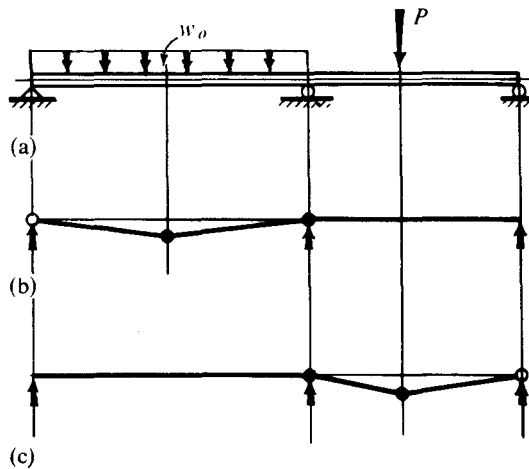
Dengan membandingkan hasil ini dengan  $w_{yp}$ , kita mempunyai

$$w_{ult} = \frac{4M_p}{3M_{yp}} w_{yp} = \frac{4}{3} k w_{yp}$$

Sebagai dalam Contoh 12-21, bertambahnya  $w_{ult}$  atas  $w_{yp}$  tergantung pada faktor bentuk  $k$  dan kesamaan dari momen-momen maksimum.



Analisis balok kontinu telah dilakukan dengan cara yang serupa dengan yang di atas. Biasanya keruntuhan balok-balok yang demikian terjadi setempat (secara lokal) hanya pada salah satu bentangan. Misalnya, untuk balok yang diperlihatkan dalam Gambar 12-34(a), suatu mekanisme dapat terbentuk seperti dalam Gambar 12-34(b) atau 12-34(c), tergantung pada besar beban relatif dan panjang bentangan. Persoalan-persoalan seperti itu kembali kepada kasus yang telah kita tinjau. Mekanisme runtuh setempat untuk bagian dalam dari bentangan membutuhkan susunan tiga sendi yang serupa dengan yang terdapat dalam contoh yang terakhir. Mekanisme untuk kerangka dapat menjadi cukup ruwet; pembahasan mengenai persoalan yang demikian di luar jangkauan buku ini.\*



Gambar 12-34

### \*12-11 KESIMPULAN

Dalam praktek, batang statis tak tentu terjadi dalam berbagai keadaan. Beberapa metoda dalam menelaah batang-batang ini telah dibahas dalam bab ini. Kadang-kadang tegangan yang disebabkan oleh ketaktentuan, terutama yang disebabkan oleh suhu, tidaklah dikehendaki. Dalam banyak hal batang yang dengan sengaja disusun agar menjadi tak tentu seperti batang-batang yang lebih kaku, yang sering lebih dikehendaki dalam banyak kasus. Pengurangan tegangan telah pula dilakukan. Umpamanya, momen lentur maksimum dalam balok tak tentu biasanya lebih kecil daripada momen maksimum pada balok tertentu yang sama. Ini memungkinkan kita memilih batang yang lebih kecil serta menghasilkan ekonomi bahan yang menguntungkan.

Terdapat pula beberapa kerugian dalam menggunakan batang yang tak tentu. Beberapa ketidak-pastian selalu terdapat seperti apakah tumpuan mampu dengan sempurna terjepit di ujung-ujungnya. Demikian pula, tumpuan-tumpuan tersebut dapat diam atau bergerak antara satu sama lainnya. Kemudian tegangan atau defleksi elastis

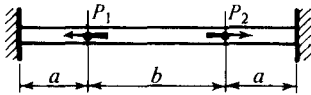
\* Untuk perincian lebih lanjut lihat P.G. Hodge, *Plastic Analysis of Structures*, New York: McGraw-Hill, 1959.

yang dihitung dapat menjadi salah besar. Hal-hal ini kecil terjadi dalam struktur statis tertentu. Akhirnya, metoda analisis kekenyalan menjadi sangat berbelit-belit bila derajat ketakentuan tinggi. Tetapi keadaan ini telah banyak teratasi oleh metoda-metoda khusus dan penggunaan luas komputer-komputer digital.

Untuk keadaan-keadaan di mana beban terpakai mempunyai karakter statis dan bahan yang dikerjakan adalah liat, metoda plastis dalam disain memberikan keuntungan.

### SOAL-SOAL UNTUK DISELESAIKAN

12-1. Hitunglah reaksi-reaksi pada ujung-ujung terpasang tetap untuk sebuah batang elastis yang dibebani seperti yang terlihat dalam gambar dan gambarkan diagram gaya aksial. Luas penampang batang adalah  $1200 \text{ mm}^2$ ,  $a = 150 \text{ mm}$  dan  $b = 300 \text{ mm}$ . Gaya terpakai  $P_1 = 90 \text{ kN}$ , dan  $P_2 = 150 \text{ kN}$ .

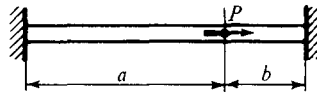


GAMBAR SOAL 12 - 1

12-2. Sebuah batang terpasang tetap pada kedua ujungnya untuk menahan gerak tumpuan-tumpuan seperti dalam soal yang sebelum ini dan mengemban dua gaya  $P_1$  dan  $P_2$  seperti yang terlihat dalam gambar. Besar  $P_2$  dua kali besar  $P_1$ . (a) Anggaplah sifat elastis linier menentukan distribusi reaksi dan gaya aksial dalam batang. Plot diagram-diagram gaya aksial dan deformasi aksial. (b) Bila  $\sigma_{yp} = 400 \text{ MN/m}^2$ , tentukanlah daerah aliran plastis yang terkandung. Plot suatu diagram yang memperlihatkan variasi besar gaya  $P_2$  sebagai fungsi dari pergeserannya. Ambil luas penampang batang  $400 \text{ mm}^2$ , dan  $E = 200,000 \text{ MN/m}^2$ . Untuk kedua kasus  $b = 2a$ . *Jawab:* (a)  $-P_1/4$  di sebelah kiri.

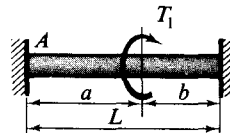
12-3. Suatu bahan memiliki hubungan tegangan-regangan yang tidak linier diberikan sebagai  $\sigma = K\epsilon^n$ , di mana  $K$  dan  $n$  adalah konstanta-konstanta bahan. Bila sebuah batang yang terbuat dari bahan ini dan dengan luas yang tetap  $A$  yang semula dijepit pada kedua ujungnya dan kemudian dibebani seperti yang terlihat dalam gambar, berapakah gaya terpakai yang da-

pat dimuat oleh tumpuan sebelah kiri? *Jawab:*  $P/[(a/b)^n + 1]$ .



GAMBAR SOAL 12 - 3

12-4. Sebuah poros melingkar elastis yang luas penampangnya tetap mendapatkan momen puntir  $T_1$  seperti yang terlihat dalam gambar. Bila kedua ujung poros terpasang tetap, berapakah momen-momen puntir yang memberikan perlawanan pada tiap ujung? *Jawab:*  $T_A = T_1 b/L$ .



GAMBAR SOAL 12 - 4

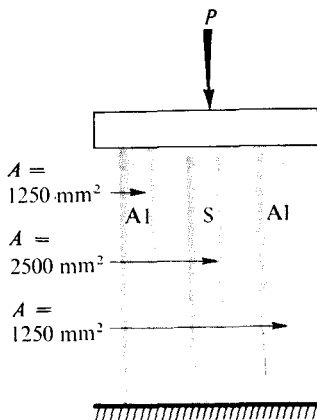
12-5. Sebuah batang bundar yang luas penampangnya konstan terpasang tetap pada kedua ujungnya dan dihadapkan kepada momen puntir  $T_1$  seperti yang terlihat dalam gambar soal sebelum ini. (A) Dengan menganggap bahan bersifat elastis linier, tentukanlah reaksi-reaksi. Plot diagram-diagram momen puntir  $T(x)$  dan sudut pelintir  $\phi(x)$ . (b) Bila batang ini berdiameter  $50 \text{ mm}$ ,  $a = 750 \text{ mm}$  dan  $b = 500 \text{ mm}$ , tentukanlah dan plotlah hubungan antara sudut pelintir  $\phi$  pada  $x = 750 \text{ mm}$  dan momen puntir terpakai  $T_1$ . Gambarkan diagram ini serupa dengan yang diperlihatkan dalam Gambar 12-1(e). Anggaplah bahan tersebut elastis-plastis sempurna dengan  $\tau_{yp} = 130 \text{ MPa}$  dan  $G = 80 \text{ GPa}$ .

12-6. Sebuah massa 1,02 Mg harus diangkat dengan perantara dua batang, masing-masing panjangnya hampir 3 m seperti yang terlihat dalam gambar. Sebuah batang terbuat dari baja ( $E = 200.000 \text{ MN/m}^2$ ), yang sebuah lagi terbuat dari aluminium ( $E = 70.000 \text{ MN/m}^2$ ). Tiap batang mempunyai luas penampang  $120 \text{ mm}^2$ . Batang mana yang harus dibuat lebih pendek dan berapa besarnya agar beban dapat terdistribusi secara sama antara mereka? Anggaph kedua batang bersifat elastis.



GAMBAR SOAL 12 – 6

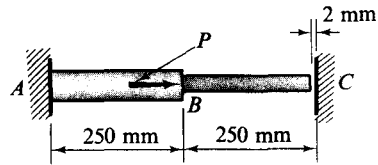
12-7. Sebuah panggung tegar terletak di atas dua batang aluminium ( $E = 70 \text{ GPa}$ ) masing-masing panjangnya  $250,00 \text{ mm}$ . Batang yang ketiga terbuat dari baja ( $E = 200 \text{ GPa}$ ) dan berdiri di tengah mempunyai panjang  $249,90 \text{ mm}$ . (a) Berapakah, tegangan pada batang baja bila sebuah beban  $P$  dari  $500 \text{ kN}$  bekerja pada panggung tersebut? (b) Berapakah besar kedua batang aluminium diperpendek?



GAMBAR SOAL 12 – 7

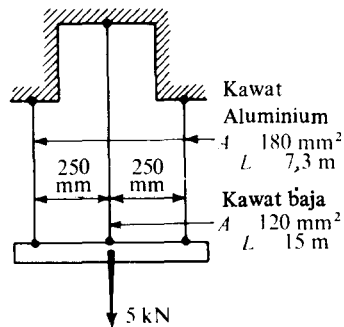
12-8. Sebuah batang terjepit di  $A$  dan dibebani dengan sebuah gaya aksial  $P$  seperti yang terlihat dalam gambar. Bahan adalah elastis dan plastis sempurna dengan  $E = 200 \text{ GPa}$  dan

tegangan luluh dari  $200 \text{ MPa}$ . Sebelum pembebanan, sebuah ruang antara (gap) dari  $2 \text{ mm}$  terdapat antara ujung batang dan tumpuan jepit  $C$ . Plot diagram beban-pergeseran untuk titik beban dengan menganggap  $P$  bertambah dari nol sampai harga ultimatnya untuk batang tersebut. Luas penampang dari  $A$  ke  $B$  adalah  $200 \text{ mm}^2$ , sedang yang dari  $B$  ke  $C$  adalah  $100 \text{ mm}^2$ .



GAMBAR SOAL 12 – 8

12-9. Bila sebuah beban  $5 \text{ kN}$  dipekerjakan kepada sebuah batang tegar yang tergantung melalui tiga kawat seperti yang terlihat dalam gambar, berapakah gaya yang akan ditahan oleh masing-masing kawat? Kawat-kawat yang sebelah luar adalah aluminium ( $E = 70 \text{ GPa}$ ). Kawat sebelah dalam adalah baja ( $E = 200 \text{ GPa}$ ) Semula tidak ada kekenduran dalam kawat.

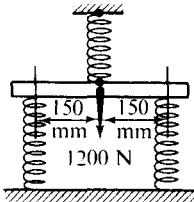


GAMBAR SOAL 12 – 9

12-10. Bila batang dalam Soal 12-9 tidak kaku tetapi mempunyai  $I = 90 \times 10^3 \text{ mm}^4$  dan dari baja dengan  $E = 200 \text{ GPa}$ , berapakah gaya-gaya yang akan terbentuk pada masing-masing kawat?

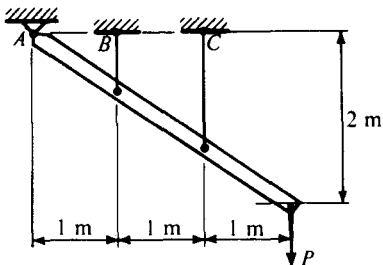
12-11. Tiga buah pegas dan sebuah batang yang melentur dipasang tersusun seperti yang terlihat dalam gambar. Bila sebuah beban dari  $1200 \text{ N}$  diberikan kepada batang tersebut, bagaimana

distribusinya antara pegas-pegas? Pegas atas mempunyai tetapan pegas 20 kN/mm, sedang pegas-pegas bawah masing-masing mempunyai tetapan pegas 10 kN/mm. Harga  $EI$  dari batang adalah  $11,25 \times 10^6$  kN·mm<sup>2</sup>. *Jawab:* 800 N untuk pegas tengah.



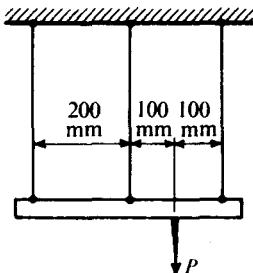
GAMBAR SOAL 12 – 11

12-12. Sebuah batang tegar ditumpu oleh sebuah pasak di  $A$  dan dua buah kawat yang elastis linier di  $B$  dan  $C$  seperti yang terlihat dalam gambar. Luas kawat di  $B$  adalah 60 mm<sup>2</sup> dan untuk yang di  $C$  adalah 120 mm<sup>2</sup>. Tentukanlah reaksi-reaksi di  $A$ ,  $B$  dan  $C$  yang disebabkan oleh beban terpakai  $P = 6$  kN. *Jawab:* 4,8 kN.



GAMBAR SOAL 12 – 12

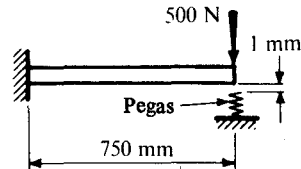
12-13. Sebuah beban  $P = 1$  kN bekerja pada sebuah batang tegar yang tergantung oleh tiga



GAMBAR SOAL 12 – 13

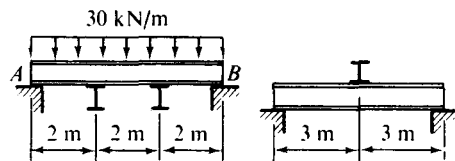
utas kawat seperti yang terlihat dalam gambar. Semua kawat mempunyai ukuran yang sama dari bahan yang sama pula. Untuk tiap kawat  $A = 80$  mm<sup>2</sup>,  $E = 200$  GPa dan  $L = 4$  m. Bila pada mulanya tidak terdapat kekenduran dalam kawat-kawat tersebut, bagaimana distribusi beban terpakai antara kawat-kawat tersebut? *Jawab:* 83,3 N; 333,3 N; 583,3 N.

12-14. Sebuah balok kantilever 750 mm dengan kekakuan lentur yang konstan  $EI = 10^{10}$  N·mm<sup>2</sup>, mula-mulanya mempunyai sela sebesar 1 mm antara ujungnya dengan pegas. Tetapan pegas  $k = 2$  kN/mm. Bila gaya 500 N, seperti yang terlihat dalam gambar, diberikan pada ujung kantilever ini, berapakah besar dari gaya tersebut yang dapat diterima oleh pegas?



GAMBAR SOAL 12 – 14

12-15. Sebuah balok W 200 × 25 mempunyai tumpuan sederhana pada ujung-ujung  $A$  dan  $B$  dan melintasi tengah-tengah dua buah balok W 200 × 25 yang menyilang balok di atas seperti yang terlihat dalam gambar. Ketika dipasang, balok-balok yang menyilang baru menyentuh balok  $AB$ . Berapakah reaksi-reaksi pada  $A$  dan  $B$  bila beban terdistribusi merata dari 30 kN/m diberikan pada balok atas.  $E = 200$  GPa.

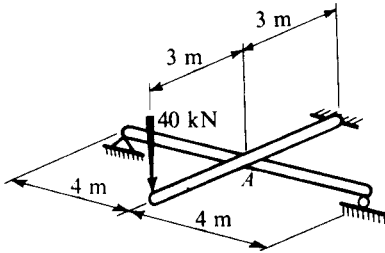


GAMBAR SOAL 12 – 15

12-16. Dua buah balok yang identik, mendatar dan mempunyai tumpuan sederhana masing-masing mempunyai bentangan 3,6 m. Balok-balok tersebut saling menyilang sesamanya dengan sudut antara masing-masing bentangan se-

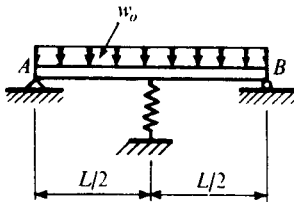
besar  $90^\circ$ . Bila dipasang, terdapat sela antara sebesar 6 mm antara kedua balok. Bila suatu gaya terpusat ke bawah sebesar 50 kN diberikan kepada tengah-tengah balok atas, berapa besar gaya yang akan dibawa oleh balok bawah?  $EI$  masing-masing balok adalah  $6000 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$ .

**12-17.** Titik tengah sebuah kantilever panjangnya 6 m terletak di atas pertengahan balok yang panjangnya 8 m, ditumpu secara sederhana. Tentukanlah defleksi titik  $A$  yang merupakan titik temu balok, yang disebabkan oleh pemakaian sebuah beban 40 kN pada ujung balok kantilever. Nyatakan jawab tersebut dalam bentuk  $EI$  yang sama dan konstan untuk kedua balok tersebut.



GAMBAR SOAL 12 - 17

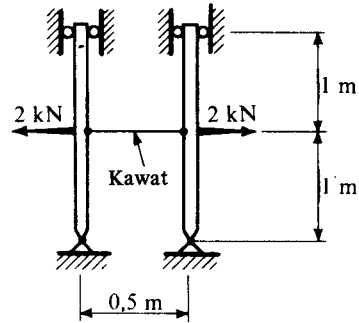
**12-18.** Balok  $AB$  dalam keadaan tidak dibebani baru menyentuh sebuah pegas yang berada di tengah bentangannya seperti yang terlihat dalam gambar. Berapakah kekakuan pegas  $k$  yang akan membuat gaya-gaya pada semua tumpuan menjadi sama besar untuk sebuah beban vertikal yang terdistribusi merata  $w_0$ ? Gunakanlah Tabel 11 Lampiran. *Jawab:*  $384 EI/(7L^3)$ .



GAMBAR SOAL 12 - 18

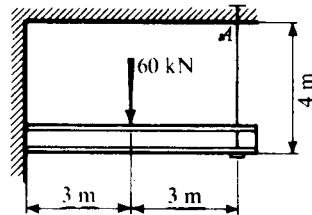
**12-19.** Dua balok tegak yang masing-masing panjangnya 2 m dihubungkan pada tengah-tengah bentangannya oleh sebuah kawat yang diregangkan seperti yang terlihat dalam gambar.  $EI$  untuk balok yang sebelah kiri adalah 50

$\text{kN}\cdot\text{m}^2$ . Sedang untuk balok yang sebelah kanan adalah  $150 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$ . Luas penampang kawat adalah  $65 \text{ mm}^2$  sedang harga  $E$ -nya adalah  $70 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ . Tentukanlah tegangan dalam kawat tersebut setelah dua buah gaya sebesar 2 kN diberikan kepada masing-masing balok tepat di tengah-tengah. Gunakanlah rumus defleksi balok yang terdapat dalam Tabel 11 Lampiran. *Jawab:*  $30 \text{ MN/m}^2$ .



GAMBAR SOAL 12 - 19

**12-20.** Ujung sebuah balok  $W 460 \times 70$  dicor ke dalam beton. Dikehendaki pula untuk menahan ujung yang satu lagi dengan sebuah batang baja  $500 \text{ mm}^2$  panjang 4 m seperti yang terlihat dalam gambar. Selama pemasangan, biarpun, mur pada batang tersebut dieratkan kurang baik dan dalam keadaan tanpa beban terdapat sel antara sebesar 10 mm antara atas mur dan bawah balok. Berapakah gaya tarik yang terbentuk dalam batang tersebut yang disebabkan oleh gaya 60 kN yang bekerja pada tengah-tengah balok? Ambillah  $E = 200 \text{ GPa}$ .

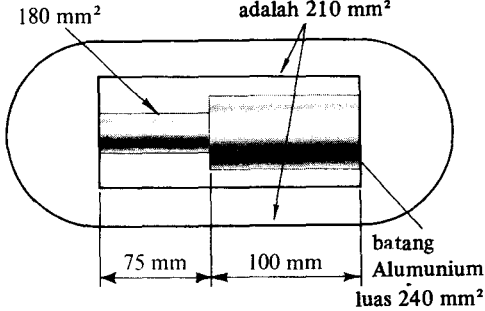


GAMBAR SOAL 12 - 20

**12-21.** Sebuah batang aluminium yang panjangnya 175 mm, mempunyai dua luas penampang yang berbeda dimasukkan ke dalam sebuah batang penghubung dari baja seperti yang terlihat dalam gambar. Bila pada suhu  $15^\circ\text{C}$  ti-

dak ada gaya aksial yang terdapat dalam batang aluminium, berapakah besar gaya ini bila suhu naik menjadi  $65^\circ\text{C}$ ?  $E_a = 70 \text{ GPa}$  dan  $\alpha_a = 22 \times 10^{-6}$  per  $^\circ\text{C}$ ;  $E_s = 200 \text{ GPa}$  dan  $\alpha_s = 12 \times 10^{-6}$  per  $^\circ\text{C}$ .

Baja penghubung – luas tiap batang sejajar dengan batang Al adalah  $210 \text{ mm}^2$



GAMBAR SOAL 12 – 21

12-22. Bila batang dari Soal 12-1, sebagai tambahan pada pemakaian gaya-gaya  $P_1$  dan  $P_2$ , mengalami penurunan suhu sebesar  $50^\circ\text{C}$ , berapakah reaksi pada sebelah kanan? Ambil  $\alpha = 12 \times 10^{-6}$  per  $^\circ\text{C}$ , dan  $E = 200 \text{ GPa}$ .

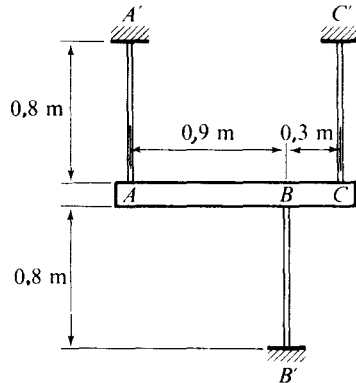
12-23. Bila pada Contoh 12-6, sebagai pengganti baut, sebuah paku keling tanpa tarikan awal pada  $870^\circ\text{C}$  digunakan dalam pemasangan cincin, berapa tegangan tarik yang akan terbentuk dalam paku keling tersebut bila suhu turun menjadi  $70^\circ\text{C}$ ? Ambil  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $\sigma_{yp} = 275 \text{ MPa}$  dan  $\alpha = 12 \times 10^{-6}$  per  $^\circ\text{C}$ .

12-24. Tentukanlah apakah bejana tekan kecil dari Soal 9-36 dapat bekerja memuaskan pada tekanan dalam dari  $700 \text{ kPa}$ . Di sini kesimpulan ini hanya didasarkan kepada sifat-sifat baut. Untuk maksud ini anggaplah bahwa masing-masing dari 20 baut tersebut mempunyai luas penampang  $200 \text{ mm}^2$  pada kaki ulir sekrup yang digunakan. Tegangan ijin tarik dari baut yang sedang ditinjau agar memuaskan adalah  $200 \text{ MN/m}^2$ ; akan tetapi pada kaki sekrup baut tersebut suatu faktor konsentrasi tegangan sebesar 2,5 dipandang perlu. Lebih lagi, untuk dapat bekerja di bawah tekanan, baut-baut akan dipererat membentuk suatu gaya awal sebesar  $8 \text{ kN}$  untuk masing-masingnya. *Jawab:*  $164 \text{ MPa}$ .

12-25. Sebuah baut besi cor kelabu berdiameter  $20 \text{ mm}$  melalui sebuah tabung alumuni-

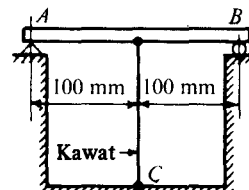
um yang panjangnya  $75,0 \text{ mm}$  yang mempunyai diameter dalam  $25 \text{ mm}$  dan diameter luar  $50 \text{ mm}$ . Mur pada ujung baut-baut terlalu ketat hingga pada  $15^\circ\text{C}$  tegangan dalam tabung menjadi  $4 \text{ MPa}$ . Hitunglah suhu di mana tegangan dalam tangkai baut berlipat dua. Ambil  $E_{CI}$  besi cor  $= 80 \text{ GPa}$  dan  $\alpha_{CI} = 0,00011$  per  $^\circ\text{C}$ , dan  $E_{Al} = 70 \text{ GPa}$  dan  $\alpha_{Al} = 0,00022$  per  $^\circ\text{C}$ .

12-26. Sebuah batang tegar,  $ABC$  tertumpu oleh tiga buah batang tarik seperti yang terlihat dalam gambar. Batang  $BB'$  dan  $CC'$  mendapat penurunan suhu sebesar  $50^\circ\text{C}$ . Tentukanlah gaya yang terjadi dalam batang  $CC'$ . Untuk masing-masing batang tarik  $A = 1200 \text{ mm}^2$ ,  $E = 80.000.000 \text{ kN/m}^2$ , dan  $\alpha = 0,000010$  per  $^\circ\text{C}$ .



GAMBAR SOAL 12 – 26

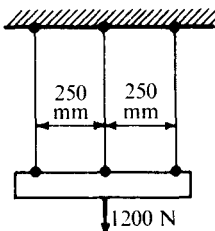
12-27. Sebuah kawat piano baja panjang  $750 \text{ mm}$  diregangkan dari tengah-tengah sebuah batang aluminium  $AB$  kepada sebuah tumpuan tegar  $C$  seperti yang terlihat dalam gambar. Berapakah bertambahnya tegangan dalam kawat bila suhu turun  $50^\circ\text{C}$ ? Lihat Tabel 11 dalam Lampiran untuk rumus defleksi balok. Luas penampang kawat adalah  $0,060 \text{ mm}^2$ ;  $E = 200$



GAMBAR SOAL 12 – 27

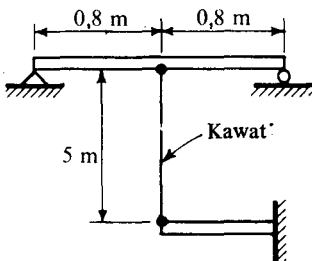
GPa. Untuk balok aluminium  $EI = 3000 \text{ kN}\cdot\text{mm}^2$ . Ambillah  $\alpha_s = 12 \times 10^{-6}$  per  $^{\circ}\text{C}$ ,  $\alpha_a = 23 \times 10^{-6}$  per  $^{\circ}\text{C}$ .

12-28. Tiga buah kawat baja yang dipasangkan pada sebuah batang tegar mendapat beban sebesar 1200 N. Mula-mula beban ini didistribusikan secara sama diantara ketiga kawat. Berapakah masing-masing kawat tersebut akan mendapat gaya bila suhu kawat yang kanan naik  $40^{\circ}\text{C}$ ? Anggaplah untuk semua kawat  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $A = 10 \text{ mm}^2$  dan  $\alpha = 12 \times 10^{-6}$  per  $^{\circ}\text{C}$ .  
Jawab: 240 N, 720 N, 240 N.



GAMBAR SOAL 12 – 28

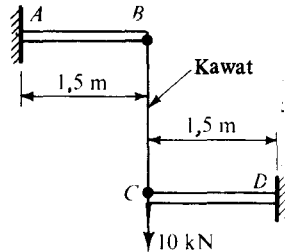
12-29. Sebuah kawat baja yang panjangnya 5 m dan luas penampang  $160 \text{ mm}^2$  dengan erat diregangkan antara pertengahan balok sederhana dan ujung bebas kantilever seperti yang terlihat dalam gambar. Tentukanlah defleksi dari ujung bebas kantilever sebagai akibat penurunan suhu  $50^{\circ}\text{C}$ . Untuk kawat baja:  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $\alpha = 12 \times 10^{-6}$  per  $^{\circ}\text{C}$ . Untuk kedua balok:  $I = 10 \times 10^{-6} \text{ m}^4$  dan  $E = 10 \text{ GPa}$ .



GAMBAR SOAL 12 – 29

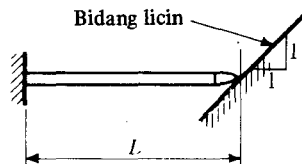
12-30. Dua buah balok kantilever baja  $AB$  dan  $CD$  dihubungkan oleh sebuah kawat baja tegang  $BC$  yang mempunyai panjang 4 m di bawah keadaan awal tanpa beban, lihat gambar. Tentukanlah tegangan yang dihasilkan dalam

kawat tersebut oleh sebuah beban 10 kN yang bekerja pada  $C$  beserta penurunan suhu sebesar  $50^{\circ}\text{C}$ , hanya dalam kawat saja. Untuk balok-balok  $AB$  dan  $CD$ :  $E = 200 \text{ GPa}$ , dan  $I = 10 \times 10^6 \text{ mm}^4$ . Untuk kawat  $BC$ :  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $A = 60 \text{ mm}^2$  dan  $\alpha = 12 \times 10^{-6}$  per  $^{\circ}\text{C}$ .



GAMBAR SOAL 12 – 30

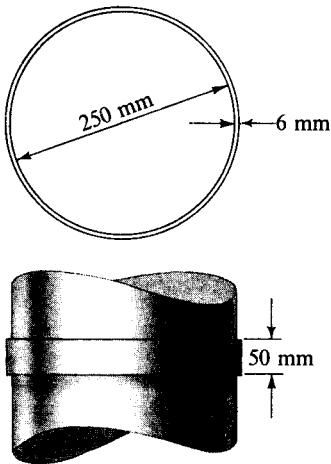
12-31. Pada suatu suhu tertentu sebuah kantilever elastis hanya terletak begitu saja terhadap bidang tanpa gesekan seperti yang terlihat dalam gambar. Hitunglah momen lentur maksimum dalam balok tersebut bila suhu balok tersebut naik  $\delta T$ . Abaikanlah berat dari balok dan pengaruh gaya aksial pada defleksi lenturan. Besaran-besaran  $A$ ,  $E$ ,  $I$  dan  $\alpha$  diketahui. Jawab:  $\alpha L \delta T / [1/(AE) + L^2/(3EI)]$ .



GAMBAR SOAL 12 – 31

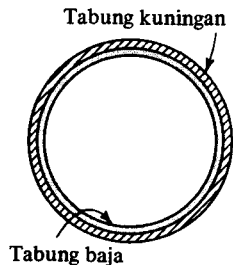
12-32. Sebuah batang bujursangkar stainless steel 30 mm yang panjangnya 1 m terletak antara dua permukaan tanpa gesekan yang sejajar. Bila satu sisi dari batang ini yang semula lurus dipertahankan pada suatu suhu yang  $250^{\circ}\text{C}$  lebih tinggi dari sisi yang berlawanan, berapakah defleksi batang tersebut pada titik tengah batang dari tali yang menghubungkan ujung-ujung? Berapakah besar momen-momen yang bekerja pada ujung-ujung untuk meluruskan kembali batang tersebut? Anggaplah bahwa suhu berubah-ubah dengan linier melintasi tebal batang. Ambillah  $\alpha = 20 \times 10^{-6}$  per  $^{\circ}\text{C}$ , dan  $E = 180 \text{ GPa}$ .

12-33. Sebuah cincin tipis dipanaskan dalam minyak pada suhu  $150^{\circ}\text{C}$  di atas suhu kamar. Dalam keadaan ini cincin tersebut pas masuk ke dalam sebuah silinder padat seperti yang terlihat dalam gambar. Dengan menganggap bahwa silinder benar-benar kaku, (a) tentukanlah tegangan keliling yang terbentuk dalam cincin sesudah didinginkan, dan (b) tentukanlah berapa tekanan dukung yang terbentuk antara cincin dan silinder. Ambil  $\alpha = 2 \times 10^{-5}$  per  $^{\circ}\text{C}$ , dan  $E = 7 \times 10^7$  kN/m<sup>2</sup>.



GAMBAR SOAL 12 – 33

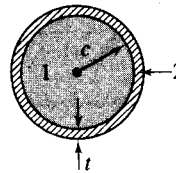
12-34. Sebuah bejana tekan silindris dibuat dengan melengkungkan sebuah pelat kuningan di atas pelat baja tuang. Kedua silinder mempunyai tebal dinding 6 mm. Diameter nominal bejana adalah 750 mm dan digunakan dalam semua perhitungan yang menyangkut diameter. Bila silinder kuningan dipanaskan  $50^{\circ}\text{C}$  di atas suhu kamar, ia pas sekali menyelubungi silinder baja yang berada pada suhu kamar. Berapakah



GAMBAR SOAL 12 – 34

tegangan dalam silinder kuningan bila bejana gabungan tersebut menjadi dingin sampai suhu kamar? Untuk kuningan  $E_b = 110$  GPa, dan  $\alpha_b = 19 \times 10^{-6}$  per  $^{\circ}\text{C}$ . Untuk baja,  $E_s = 200$  GPa dan  $\alpha_s = 12 \times 10^{-6}$  per  $^{\circ}\text{C}$ .

\*12-35. Sebuah batang melingkar dari bahan elastis 1 dikenakan pada suatu deformasi puntiran kecil sebesar  $\theta$  radian per meter. Kemudian dengan suatu pengolahan khusus, sebuah lapisan bahan pembaju elastis 2 ditempatkan pada permukaan batang tadi. Sesudah dipindahkan dari pengolahan dan pengeringan, momen puntir awal dilepaskan. Berapakah deformasi puntiran yang akan terjadi dari batang susunan tersebut, dalam bentuk sudut  $\theta$ , bila momen puntir dilepaskan? Anggaplah  $G_2 = 10 G_1$ ,  $t/c = \frac{1}{40}$ . Jawab:  $\theta/2$ .

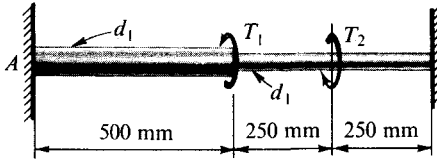


GAMBAR SOAL 12 – 35

\*12-36. Sebuah tabung dengan tebal dinding 2 mm dan jari-jari 25 mm dipasang pada ujung-ujungnya dengan perantara flens kaku dengan sebuah poros padat berdiameter 25 mm seperti yang terlihat dalam Gambar Soal 3-25. (a) Sebelum pengelasan, poros tersebut dikenakan pada sebuah momen puntir sebesar 200 N·m, dan keadaan ini dipertahankan selama pengerjaan pengelasan. Bila kedua tabung dan poros tersebut dibuat dari baja, berapakah besar momen puntir yang akan dialami tabung tersebut bila momen puntir awal sebesar 200 N·m dilepaskan setelah pengelasan selesai? (b) Sama seperti (a) kecuali tabung terbuat dari aluminium sedang poros tetap dari baja. (c) Berapakah besar momen puntir tambahan harus diberikan berlawanan dengan arah momen puntir 200 N·m yang semula supaya tabung aluminium dari (b) tepat akan meluluh? Pada saat ini berapakah sudut pelintir dalam tabung aluminium tersebut yang panjangnya 500 mm?  $G_{st} = 84000$  MN/m<sup>2</sup>;  $G_{Al} = 28000$  MN/m<sup>2</sup>; untuk aluminium  $\tau_{yp} = 150$  MN/m<sup>2</sup>.



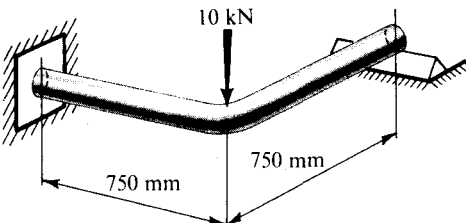
12-37. Sebuah poros melingkar padat kuningan dipasang tetap pada kedua ujungnya dan dua momen puntir,  $T_1 = 31,4 \text{ N}\cdot\text{m}$  dan  $T_2 = 62,8 \text{ N}\cdot\text{m}$  bekerja padanya seperti yang terlihat dalam gambar. Tentukanlah momen puntir pada  $A$  dan plot diagram-diagram momen puntir dan sudut pelintir. Anggaplah bahwa bahan bersifat elastis linier dengan  $G = 40 \text{ GPa}$ . Diameter  $d_1 = 80 \text{ mm}$  dan  $d_2 = 67,3 \text{ mm}$ .



GAMBAR SOAL 12 – 37

12-38. Andaikan bahwa dalam Contoh 12-3 luas penampang tiap batang adalah  $1200 \text{ mm}^2$ , jarak  $L = 2,5 \text{ m}$ , dan  $\alpha = 30^\circ$ . Batang-batang tersebut dibuat dari baja dengan suatu tegangan luluh tertentu secara baik sebesar  $275 \text{ MPa}$ . Ambillah modulus elastis  $E = 200 \text{ GPa}$ . Selama pembuatan, karena kekeledoran, batang yang ditengah dibuat  $2,50 \text{ mm}$  lebih pendek sedang sebelum pemasangan susun, ketiga batang adalah seperti yang terlihat dalam Gambar 12-9(b). (a) Berapakah tegangan sisa yang terbentuk dalam batang-batang tersebut sebagai hasil suatu pemasangan yang dipaksakan? Anggaplah bahwa tidak terjadi pematahan batang-batang. (b) Pada grafik yang sama perlihatkanlah diagram-diagram beban-defleksi yang analog dengan Gambar 12-3(c) untuk susunan bebas tegangan mula, serta yang dengan tegangan-tegangan sisa yang diperoleh di atas.

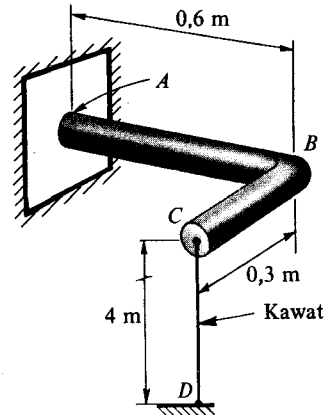
12-39. Sebuah poros baja berbentuk huruf L berdiameter 50 mm dipasang tetap pada sebuah ujung kepada suatu dinding tegar sedang ujung



GAMBAR SOAL 12 – 39

yang lain mendapat tumpuan sederhana seperti yang terlihat dalam gambar. Dalam gambar bengkokan batang bentuk L tersebut bersudut  $90^\circ$ . Berapakah momen lentur yang akan terbentuk pada ujung yang terpasang tetap yang disebabkan oleh pemakaian gaya  $10 \text{ kN}$  pada sudut poros tersebut? Anggaplah  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $G = 80 \text{ GPa}$ , dan untuk kemudahan ambil  $I = 400 \times 10^3 \text{ mm}^4$  dan  $I_p = 800 \times 10^3 \text{ mm}^4$ .

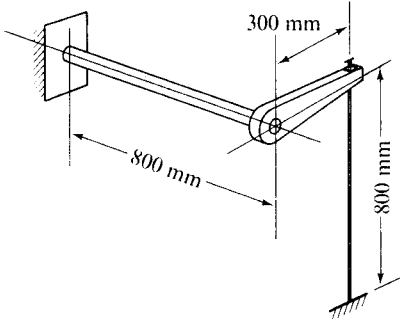
12-40. Sebuah kawat baja yang panjangnya  $4 \text{ m}$  direntangkan dari ujung sebuah batang baja melingkar berdiameter  $20 \text{ mm}$  yang bengkok  $ABC$  ke sebuah tumpuan kaku  $D$  seperti yang terlihat dalam gambar. Hitunglah tegangan-tegangan yang bekerja pada elemen  $A$ , yang terletak pada tumpuan pada atas batang, yang disebabkan oleh penurunan suhu dalam kawat sebesar  $80^\circ\text{C}$ . Jangan menghitung tegangan-tegangan utama.  $A$  dari kawat  $= 6,5 \text{ mm}^2$ . Ambil  $E = 200.000 \text{ MPa}$ ,  $G = 84.000 \text{ MPa}$ , dan  $\alpha = 12 \times 10^{-6} \text{ per } ^\circ\text{C}$ .



GAMBAR SOAL 12 – 40

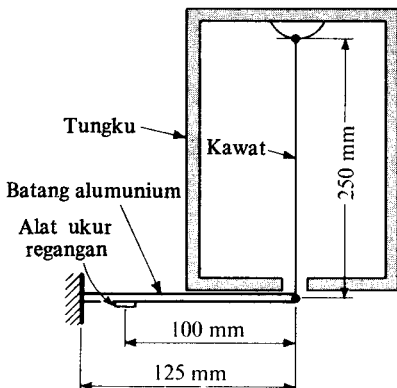
12-41. Sebuah tabung berdinding tipis yang mendatar salah satu ujungnya dipasang pada sebuah tumpuan kaku sedang ujung yang lain dijepit oleh sebuah lengan kaku (Lihat gambar). Sebuah batang tegak melalui lengan tersebut dan mempunyai tarikan awal sebesar  $500 \text{ N}$ . Bila mur dieratkan supaya menggerakkannya sejauh  $5,00 \text{ mm}$  sepanjang batang tersebut, berapakah gaya total yang terbentuk dalam batang itu? Diameter rata-rata tabung adalah  $40 \text{ mm}$  dan tebalnya adalah  $5/\pi \text{ mm}$ . Jadi  $A$  dari ta-

bung tersebut adalah  $200 \text{ mm}^2$  dan  $I_p = 80.000 \text{ mm}^4$ . Luas penampang batang adalah  $4,6 \text{ mm}^2$ . Anggaplah lengan kaku tidak berhingga, tetapi untuk tabung dan batang ambillah  $E = 200 \text{ GPa}$  dan  $G = 80 \text{ GPa}$ .



GAMBAR SOAL 12 – 41

12-42. Suhu dalam sebuah tungku diukur dengan perantara sebuah kawat stainless steel yang diletakkan di dalamnya. Kawat tersebut diikatkan kepada ujung sebuah balok kantilever di luar tungku. Regangan yang diukur oleh pengukur regangan yang ditempelkan pada luar balok merupakan pula pengukur suhu. Dengan menganggap bahwa seluruh panjang kawat dipanaskan sampai kepada suhu tungku, berapakah perubahan suhu tungku bila pengukur mencatat perubahan regangan sebesar  $-100 \times 10^{-6}$  m per meter. Anggaplah bahwa kawat mempunyai cukup besar tarikan awal untuk melaksanakan yang dikehendaki. Sifat-sifat mekanis bahan-bahan adalah sebagai berikut:  $\alpha_{ss} = 17 \times 10^{-6}$  per  $^{\circ}\text{C}$ ,  $\alpha_a = 22 \times 10^{-6}$  per  $^{\circ}\text{C}$ ,  $E_{ss} = 200 \text{ GPa}$ ,

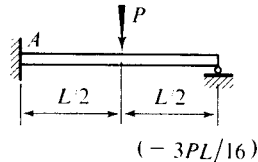


GAMBAR SOAL 12 – 42

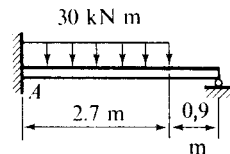
$E_a = 70 \text{ GPa}$ ,  $A_{\text{kawat}} = 0,30 \text{ mm}^2$ ,  $I_{\text{balok}} = 270 \text{ mm}^4$ . Kedalaman balok kecil 6 mm.

12-43. Kerjakanlah kembali Contoh 12-10 dengan memperlakukan  $R_B$  dan  $X_B$  sebagai gaya-gaya lebih. kerjakanlah persamaan-persamaan superposisi, Persamaan 12-11.

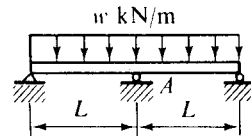
12-44 sampai 12-46. (a) Untuk balok-balok yang dibebani seperti yang terlihat dalam gambar-gambar yang bersangkutan, dengan menggunakan metoda superposisi, tentukanlah reaksi-reaksi lebih. Dalam semua kasus  $EI$  adalah konstan. (b) Untuk balok-balok yang sama, plot diagram-diagram geser dan momen. Jawab:  $M_A$  diberikan dalam tanda kurung dalam gambar-gambar yang bersangkutan.



GAMBAR SOAL 12 – 44



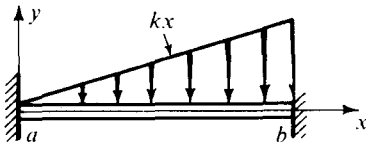
GAMBAR SOAL 12 – 45



GAMBAR SOAL 12 – 46

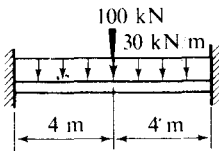
12-47. Dengan menggunakan persamaan-persamaan superposisi, Persamaan 12-11, tentukanlah reaksi-reaksi pada tumpuan-tumpuan yang disebabkan oleh beban terpadai untuk balok yang terlihat dalam gambar. Perlakukanlah

momen dan reaksi vertikal pada  $b$  sebagai kelebihan dan tentukanlah defleksi ujung dan perputaran sebuah balok tertentu dengan salah satu metoda yang telah dikembangkan sebelumnya. Bila dikehendaki, jawab yang telah diberikan pada Soal 11-11 dapat pula dipergunakan. Jawab:  $M_a = -kL^3/30$ ,  $M_b = -kL^3/20$ .



GAMBAR SOAL 12 - 47

12-48. Dengan menggunakan rumus-rumus untuk kasus-kasus tertentu yang diberikan dalam Tabel 11 dari Lampiran serta superposisi, tentukanlah momen-momen ujung jepit untuk balok yang dibebani seperti yang terlihat dalam gambar.



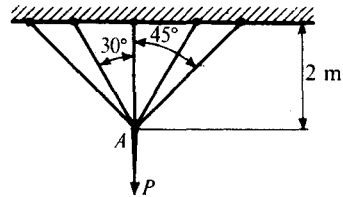
GAMBAR SOAL 12 - 48

12-49. Tinjau kembali keadaan-keadaan Soal 12-47 dengan menganggap bahwa ujung  $b$  mendapat tumpuan sederhana. Untuk soal baru ini, tentukanlah reaksi-reaksi dengan menggunakan metoda pergeseran. Gunakanlah jawab-jawab yang diberikan pada Soal 12-47, tetapi haruslah berhati-hati dalam menafsirkan tanda-tanda.

12-50. Kerjakanlah kembali Contoh 12-12 dengan gaya yang lain  $P$  yang bekerja pada  $1/4$  panjang  $BC$  pada batang tengah  $BC$  di atas  $C$ .

12-51. Lima buah batang baja masing-masing mempunyai luas penampang  $500 \text{ mm}^2$  disusun dalam cara yang simetris seperti yang terlihat dalam gambar. Anggaplah bahwa baja bersifat sebagai bahan kenyal-plastis linier dengan  $E = 200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$  dan  $\sigma_{yp} = 250 \text{ MN/m}^2$ . Tentukanlah dan plotlah elastis-plastis beban defleksi sambungan  $A$  yang disebabkan oleh pema-

kaian gaya ke bawah  $P$ . Anggaplah bahwa pada mulanya semua batang adalah bebas tegangan.

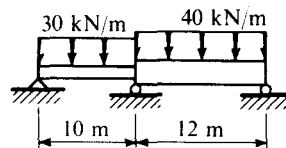


GAMBAR SOAL 12 - 51

12-52. Kerjakanlah kembali Contoh 12-12 dengan menganggap bahwa batang  $AC$  mempunyai luas dua kali lebih besar dari batang  $BC$  atau  $DC$ .

12-53. Dalam Contoh 12-13, dengan menentukan  $M_{ba}$  dari rotasi, buktikanlah bahwa  $M_{ba} = -M_{bc}$ . Dengan cara yang sama buktikanlah bahwa  $M_{cb} = 0$ .

12-54. Untuk balok menerus yang dibebani seperti yang terlihat dalam gambar, dengan mempergunakan metoda pergeseran, tentukanlah momen lentur yang bekerja atas tumpuan tengah, dan plotlah diagram-diagram geser dan momen.  $I$  dari balok disebelah kanan bentangan dua kali lebih besar dari yang sebelah kiri bentangan. Jawab:  $M_{\max} = 490 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $M_{\min} = -504 \text{ kN}\cdot\text{m}$ .

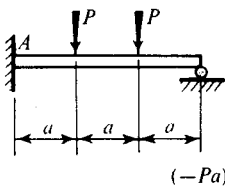


GAMBAR SOAL 12 - 54

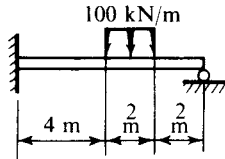
12-55. Kerjakanlah kembali Soal 12-54 dengan menganggap bahwa tumpuan sebelah kiri adalah jepit. Jawab:  $M_B = -459 \text{ kN}\cdot\text{m}$ .

12-56. dan 12-57. Untuk balok-balok yang dibebani seperti yang terlihat dalam gambar, dengan menggunakan metoda luas-momen, tentukanlah reaksi-reaksi lebih dan plot diagram-diagram geser dan momen. Dalam semua kasus  $EI$  adalah konstan. (Petunjuk: Dalam Soal 12-57 perlakukanlah reaksi yang disebelah ka-

nan sebagai kelebihan). *Jawab:*  $M_A$  diberikan dalam tanda kurung dari masing-masing gambar.

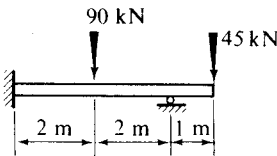


GAMBAR  
SOAL 12 – 56



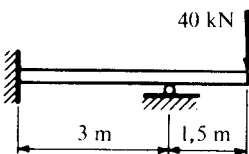
GAMBAR  
SOAL 12 – 57

12-58. (a) Dengan menggunakan metoda luas-momen, tentukanlah momen lebih pada ujung yang terpasang tetap dari balok yang terlihat dalam gambar dan plotlah diagram-diagram geser dan momen. Abaikanlah berat balok. (b) Pilihlah kedalaman untuk sebuah balok kayu yang lebarnya 200 mm dengan menggunakan tegangan lentur ijin dari 8000 kN/m<sup>2</sup> dan tegangan geser ijin dari 1000 kN/m<sup>2</sup>. (c) Tentukanlah defleksi maksimum dari balok antara tumpuan-tumpuan dan defleksi maksimum dari bagian tergantung (overhang). Untuk kayu,  $E = 10^7$  kN/m<sup>2</sup>. *Jawab:* (a)  $\pm 45$  kN·m.



GAMBAR SOAL 12 – 58

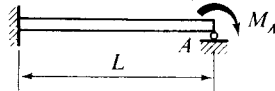
12-59. (a) Dengan menggunakan metoda luas-momen, tentukanlah momen lebih yang terdapat pada ujung yang terpasang tetap dari balok yang terlihat dalam gambar, dan plotlah diagram-diagram geser dan momen. Abaikanlah berat balok tersebut. (b) Pilihlah sebuah balok W dengan menggunakan suatu tegangan lentur ijin dari 125 MPa dan tegangan geser ijin dari 80 MPa, (c) Tentukanlah defleksi



GAMBAR SOAL 12 – 59

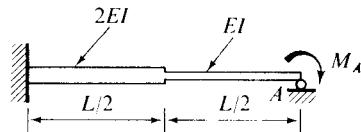
maksimum dari balok antara tumpuan-tumpuan dan defleksi maksimum dari bagian yang tergantung (overhang). Ambil  $E = 200$  GPa.

12-60. Untuk balok yang dibebani seperti yang terlihat dalam gambar, (a) tentukanlah perbandingan antara momen pada ujung terpasang dengan momen terpakai  $M_A$ ; (b) tentukanlah perputaran ujung A.  $EI$  adalah konstan. *Jawab:*  $-\frac{1}{2}, -M_A L / (4EI)$ .



GAMBAR SOAL 12 – 60

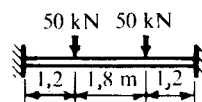
12-61. Untuk balok yang dibebani seperti yang terlihat dalam gambar, (a) tentukanlah perbandingan momen pada ujung yang terpasang tetap terhadap momen terpakai  $M_A$ ; (b) tentukanlah perputaran ujung A.



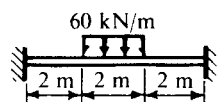
GAMBAR SOAL 12 – 61

12-62. Dengan menggunakan metoda luas-momen, buktikanlah bahwa defleksi maksimum sebuah balok yang dijepit pada kedua ujungnya dan memuat beban yang terdistribusi merata adalah seperlima defleksi maksimum dari balok yang sama yang bertumpuan sederhana,  $EI$  adalah konstan.

12-63 dan 12-64. Untuk balok-balok yang dibebani seperti yang terlihat dalam gambar-gambar yang bersangkutan, dengan menggunakan metoda luas-momen, (a) tentukanlah momen-momen pada ujung jepit, dan plot diagram-diagram geser dan momen. Abaikanlah



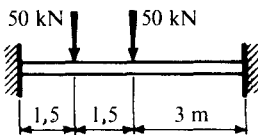
GAMBAR  
SOAL 12 – 63



GAMBAR  
SOAL 12 – 64  $\left( \frac{122}{EI} \right)$

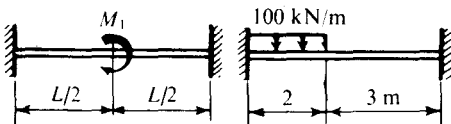
berat balok tersebut. (b) Nyatakanlah defleksi maksimum dalam bentuk-bentuk beban, jarak dan  $EI$ . Tidak diperlukan penyesuaian terhadap satuan. *Jawab:* Untuk (b) lihat gambar-gambar yang bersangkutan.

12-65. Sebuah balok W 310 × 54 dibebani seperti yang terlihat dalam gambar. Dengan menggunakan metoda luas-momen dan mengabaikan berat dari balok, tentukanlah (a) momen-momen ujung jepit, (b) tegangan lentur maksimum, (c) defleksi pada tengah bentangan. Ambil  $E = 200$  GPa.



GAMBAR SOAL 12 – 65

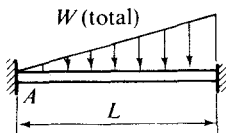
12-66 sampai 12-68. Untuk balok-balok dengan kekakuan lentur yang konstan yang dibebani seperti yang terlihat dalam gambar-gambar yang bersangkutan, dengan menggunakan metoda luas-momen, tentukanlah momen-momen ujung jepit.



GAMBAR

GAMBAR

SOAL 12 – 66 ( $\pm M_1/4$ ) SOAL 12 – 67 ( $-105$ )



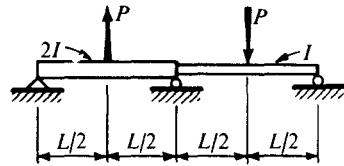
GAMBAR

SOAL 12 – 68 ( $-WL/15$ )

12-69. Kerjakanlah kembali Soal 12-54 dengan menggunakan metoda luas-momen.

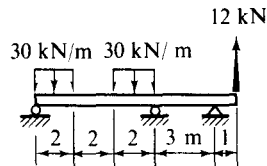
12-70. Sebuah balok yang mempunyai momen inersia yang berbeda-beda dibebani seperti yang terlihat dalam gambar. (a) Dengan menggunakan metoda luas-momen tentukanlah mo-

men pada tumpuan tengah. (b) Hitunglah semua reaksi.



GAMBAR SOAL 12 – 70

12-71. Untuk balok menerus yang dibebani seperti yang terlihat dalam gambar, dengan menggunakan metoda luas-momen, tentukanlah momen lentur langsung di atas tumpuan tengah.  $EI$  adalah konstan.



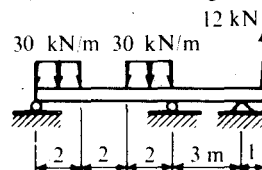
GAMBAR SOAL 12 – 71

12-72. Kerjakanlah kembali Contoh 12-17 setelah menganggap bahwa kedua tumpuan A dan C adalah jepit.

12-73. Kerjakanlah kembali Contoh 12-7 setelah menganggap bahwa tumpuan sebelah kanan yaitu C adalah mempunyai pasak.

12-74. Sebuah balok dengan kekakuan lentur  $EI$  yang konstan, dipasang tetap pada kedua ujungnya berjarak antara  $L$ . Bila salah satu tumpuan turun sejauh  $\Delta$  dalam arah vertikal ke bawah relatif terhadap tumpuan yang lain (tanpa mengakibatkan perputaran), berapakah momen yang akan diberikan kepada ujung-ujung? *Jawab:*  $\pm 6 EI \Delta / L^2$ .

12-75. Untuk balok kontinu yang dibebani seperti yang terlihat dalam gambar, dengan



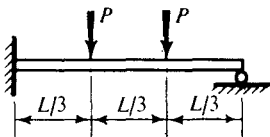
GAMBAR SOAL 12 – 75

menggunakan metoda luas-momen atau persamaan tiga-momen, tentukanlah momen lentur langsung atas tumpuan tengah.  $EI$  adalah konstan.

12-76. Sebuah balok dengan kekakuan lentur konstan  $EI$  adalah kontinu dalam empat bentangan yang sama panjang yaitu  $L$ . Plotlah diagram-diagram geser dan momen untuk balok ini bila disepanjang balok tersebut dibebani oleh suatu beban yang terdistribusi merata sebesar  $w_0$  N per meter. Gunakanlah persamaan tiga-momen untuk menentukan momen-momen di atas tumpuan-tumpuan. (Petunjuk: Ambil keuntungan dari simetri). Jawab: Momen di atas tumpuan tengah adalah  $w_0 L^2/14$ , reaksi-reaksi pada ujung-ujung masing-masing adalah  $11w_0 L/28$ .

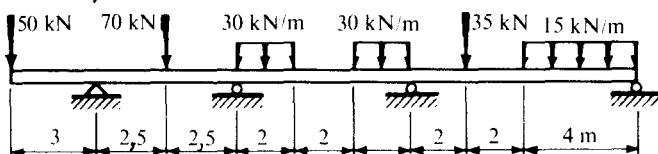
12-77. Kerjakanlah kembali Contoh 12-17, Gambar 12-23, setelah menganggap kedua tumpuan  $A$  dan  $C$  adalah jepit. Gunakan persamaan tiga-momen.

12-78. Sebuah balok pengekan dari bahan liat dibebani dengan dua gaya terpusat  $P$  seperti yang terlihat dalam gambar. Tentukanlah beban batas  $P_{ult}$ . Abaikanlah berat balok tersebut. (Petunjuk: Kemungkinan terdapatnya suatu sendi plastis haruslah diperiksa di bawah masing-masing beban). Jawab:  $4M_p/L$ .



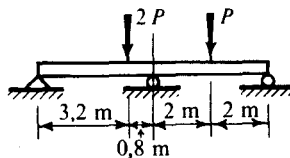
GAMBAR SOAL 12 - 78

12-79. Dengan menggunakan persamaan tiga-momen, tentukanlah momen-momen atas tumpuan-tumpuan untuk balok yang dibebani seperti yang terlihat dalam gambar.  $EI$  adalah konstan.



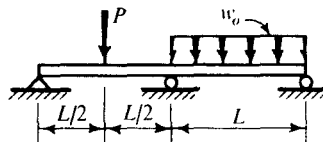
GAMBAR SOAL 12 - 79

12-80. Dengan menggunakan analisa batas, hitunglah harga  $P$  yang akan mengakibatkan keruntuhan (lenturan) dari balok dua bentangan yang terlihat dalam gambar. Balok tersebut mempunyai penampang sikuempat dengan lebar 120 mm dan kedalaman 300 mm. Tegangan luluh adalah 15 MPa. Abaikanlah berat balok tersebut.



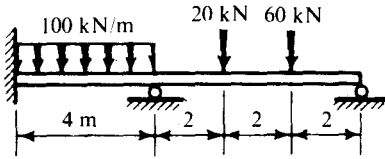
GAMBAR SOAL 12 - 80

12-81. Sebuah balok prismatik, menerus dan dua bentangan mendapat suatu gaya terpusat  $P$  di tengah-tengah salah satu bentangan dan beban yang terdistribusi merata  $w_0$  pada bentangan yang satu lagi. Dengan menggunakan metoda analisa plastis, tentukanlah perbandingan antara  $w_0 L$  dengan  $P$  yang perlu untuk terjadinya keruntuhan (lentur) dalam kedua bentangan secara bersamaan. Abaikanlah berat balok tersebut.



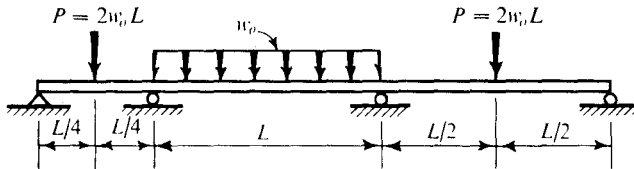
GAMBAR SOAL 12 - 81

12-82. Dengan menggunakan pendekatan analisa batas, pilihlah sebuah irisan  $W$  dari baja untuk keadaan pembebanan, yang terlihat dalam gambar. Anggaplah  $\sigma_{yp} = 280$  MPa, faktor bentuk adalah 1,10 dan gunakan faktor beban sebesar 2.



GAMBAR SOAL 12 – 82

12-83. Sebuah balok prismatik yang "tidak mempunyai berat" dibebani seperti yang terlihat dalam gambar. Berapakah besar momen plastis maksimum yang mengatur? Jawab:  $w_0 L^2 / 3$ .



GAMBAR SOAL 12 – 83





# 13 Kolom

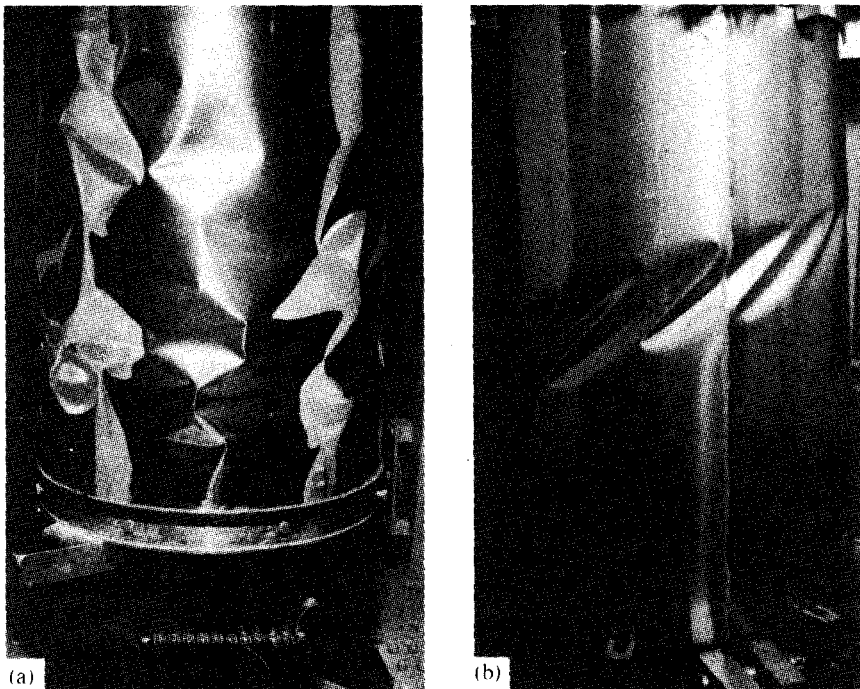
## 13-1 PENDAHULUAN

Pada permulaan buku ini telah dinyatakan bahwa unsur-unsur struktur dan mesin dipilih berdasarkan tiga karakteristik: kekuatan, kekakuan dan stabilitas. Prosedur-prosedur analisa tegangan dan deformasi telah kita bahas dalam bab-bab yang lalu. Dalam semua kasus yang kita tinjau sampai sekarang, bagian-bagian struktur diandaikan berada dalam keadaan stabil seimbang. Tetapi tidak semua susunan struktur dalam keadaan stabil. Umpamanya tinjaulah sebuah tongkat sepanjang satu meter yang mempunyai luas penampang sebesar pensil. Bila tongkat ini berdiri pada ujungnya, kita barangkali menyimpulkan bahwa tegangan pada alas akan sama dengan berat total tongkat dibagi dengan luas penampang. Tetapi keseimbangan tongkat ini sangat genting. Dengan cacat yang sangat kecil sekali pun pada tongkat atau sedikit tiupan angin tongkat itu segera jatuh, jadi perhitungan mengenai tegangan tersebut di atas tidak ada artinya. Contoh nyata secara fisis ini diperkenalkan untuk membiasakan pembaca berpikir bahwa pertimbangan stabilitas dapat merupakan hal yang utama dalam beberapa persoalan.

Perhatian utama dari bab ini akan tertuju kepada analisa kolom yaitu batang tekan yang mempunyai luas penampang yang konstan. Seperti pada semua masalah ketidakstabilan, soal kolom dipersukar pula oleh kenyataan bahwa gejala-gejala yang berbeda yang memperbesar kekuatan sebuah tiang tergantung kepada panjangnya. Jadi bila sekiranya sebuah batang baja yang ujungnya berupa lingkaran, katakanlah, berdiameter 5 mm, panjangnya dibuat 10 mm untuk bertindak sebagai sebuah "kolom", ketidakstabilan bukanlah menjadi masalah, dan gaya yang cukup berarti dapat dilakukan kepada potongan ini. Dipihak lain, bila batang yang sama di atas dibuat sepanjang satu meter, maka dengan gaya terpakai yang lebih kecil dari yang dapat ditahan oleh potongan batang yang pendek tadi, batang yang sekarang ini menjadi tidak stabil ke samping terus menekuk ke samping dan dapat runtuh. Sebuah meteran biasa yang tipis bila men-

dapat tekan aksial, dapat gagal untuk mengukur. Pertimbangan kekuatan bahan saja tidak cukup untuk menaksir sifat batang ini.

Gejala yang sama terdapat pula dalam berbagai keadaan lain di mana tegangan tekan berada. Lembaran-lembaran tipis meskipun berkemampuan penuh untuk menahan pembebanan tarik, sangat tidak baik untuk mengantarkan gaya tekan. Balok-balok tipis, yang tidak diperkuat ke samping, dapat patah menyamping dan runtuh karena mendapat beban. Tangki-tangki hampa, maupun lambung kapal selam, tanpa didisain dengan sempurna dapat berubah sama sekali akibat pengaruh tekanan luar dan dapat mengambil bentuk yang berbeda secara drastis dari geometri semula. Sebuah tabung yang berdinding tipis dapat berkerut seperti kertas tissue bila mendapat momen puntir. Umpamanya lihatlah Gambar 13-1.\* Selama dalam taraf pembakar, selubung-selubung



**Gambar 13-1** (a) Pola tekukan tertentu untuk silinder berdinding tipis akibat tekanan; (b) pola tekukan khas untuk silinder tertekan akibat puntiran. (Atas kebaikan Dr. L.A. Harris dari North American Aviation, Inc).

tipis dari rudal mendapat beban tekan yang kritis. Hal-hal yang dibicarakan di atas merupakan persoalan-persoalan disain teknik yang penting dan menentukan. Selain itu, gejala-gejala pematahan dan perkerutan yang biasanya diamati pada batang yang dibebani terjadi agak tiba-tiba. Berdasarkan pertimbangan inilah maka banyak terjadi kegagalan ketidak-stabilan yang spektakuler dan berbahaya sekali.

\* Gambar-gambar diambil dari L.A. Harris, H.W. Suer, and W.T. Skene, "Model Investigations of Unstiffened and Stiffened Circular Shells," *Experimental Mechanics*, July 1961, hal. 3 dan 5.

Sejumlah persoalan ketidakstabilan struktur yang diberikan dalam daftar di atas berada di luar jangkauan buku ini.† Di sini yang akan diperhatikan terutama adalah persoalan kolom. Kita akan membuat batas-batas panjang kolom di mana terdapat ketidakstabilan serta rumus-rumus mengenai daya muat kolom tipis. Melalui manipulasi aljabar, ungkapan yang akan kita turunkan untuk daya muat (carrying capacity) kolom akan dibuat menyerupai rumus-rumus tegangan yang biasa. Pengubahan rumus-rumus kolom seperti biasa ini membawa beberapa ahli teknik untuk meramalkan rumus-rumus kekuatan yang biasa ke dalam batas-batas di mana gejala ketidakstabilan berpengaruh. Terdapat kisah beberapa ahli teknik bangunan yang gagal memperlihatkan kesalahan yang tragis ini: jembatan, gedung, mesin dan pesawat terbang yang berubah menjadi "spaghetti".

Pada akhir bab ini akan dibahas dengan singkat masalah ketidakstabilan balok ke arah samping.

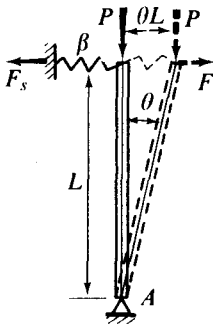
### 13-2 STABILITAS KESEIMBANGAN

Sebuah jarum yang lurus sempurna stabil berdiri di atas ujungnya dapat dikatakan berada dalam keseimbangan. Tetapi gangguan kecil ataupun ketidaksempurnaan dalam pembuatannya membuat keseimbangan ini tidak mungkin. Macam keseimbangan ini disebut tidak stabil dan kita perlu menghindarkan keadaan-keadaan yang serupa ini dalam sistem struktur.

Untuk memperjelas soal tersebut lebih lanjut, tinjau lagi sebuah batang yang tegak dengan sebuah pegas yang memuntir dari kekakuan  $k$  pada alasnya seperti yang terlihat dalam Gambar 13-2(a).\* Sifat batang demikian yang memperoleh gaya vertikal  $P$  dan gaya mendatar  $F$  untuk  $F$  yang besar dan kecil diperlihatkan dalam Gambar 13-2(b). Pertanyaan yang kemudian muncul adalah: Bagaimana sistem ini berjalan bila  $F = 0$ ? Ini merupakan kasus pembatasan, dan sesuai dengan penyelidikan tekukan murni.

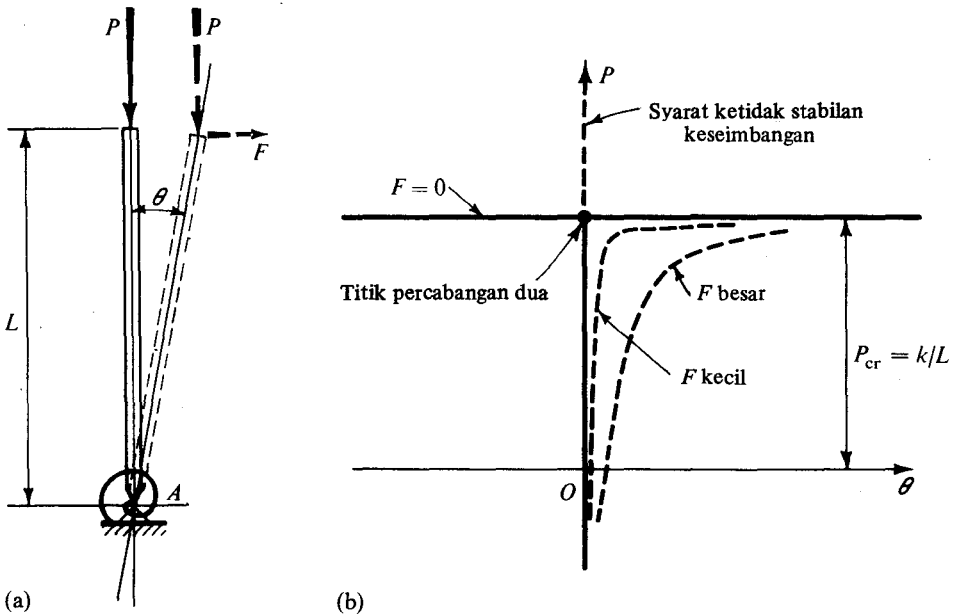
Untuk menjawab pertanyaan ini secara analitis, sistem tersebut haruslah dengan sengaja digeserkan kira-kira sedikit (kecil tak terhingga) yang bersesuaian dengan syarat-

† Lihat, umpamanya, S.P. Timoshenko and J.M. Gere, *Theory of Elastic Stability* (2nd edition), New York: McGraw-Hill, 1961.



Gambar 13-A

\* Selain dari pada pegas puntir dengan kekakuan  $k$  pada alas, kita dapat memperkenalkan pegas linier dengan kekakuan  $\beta = k/L^2$  dalam arah mendatar pada batang bagian atas, seperti yang terlihat dalam Gambar 13-A. Kemudian dengan menganggap putaran batang tegak  $\theta$  adalah kecil,  $\sum M_A = 0$  memberikan  $P_{cr}\theta L + FL = F_s L$ . Karena  $F_s = \beta\theta L$ ,  $P_{cr} = (\beta\theta L - F)/\theta$  dengan  $F = 0$ , karena  $\beta = k/L^2$ , kita memperoleh  $P_{cr} = \beta L = k/L$ .



Gambar 13-2 Sifat menekuk sebuah batang tegar

syarat batas. Kemudian bila gaya-gaya pengembalian lebih besar dari gaya-gaya yang cenderung untuk menumbangkan sistem tersebut, maka sistem tersebut stabil, demikian pula sebaliknya.

Batang tegar yang terlihat dalam Gambar 13-2(a) hanya dapat mengalami perputaran saja karena ia tidak bisa membengkok; yaitu sistem tersebut mempunyai satu derajat kebebasan. Untuk perputaran yang kita anggap  $\theta$  momen pengembalian adalah  $k\theta$  dan dengan  $F = 0$  maka momen untuk menumbangkan sistem menjadi  $PL \sin \theta \approx PL\theta$ . Karenanya, bila

$$k\theta > PL\theta \quad \text{sistem adalah stabil}$$

dan bila

$$k\theta < PL\theta \quad \text{sistem tidak stabil}$$

Tepat pada titik peralihan,  $k\theta = PL\theta$ , keseimbangan sistem bukan stabil dan bukan pula tidak stabil, tetapi netral. Gaya yang bersangkutan dengan keadaan ini merupakan beban kritis atau beban tekuk, yang akan ditulis sebagai  $P_{cr}$ . Untuk sistem batang yang ditinjau

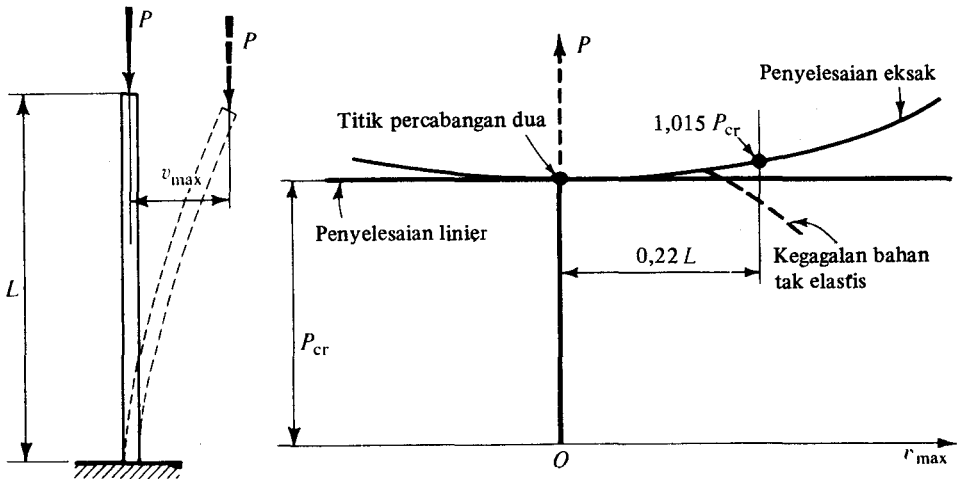
$$P_{cr} = k/L \quad (13-1)$$

Syarat ini menentukan lahirnya penekukan. Pada gaya ini ada dua kedudukan keseimbangan yang mungkin, yaitu bentuk lurus dan suatu bentuk defleksi sekitar tempat yang berjarak tidak berhingga kecil dari kedudukan yang pertama. Karena ada dua akar pemecahan yang mungkin diperoleh, maka ini disebut *titik percabangan dua* (bifur-

cation point) dari penyelesaian keseimbangan. Untuk  $P > k/L$ , sistem tersebut tidak stabil. Berhubung jawaban tersebut telah dibuat linier (dengan menganggap  $\theta$  kecil), tidak ada kemungkinan untuk membuat  $\theta$  menjadi tidak berhingga pada  $P_{cr}$ . Dalam keadaan pergeseran yang besar, kita selalu mendapat titik keseimbangan stabil pada  $\theta < \pi$ .\*

Sifat kolom yang elastis, lurus sempurna yang dibebankan secara konsentris, yaitu kolom yang ideal, sangat serupa dengan sifat yang dilukiskan dalam contoh sederhana di atas. Dari persoalan perumusan yang dilinearisasikan, kita dapat menentukan beban-beban tekukan kritis. Contoh-contohnya akan diberikan dalam pasal-pasal berikut.

Beban-beban kritis tidak menggambarkan tindakan penekukan itu sendiri. Dengan menggunakan suatu persamaan diferensial eksak dari kurva elastis untuk defleksi yang besar, kita mungkin untuk mendapatkan kedudukan-kedudukan seimbang yang lebih tinggi dari  $P_{cr}$  yang bersangkutan dengan gaya terpakai  $P$ . Hasil-hasil dari analisa seperti ini dilukiskan dalam Gambar 13-3. Terutama perhatikan bahwa bertambahnya  $P_{cr}$  dengan 1,5 persen mengakibatkan defleksi maksimum ke samping sebesar 22 persen dari panjang kolom.† Guna pertimbangan yang praktis kita jarang membiarkan defleksi yang besar itu. Selain itu, bahan biasanya tidak dapat melawan momen lentur yang diakibatkannya. Karenanya kolom yang sesungguhnya gagal secara tidak elastis. Pada kebanyakan penggunaan dalam teknik,  $P_{cr}$  menyatakan kapasitas ultimat untuk sebuah kolom lurus yang dibebani dengan konsentris.



Gambar 13-3 Sifat kolom elastis ideal

\* Lihat misalnya E.P. Popov, *Introduction to Mechanics of Solids*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1968.

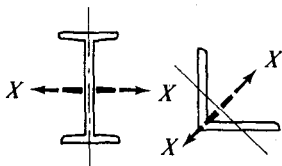
† Lihatlah S.P. Timoshenko and J.M. Gere, *Theory of Elastic Stability* (2 nd ed.), New York : McGraw-Hill, 1961, hal. 76.

+ Kenyataan bahwa kolom elastis terus memuat beban setelah penekukan dapat diperlihatkan dengan menggunakan gaya dengan kelebihan beban tekuk kepada sebuah batang fleksibel atau pelat seperti gergaji tukang kayu.

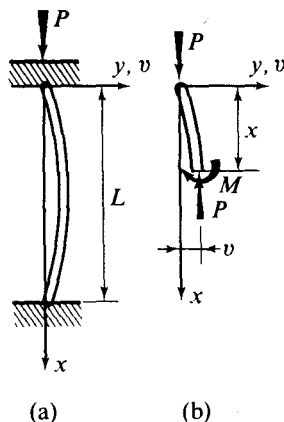
### 13-3 RUMUS EULER UNTUK KOLOM UJUNG PASAK

Pada beban kritis, kolom yang penampangnya berbentuk lingkaran atau tabung dapat menekuk ke samping untuk setiap arah. Dalam keadaan yang lebih lazim, batang tekan tidak mempunyai kekakuan lentur yang sama untuk segala arah. Momen inersia  $I_{xx}$  terhadap salah satu sumbu titik berat luas penampang adalah maksimum, Gambar 13-4, sedang terhadap sumbu titik-berat penampang yang lain dapat berupa minimum. Kekakuan lentur  $EI$  yang penting dari kolom tergantung dari  $I$  yang minimum sedang pada beban kritis sebuah kolom menekuk ke salah satu sisi ataupun sisi lainnya dari bidang  $X-X$ . Karenanya kita dapat memahami penggunaan  $I$  yang minimum dalam penurunan yang berikut.

Tinjaulah sebuah kolom dengan ujung bebasnya berputar sekitar pasak-pasak tanpa gesekan. Kolom-kolom tersebut, mempunyai tumpuan pasak pada kedua ujungnya, yang disebut *kolom berujung pasak* (pin-ended columns). Dalam Gambar 13-5(a) syarat-syarat batas yang setara terlihat dengan perantaraan ujung-ujung yang bundar pada tumpuan-tumpuan tanpa gesekan. *Bentuk tekukan yang terlihat hanya mungkin terdapat pada beban kritis atau beban Euler, karena sebelum mendapatkan beban ini kolom masih lurus.* Gaya terkecil di mana bentuk tekukan dapat terjadi disebut gaya kritis.



Gambar 13-4 Kolom menekuk dalam bidang sumbu utama penampang



Gambar 13-5 Kolom dengan ujung pasak atau ujung bulat yang dipergunakan dalam penurunan beban Euler.

Dari Gambar 13-5(b) dapat dilihat bahwa momen lentur pada suatu irisan adalah  $-Pv$ , yang sesuai dengan kaidah tanda balok yang biasa.\* Dengan harga momen lentur ini, persamaan diferensial untuk kurva elastis, Persamaan 11-10, pada beban kritis adalah

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}v \quad (13-2)$$

\* Untuk arah defleksi positif  $v$  seperti yang terlihat, momen lentur adalah negatif. (Putarlah diagram  $90^\circ$  berlawanan arah putaran jarum jam). Bila kolom tersebut berdefleksi ke arah yang lain, momen menjadi positif pula. Tetapi  $v$  adalah negatif. Jadi untuk membuat  $Pv$  positif, ia harus diperlakukan sama seperti besaran negatif.

dengan mengambil  $\lambda^2 = P/(EI)$  dan dengan menukar letak persamaan, diperoleh

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \lambda^2 v = 0 \quad (13-3)$$

Ini merupakan persamaan yang bentuknya sama dengan gerak selaras sederhana dan jawabnya adalah

$$v = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x \quad (13-4)$$

di mana  $A$  dan  $B$  adalah tetapan-tetapan tertentu yang harus ditentukan dari syarat-syarat batas. Syarat-syarat ini adalah

$$v(0) = 0 \quad \text{dan} \quad v(L) = 0$$

$$\text{Jadi} \quad v(0) = 0 = A \sin 0 + B \cos 0 \quad \text{atau} \quad B = 0$$

$$\text{dan} \quad v(L) = 0 = A \sin \lambda L \quad (13-5)$$

Persamaan 13-5 dapat dipenuhi dengan mengambil  $A = 0$ , tetapi seperti dapat dilihat dari Persamaan 13-4, ini sesuai dengan syarat tidak ada penekukan dari kolom dan untuk soal ketidak-stabilan merupakan jawab yang tidak berarti (trivial solution). Selain itu, Persamaan 13-5 dipenuhi pula bila faktor sinus sama dengan nol. Ini memerlukan  $\lambda L$  sama dengan  $n\pi$ , di mana  $n$  adalah bilangan bulat. Jadi dengan menggunakan definisi yang lalu dari  $\lambda$  sebagai  $\sqrt{P/(EI)}$  dan menyelesaikan  $\sqrt{P/(EI)}L = n\pi$  untuk  $P$ , yang merupakan gaya kritis yang membuat kolom-kolom menjadi melengkung, maka

$$P_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \quad (13-6)$$

Tetapi karena yang dicari adalah harga terkecil dari beban kritis atau beban Euler, maka  $n$  dari Persamaan 13-6 haruslah diambil satu. Karena itu *rumus beban Euler\** untuk kolom berujung pasak pada kedua ujungnya adalah

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (13-7)$$

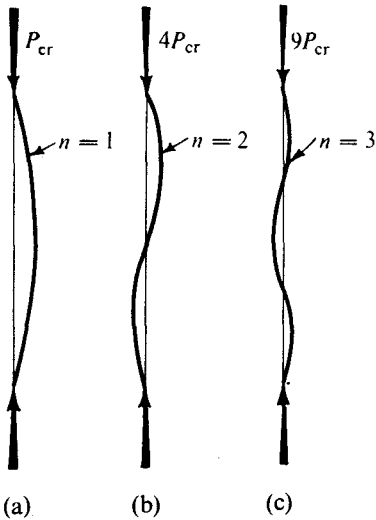
di mana  $I$  adalah momen inersia *terkecil* dari kolom berpenampang konstan dengan  $L$  adalah panjangnya. Kasus dari kolom dengan ujung-ujung berpasak atau bundar pada kedua ujungnya acapkali disebut sebagai *kasus dasar*.

Menurut Persamaan 13-4 pada beban kritis, persamaan kurva elastis adalah

$$v = A \sin \lambda x \quad (13-8)$$

Ini merupakan fungsi karakteristik atau eigenfunction dari soal ini, dan berhubung  $n$  dapat dianggap sebagai suatu bilangan bulat, maka terdapat sejumlah tidak berhingga

\* Rumus ini diturunkan oleh matematikawan besar Leonhard Euler pada tahun 1757.

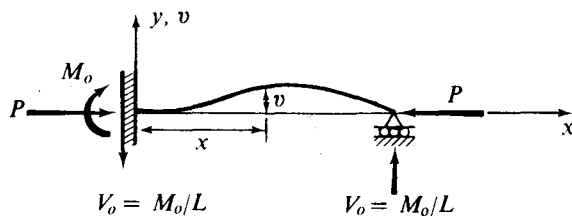


**Gambar 13-6** Kolom berujung pasak dan modus-modus tiga tekukan pertama

fungsi-fungsi seperti itu. Dalam jawab linier ini amplitudo  $A$  dari modus tekukan masih merupakan tidak tertentu. Untuk  $n = 1$ , kurva elastis merupakan lengkung setengah gelombang sinus. Bentuk ini bersama-sama dengan modus-modus yang sesuai dengan  $n = 2$  dan  $n = 3$ , dapat dilihat dalam Gambar 13-6. Modus-modus yang lebih tinggi tidak mempunyai arti penting dalam persoalan tekukan karena beban kritis terkecil terjadi pada  $n = 1$ .

#### \*13-4 RUMUS EULER UNTUK KOLOM DENGAN PENGEKANG UJUNG YANG BERLAINAN

Prosedur yang sama dengan yang dibahas dalam pasal yang lalu dapat digunakan untuk menentukan beban kritis untuk kolom dengan syarat-syarat batas yang berlainan. Penyelesaian dari soal-soal ini sangat peka terhadap pengekang-pengekang ujung. Tinjaulah umpamanya sebuah kolom dengan satu ujungnya terjepit dan ujung lainnya berpasak seperti yang terlihat dalam Gambar 13-7 (di mana untuk mudahnya diperlihatkan dalam posisi yang mendatar). Dalam hal ini, momen yang tidak diketahui pada ujung jepit dan reaksi-reaksi tumpuan yang diperlukan untuk mempertahankan keseimbangan kolom haruslah dimasukkan ke dalam perhitungan untuk mendapatkan persamaan diferensial kurva elastis pada beban kritis:



**Gambar 13-7**



haruslah dimasukkan ke dalam perhitungan untuk mendapatkan persamaan diferensial kurva elastis pada beban kritis:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{-Pv + M_0(1 - x/L)}{EI} \quad (13-9)$$

Ambil  $\lambda^2 = P/(EI)$  seperti sebelumnya dan dengan mempertukarkan susunan persamaan diperoleh

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \lambda^2 v = \frac{\lambda^2 M_0}{P} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (13-9a)$$

*Penyelesaian homogen* dari persamaan diferensial ini yaitu bila ruas kanan diambil nol, sama dengan yang diberikan dalam Persamaan 13-4. *Jawab khusus*, yang disebabkan oleh ruas kanan yang tidak nol, diberikan dengan membagi suku ruas tersebut dengan  $\lambda^2$ . Penyelesaian lengkap kemudian diberikan sebagai

$$v = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x + (M_0/P)(1 - x/L) \quad (13-10)$$

di mana  $A$  dan  $B$  merupakan tetapan-tetapan tertentu dan  $M_0$  adalah momen yang tidak diketahui pada ujung jepit. Ketiga syarat batas, sebutlah  $v(0) = v(L) = 0$  dan  $v'(0) = 0$  kemudian digunakan dan serupa dengan Persamaan 13-5, kita memperoleh persamaan yang sukar dipahami

$$\lambda L = \tan \lambda L \quad (13-11)$$

yang harus dipenuhi untuk bentuk keseimbangan kolom non-trivial pada beban kritis. Akar terkecil\* dari Persamaan 13-11 adalah

$$\lambda L = 4,493$$

di mana beban kritis yang berhubungan dengan kolom yang satu ujungnya jepit sedang ujung yang lain berpasak adalah

$$P_{cr} = 20,19EI/L^2 = 2,05\pi^2 EI/L^2 \quad (13-12)$$

Dalam kasus sebuah kolom yang kedua ujungnya terjepit, Gambar 13-8(d), beban kritis adalah

$$P_{cr} = 4\pi^2 EI/L^2 \quad (13-13)$$

Kedua persamaan terakhir memperlihatkan bahwa dengan mengekang ujung-ujung, beban kritis sebenarnya naik di atas yang pada kasus dasar, Persamaan 13-7. Di pihak yang lain, batas kritis untuk kolom yang berdiri bebant† (Gambar 13-8(b)) dengan beban

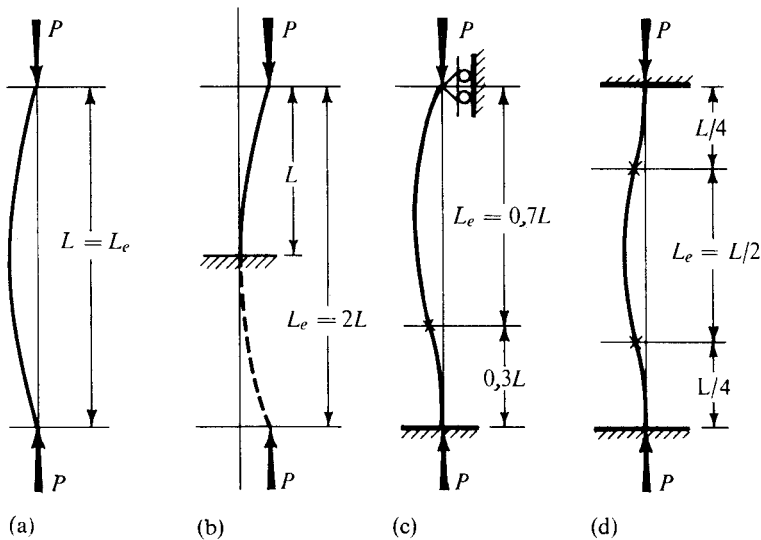
\* Lihat S.P. Timoshenko dan J.M. Gere, *Theory of Elastic Stability* (2nd ed.), New York: McGraw-Hill, 1961.

† Sebuah tiang telepon yang tidak mempunyai penahan luar dan dengan transformator berat pada puncak merupakan suatu contoh.

pada atasnya adalah

$$P_{cr} = \pi^2 EI / (4L^2) \quad (13-14)$$

Dalam kasus yang ekstrim ini beban kritis hanyalah seperempat dari yang untuk kasus dasar.



Gambar 13-8 Panjang efektif kolom dengan pengekang yang berlainan

Semua rumus di atas dapat dibuat kembali ke dalam keadaan kasus dasar, asalkan panjang kolom efektif dipakai sebagai pengganti panjang kolom sesungguhnya. Panjang ini berubah menjadi jarak antara titik-titik infleksi pada kurva elastis atau engsel bila ada. Panjang efektif kolom  $L_e$  (untuk kasus dasar adalah  $L$ ) untuk kasus-kasus yang dibahas di atas masing-masing adalah  $0,7L$ ,  $0,5L$  dan  $2L$ . Untuk kasus yang umum,  $L_e = KL$  di mana  $K$  adalah faktor panjang efektif yang tergantung pada pengekang-pengekang ujung.

Berbeda dengan keadaan klasik yang diperlihatkan dalam Gambar 13-8, batang tekan yang sesungguhnya kadang-kadang betul-betul berpasak atau terjepit sempurna untuk melawan rotasi pada ujung-ujungnya. Sebab ketidak-pastian memandang ketentuan ujung-ujung ini, mengakibatkan kolom sering dianggap mempunyai ujung yang berpasak. Dengan pengecualian pada kasus yang diperlihatkan dalam Gambar 13-8(b) di mana ini tidak dapat digunakan, maka prosedur di atas adalah kadaluarsa.

Persamaan-persamaan di atas menjadi menyesatkan sekali untuk daerah bukan elastis dan harus tidak dipergunakan dalam bentuk yang diberikan (lihat Pasal 13-8).

Rumus-rumus beban kritis untuk kolom benar-benar luar biasa, *karena tidak ada sifat kekuatan bahan yang muncul di sini*, tetapi mereka dapat menentukan daya muat

sebuah kolom. Sifat bahan yang ikut hanyalah modulus elastis  $E$  yang secara fisis menunjukkan karakteristik kekakuan dari bahan.

### \*13-5 TEKUK ELASTIS KOLOM DENGAN MENGGUNAKAN PERSAMAAN DIFERENSIAL DERAJAT EMPAT

Rumus-rumus Euler untuk beban kritis kolom dapat pula diperoleh dengan memecahkan persamaan diferensial derajat empat kurva elastis pada beban kritis dan dengan menggunakan syarat-syarat batas yang sesuai yang tergantung kepada pengekang-pengekang ujung. Persamaan seperti itu dapat diperoleh dengan meninjau keseimbangan sebuah elemen yang kecil\* tidak berhingga seperti yang kita lakukan dalam kasus balok (Bab 11), tetapi di sini cukup dicatat bahwa persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + \lambda^2 \frac{d^2 v}{dx^2} = 0 \quad (13-15)$$

di mana  $\lambda^2 = P/(EI)$  seperti sebelumnya (perhatikan dua diferensiasi berturut-turut dari Persamaan 13-3 atau 13-9a menuju kepada Persamaan 13-15). Jawab persamaan diferensial homogen berderajat empat dan beberapa turunannya diberikan sebagai berikut

$$v = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x + C_3 x + C_4 \quad (13-16a)$$

$$v' = C_1 \lambda \cos \lambda x - C_2 \lambda \sin \lambda x + C_3 \quad (13-16b)$$

$$v'' = -C_1 \lambda^2 \sin \lambda x - C_2 \lambda^2 \cos \lambda x \quad (13-16c)$$

$$v''' = -C_1 \lambda^3 \cos \lambda x + C_2 \lambda^3 \sin \lambda x \quad (13-16d)$$

Untuk kolom berujung pasak, syarat-syarat batas adalah

$$v(0) = 0, \quad v(L) = 0, \quad M(0) = EIv''(0) = 0$$

$$\text{dan} \quad M(L) = EIv''(L) = 0$$

Dengan menggunakan syarat-syarat ini dengan Persamaan 13-16(a) dan (c), kita memperoleh

$$\begin{aligned} C_2 + C_4 &= 0 \\ C_1 \sin \lambda L + C_2 \cos \lambda L + C_3 L + C_4 &= 0 \\ -C_2 \lambda^2 EI &= 0 \\ -C_1 \lambda^2 EI \sin \lambda L - C_2 \lambda^2 EI \cos \lambda L &= 0 \end{aligned}$$

Untuk memenuhi kumpulan persamaan ini,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  dan  $C_4$  dapat dibuat sama dengan nol yang merupakan suatu penyelesaian yang trivial (tidak berguna). Suatu jawab yang non-trivial (berguna) menuntut bahwa determinan koefisien-koefisien persamaan aljabar homogen adalah nol. Karenanya dengan  $\lambda^2 EI = P$ ,

\* Lihat E.P. Popov, *Introduction to Mechanics of Solids*, Englewood Cliffs, N.J. : Prentice-Hall, 1968, hal. 522.

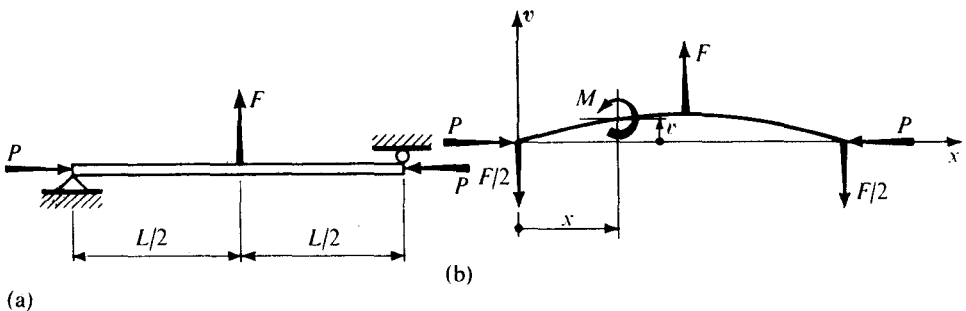
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sin \lambda L & \cos \lambda L & L & 1 \\ 0 & -P & 0 & 0 \\ -P \sin \lambda L & -P \cos \lambda L & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Perhitungan determinan ini membawa kepada  $\sin \lambda L = 0$ , yang secara tepat mempunyai keadaan yang sama dengan yang diberikan oleh Persamaan 13:5.

Pendekatan ini adalah menguntungkan dalam soal-soal dengan syarat-syarat batas yang berbeda di mana gaya aksial dan  $EI$  tetap konstan di seluruh panjang kolom. Metoda tersebut tidak dapat dipergunakan bila gaya aksial meluas hanya dalam sebagian struktur saja.

### \*13-6 ANALISA BALOK-KOLOM

Sebuah balok yang dipengaruhi oleh gaya tekan aksial yang merupakan tambahan terhadap beban terpakai transversal disebut sebagai *balok-kolom* (beam-columns). Pembahasan yang lebih terperinci mengenai pokok ini tidak akan dikemukakan dalam buku ini,\* tetapi suatu kasus yang sederhana akan kita coba untuk menggambarkan pengaruh penting gaya aksial dalam soal-soal seperti ini. Tinjaulah misalnya, sebuah balok-kolom elastis yang mendapat suatu gaya aksial  $P$  dan beban transversal ke atas  $F$  pada tengah-tengah bentangan. Gambar 13-9(a). Diagram benda bebas untuk balok-kolom berdefleksi diperlihatkan dalam Gambar 13-9(b). Diagram ini memperbolehkan perumusan momen lentur total  $M$ , yang mencakup pengaruh gaya aksial  $P$  dikalikan dengan defleksi  $v$ . Momen total dibagi dengan  $EI$  yang dapat dibuat sama dengan pernyataan kurva eksak, Persamaan 11-8. Tetapi kurva ini biasanya akan diambil sebagai  $d^2v/dx^2$ ; yakni pernyataan  $M = EIv''$  dapat diterima. Ini membawakan hasil-hasil yang teliti hanya untuk defleksi dan rotasi kecil dan penerimaan pendekatan ini akan sampai kepada defleksi yang tidak berhingga pada beban kritis.



Gambar 13-9

\* Lihatlah buku mengenai stabilitas: umpamanya S.P. Timoshenko and J.M. Gere, *Theory of Elastic Stability* (2nd ed.), New York: McGraw-Hill, 1961, and A. Chajes, *Principles of Structural Stability Theory*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1974.

Jadi dengan menggunakan hubungan  $M = EIv''$  dan dengan memperhatikan bahwa sisi sebelah kiri dari bentangan  $M = -(F/2)x - Pv$ , kita mendapat

$$EIv'' = M = -Pv - (F/2)x \quad (0 \leq x \leq L/2)$$

atau

$$EIv'' + Pv = -(F/2)x$$

Dengan membagi seluruh persamaan dengan  $EI$  dan mengambil  $\lambda^2 = P/(EI)$ , dan setelah beberapa penyederhanaan, maka persamaan diferensial yang menentukan menjadi

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \lambda^2 v = -\frac{\lambda^2 F}{2P} x \quad (0 \leq x \leq L/2) \quad (13-17)$$

Penyelesaian homogen dari persamaan diferensial ini mempunyai bentuk yang sudah dikenal dari salah satu gerak selaras sederhana; penyelesaian khusus sama dengan ruas kanan dibagi dengan  $\lambda^2$ . Karenanya penyelesaian lengkap adalah

$$v = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x - (F/2P)x \quad (13-18)$$

Tetapan  $C_1$  dan  $C_2$  didapat dari syarat batas  $v(0) = 0$  dan dari syarat simetri  $v'(L/2) = 0$ . Syarat yang terdahulu memberikan

$$v(0) = C_2 = 0$$

Karena

$$v' = C_1 \lambda \cos \lambda x - C_2 \lambda \sin \lambda x - F/(2P)$$

dengan  $C_2$  telah diketahui sama dengan nol, syarat kedua memberikan

$$v'(L/2) = C_1 \lambda \cos \lambda L/2 - F/(2P) = 0$$

atau

$$C_1 = F/[2P\lambda \cos(\lambda L/2)]$$

Dengan memasukkan tetapan ini ke dalam Persamaan 13-18,

$$v = \frac{F}{2P\lambda} \frac{1}{\cos \lambda L/2} \sin \lambda x - \frac{F}{2P} x \quad (13-19)$$

Defleksi maksimum terjadi pada  $x = L/2$ . Jadi setelah beberapa penyederhanaan,

$$v_{\max} = [F/(2P\lambda)](\tan \lambda L/2 - \lambda L/2) \quad (13-20)$$

Dari sini dapat disimpulkan bahwa momen maksimum mutlak, yang terdapat di tengah-tengah bentangan adalah

$$M_{\max} = \left| -\frac{FL}{4} - Pv_{\max} \right| = \frac{F}{2\lambda} \tan \frac{\lambda L}{2} \quad (13-21)$$

Perhatikan bahwa pernyataan yang diberikan oleh Persamaan 13-19, 13-20 dan 13-21 menjadi tidak berhingga bila  $\lambda L/2$  merupakan perkalian dengan  $\pi/2$  karena ini

membuat  $\cos \lambda L/2$  sama dengan nol dan  $\tan \lambda L/2$  yang akan menjadi tidak berhingga. Dengan menyatakan secara aljabar, ini terjadi bila

$$\frac{\lambda L}{2} = \sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} = \frac{n\pi}{2} \quad (13-22)$$

di mana  $n$  adalah bilangan bulat. Dengan memecahkan persamaan ini untuk  $P$ , kita memperoleh besar  $P$  yang menyebabkan defleksi atau momen lentur yang tidak berhingga. Ini berhubungan dengan syarat gaya aksial kritis  $P_{cr}$  untuk batang ini:

$$P_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \quad (13-23)$$

Untuk gaya kritis yang terkecil, bilangan bulat  $n = 1$ . Hasil ini merupakan beban tekukan Euler yang kita bahas dalam Pasal 13-3 dan 13-4.

Adalah penting untuk diperhatikan bahwa momen lentur pada batang yang tipis pada dasarnya bertambah dengan adanya gaya tekan aksial, Persamaan 13-21. Bila gaya-gaya yang demikian ada, defleksi yang disebabkan pembebanan transversal akan diperbesar, seperti yang diberikan oleh Persamaan 13-9 dan 13-20 (misalnya turunkanlah bahwa untuk  $\lambda L/2 = \pi/4$ ,  $v_{max} = FL^3/(36EI) > FL^3/(48EI)$ , di mana terdapat defleksi maksimum tanpa ada  $P$ , yakni  $\lambda = 0$ ). Untuk gaya-gaya tarik, pada pihak lain, defleksi akan berkurang.

### 13-7 PEMBATAHAN RUMUS EULER

Modulus elastis  $E$  telah dipergunakan untuk menurunkan rumus-rumus Euler untuk kolom, karenanya, semua pertimbangan yang dikemukakan sebelum ini berlaku pula, *sedangkan sifat bahan tersebut tetap dalam keadaan elastis linier*. Untuk menghasilkan pembatasan penting ini, Persamaan 13-7 akan ditulis dalam bentuk yang berbeda. Dengan definisi,  $I = Ar^2$ , di mana  $A$  merupakan luas penampang dan  $r$  *jari-jari girasinya* (radius of gyration). Dengan memasukkan hubungan ini ke dalam Persamaan 13-7 diperoleh

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2 E A r^2}{L^2}$$

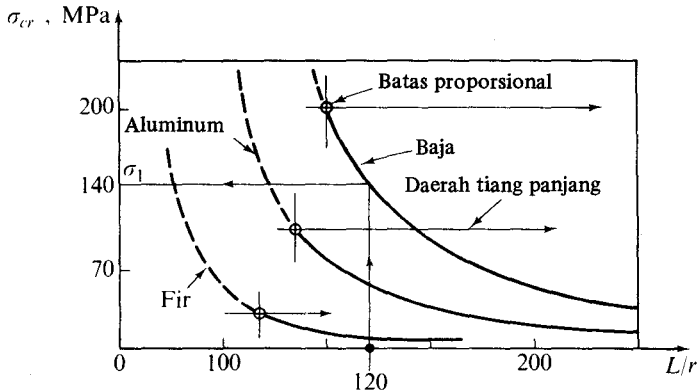
atau

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \quad (13-24)$$

di mana *tegangan kritis*  $\sigma_{cr}$  untuk kolom didefinisikan sebagai  $P_{cr}/A$ , yakni sebagai tegangan rata-rata terhadap luas penampang  $A$  dari kolom pada beban kritis  $P_{cr}$ . Panjang\* kolom adalah  $L$  dan  $r$  adalah jari-jari girasi terkecil dari luas penampang karena rumus Euler yang asli dinyatakan dalam bentuk  $I$  yang minimum. Perbandingan  $L/r$  dari panjang kolom terhadap jari-jari girasi yang terkecil disebut *perbandingan kerampingan* (slenderness ratio) dari kolom. *Tidak ada faktor keamanan yang terdapat dalam persamaan di atas.*

\* Dengan menggunakan panjang efektif  $L_e$ , ungkapan tersebut akan menjadi bersifat umum.

Tafsiran grafis Persamaan 13-24 diperlihatkan dalam Gambar 13-10, di mana tegangan kolom kritis diplot terhadap perbandingan kerampingan untuk tiga bahan yang berlainan. Untuk tiap bahan  $E$  adalah konstan, dan kurva yang dihasilkan adalah hiperbola. Tetapi, karena Persamaan 13-24 berdasarkan kepada sifat elastis dari bahan, maka  $\sigma_{cr}$  yang ditentukan oleh persamaan ini, tidak dapat melebihi batas proporsional suatu bahan. Karenanya hiperbola yang terlihat dalam Gambar 13-10 digambar dengan garis putus-putus di bawah tiap batas proporsional bahan, dan bagian kurva ini *tidak dapat digunakan*. Modifikasi yang diperlukan dari Persamaan 13-24 yang mencakup tanggapan bahan yang tak elastis akan dibahas dalam pasal yang berikut.



**Gambar 13-10** Variasi tegangan kolom kritis beserta perbandingan kerampingan untuk tiga bahan yang berlainan

Bagian hiperbola yang berguna tidak menunjukkan sifat sebuah kolom, tetapi merupakan sifat sejumlah yang tak terhingga dari kolom ideal. Umpamanya, sebuah kolom baja tertentu, katakanlah dengan  $L/r = 120$ , kebanyakan memuat beban dari  $\sigma_1 A$ . Perhatikan pula bahwa  $\sigma_{cr}$  *selalu menurun dengan meningkatnya perbandingan  $L/r$* . Selain itu, perhatikan pula, suatu definisi yang tepat dari panjang kolom sekarang mungkin diperoleh dengan bantuan diagram-diagram ini. Jadi, sebuah kolom dikatakan panjang bila rumus Euler yang elastis berlaku. Permulaan daerah panjang kolom diperlihatkan untuk tiga bahan dalam Gambar 13-10.

### CONTOH 13-1

Tentukanlah panjang terpendek sebuah kolom baja berujung pasak yang mempunyai luas penampang  $60 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}$  untuk mana rumus Euler elastis berlaku. Ambil  $E = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$  dan anggaplah batas proporsional berada pada  $250 \text{ MPa}$ .

### PENYELESAIAN

Momen inersia minimum dari luas penampang  $I_{\min} = (0,100)(0,06)^3/12 = 1,8 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ .  
Jadi

$$r = r_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{1,8 \times 10^{-6}}{(0,06)(0,100)}} = \sqrt{3} \times 10^{-2} \text{ m}$$

Kemudian dengan menggunakan Persamaan 13-24,  $\sigma_{cr} = \pi^2 E / (L/r)^2$ . Pemecahannya untuk perbandingan  $L/r$  pada batas proporsional,

$$\left(\frac{L}{r}\right)^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{cr}} = \frac{\pi^2 (200) 10^9}{(250) 10^6} = 800\pi^2$$

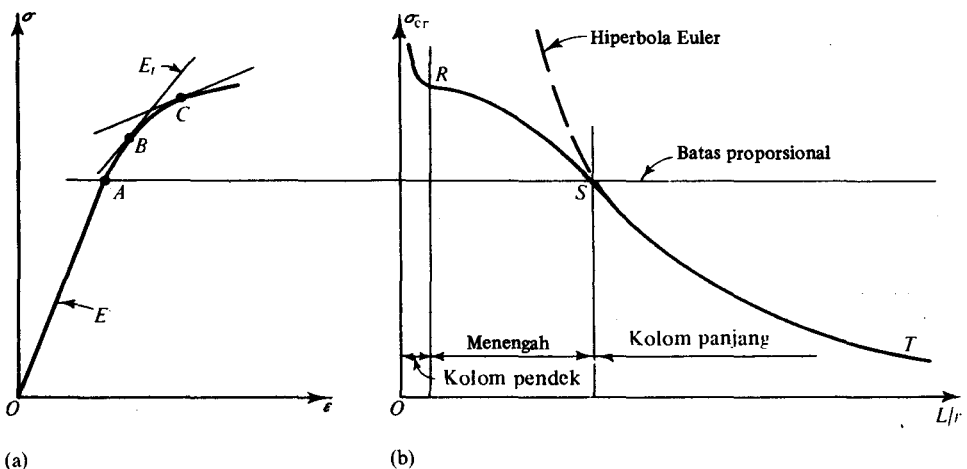
atau  $\frac{L}{r} = 88,9$  dan  $L = (88,9) \sqrt{3} \times 10^{-2} = 1,54 \text{ m}$

Karena itu, bila panjang kolom ini 1,54 m atau lebih, ia akan menekuk secara elastis, karena untuk ukuran kolom tersebut, tegangan kritis pada penekukan tidak akan melebihi batas proporsional bahan tersebut.

### \*13-8 RUMUS BEBAN-TEKUK EULER UMUM

Suatu diagram tegangan-regangan tekan yang khas untuk sebuah spesimen yang di-cegah dari tekukan dinyatakan dalam Gambar 13-11(a). Dalam daerah tegangan antara 0 dan  $A$ , bahan bersifat secara elastis. bila tegangan dalam kolom pada penekukan tidak melampaui batas daerah ini, maka kolom tersebut menekuk dengan elastis. Hiperbola yang dinyatakan oleh Persamaan 13-24,  $\sigma_{cr} = \pi^2 E / (L/r)^2$  berlaku dalam hal seperti itu. Bagian kurva ini diperlihatkan sebagai  $ST$  dalam Gambar 13-11(b). Adalah penting untuk mengenal bahwa kurva ini tidak menunjukkan sifat sebuah kolom, tetapi agak merupakan sifat sejumlah tidak berhingga kolom ideal dengan panjang yang berlainan. Hiperbola di luar daerah yang berguna dalam gambar diperlihatkan sebagai garis putus-putus.

Sebuah kolom dengan perbandingan  $L/r$  yang berkenaan dengan titik  $S$  dalam Gambar 13-11(b) merupakan kolom dari bahan dan ukuran yang diketahui, yang terpendek, yang akan menekuk secara elastis. Kolom yang lebih pendek yang masih mem-



**Gambar 13-11** (a) Diagram tegang-regangan tekan; (b) tegangan kolom kritis vs perbandingan ke-rampingan.



punyai perbandingan  $L/r$  yang lebih kecil, tidak akan menekuk pada batas proporsional bahan. Pada diagram tegangan-regangan tekan. Gambar 13-11(a), ini berarti bahwa tingkat tegangan dalam kolom telah melampaui titik  $A$  dan mungkin telah mencapai beberapa titik  $B$ . Pada tingkat tegangan yang lebih tinggi ini, dapat dikatakan bahwa sebuah kolom dari bahan yang lain telah tercipta, sebab kekakuan bahan tersebut tidak lagi ditunjukkan oleh modulus elastis. Pada titik ini, kekakuan bahan diberikan seketika, oleh garis singgung pada kurva tegangan-regangan, yakni modulus garis singgung  $E_t$ . Kolom tersebut tetap stabil bila kekakuan lenturnya yang baru  $E_t I$  pada titik  $B$  cukup besar dan ia dapat membawa beban yang lebih tinggi. Begitu beban bertambah, tingkat tegangan pun meningkat, sedang modulus garis singgung menjadi turun. Sebuah kolom yang sesungguhnya dari "bahan yang kurang kaku" dapat bekerja di bawah beban yang meningkat. Substitusi modulus garis singgung  $E_t$  untuk modulus elastis  $E$  hanyalah modifikasi yang diperlukan untuk membuat rumus-rumus penekukan elastis berlaku dalam daerah tak elastis. Jadi rumus beban-penekukan Euler yang umum atau rumus modulus garis singgung\* menjadi

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E_t}{(L/r)^2} \quad (13-25)$$

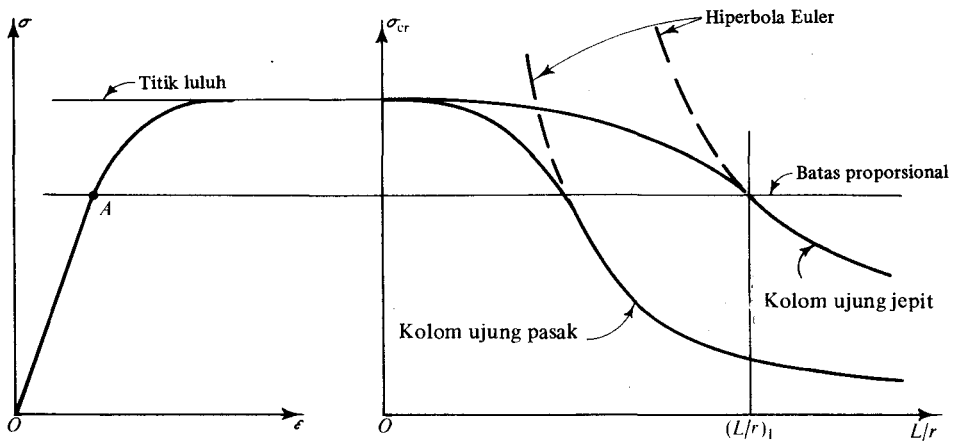
Karena tegangan yang berhubungan dengan modulus garis singgung dapat diperoleh dari diagram tegangan-regangan tekan, maka perbandingan  $L/r$  untuk sebuah kolom yang akan menekuk dengan harga-harga ini dapat diperoleh dari Persamaan 13-25. Suatu plot yang menunjukkan sifat ini untuk perbandingan  $L/r$  yang rendah dan menengah diperlihatkan dalam Gambar 13-11(b) oleh kurva antara  $R$  dan  $S$ . Pengujian-pengujian pada kolom-kolom secara individu dapat menurunkan kurva ini dengan ketelitian yang luar biasa.†

Seperti disebutkan sebelumnya, kolom yang menekuk dengan elastis kadang-kadang disebut *kolom panjang*. Kolom yang mempunyai perbandingan  $L/r$  yang rendah yang pada dasarnya tidak menunjukkan gejala penekukan disebut *kolom pendek*. Pada perbandingan  $L/r$  rendah, bahan-bahan liat dapat "menundukkan" dan membawa beban-beban yang sangat besar.

Bila panjang  $L$  dalam Persamaan 13-25 diperlakukan sebagai panjang efektif sebuah kolom, syarat-syarat ujung yang berlainan akan dapat ditelaah. Prosedur yang berikut ini, untuk maksud-maksud perbandingan, membuat plot tegangan kritis  $\sigma_{cr}$  terhadap perbandingan  $L/r$  untuk kolom yang salah satu ujungnya terjepit sedang ujung lainnya

\* Rumus modulus garis singgung memberikan kapasitas muat dari kolom yang didefinisikan pada saat ia akan menekuk. Bagian kolom berdeformasi lebih lanjut, serat-serat pada sisi yang cembung terus mempertunjukkan kira-kira modulus garis singgung  $E_t$ . Serat-serat pada sisi yang cekung, kehilangan beberapa tegangan dan kembali kekeadaan dengan modulus elastis awal  $E$ . Kenyataan-kenyataan ini sampai kepada penentuan apa yang disebut teori *modulus ganda dari kapasitas muat* beban kolom. Hasil-hasil akhir yang diperoleh dari teori ini tidak berbeda banyak dengan yang diperoleh dari teori modulus garis singgung. Untuk perincian-perincian lebih lanjut dan perbaikan-perbaikan yang perlu lihatlah F.R. Shamkley, "Inelastic Column Theory", *Journal of Aeronautical Sciences*, Vol. 14, no. 5 (May 1947); dan F. Blech, *Buckling Strength of Metal Structures*, New York: McGraw-Hill, 1952).

† Lihat Blech, *Buckling Strength of Metal Structures*, hal. 20.



Gambar 13-12 Perbandingan sifat kolom dengan keadaan ujung yang berbeda

berpasak, seperti yang terlihat dalam Gambar 13-12. Adalah penting untuk diperhatikan bahwa kapasitas muat untuk kedua kasus berbanding 4 dengan 1 hanya untuk kolom yang mempunyai perbandingan  $(L/r)_1$  atau lebih besar. Untuk perbandingan  $L/r$  yang lebih kecil, makin lama makin kurang manfaat yang dapat diambil dari pengekangan ujung-ujung. Pada perbandingan  $L/r$  yang rendah kurva-kurva menjadi menyatu. Kecil perbedaannya bila sebuah "balok pendek" pada ujung-ujungnya diberi pasak atau dijepit, karena kekuatan lebih menentukan sifat tersebut daripada penekukan.

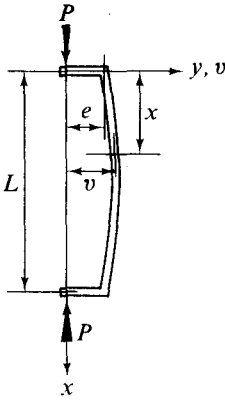
### \*13-9 RUMUS SEKAN

Suatu metoda analisa yang berbeda dapat digunakan untuk menentukan kapasitas sebuah kolom selain yang telah dibahas di atas. Karena tidak ada kolom yang benar-benar lurus dan demikian pula tidak ada gaya terpakai yang benar-benar konsentris, maka sifat kolom yang sesungguhnya dapat dipelajari dengan beberapa cacat statis tertentu ataupun ketidak-segarisan yang mungkin dari beban terpakai. Lalu untuk disain sebuah kolom yang sesungguhnya, yang diistilahkan sebagai "lurus," dapat pula ditentukan kemungkinan bengkok atau eksentrisitas beban efektif. Ada pula banyak kolom di mana beban eksentris dengan sengaja dipakai. Jadi sebuah kolom yang dibebani dengan eksentris dapat dipelajari serta kapasitasnya dapat pula ditentukan berdasarkan tegangan elastis ijin. Usaha ini tidaklah untuk menentukan kapasitas ultimat kolom.

Untuk menelaah sifat sebuah kolom yang dibebani dengan eksentris, tinjaulah kolom yang terlihat dalam Gambar 13-13. Bila titik asal sumbu-sumbu koordinat diambil pada gaya atas  $P$ , maka momen lentur pada suatu irisan adalah  $-Pv$  dan persamaan diferensial untuk kurva elastis sama dengan untuk kolom yang dibebani secara eksentris, yaitu seperti dalam Persamaan 13-2,

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}v$$

Dalam buku ini Titik Luluh sama dengan Titik Leleh atau disebut juga Yield Point



**Gambar 13-13** Kolom yang dibebani secara eksentris untuk menurunkan rumus sekan

di mana dengan mengambil  $\lambda = \sqrt{P/(EI)}$ , jawab umum adalah seperti sebelumnya dalam Persamaan 13-4,

$$v = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x$$

Tetapi, penyelesaian selanjutnya dari soal ini tidak sama dengan yang lalu, karena *syarat-syarat batas sekarang adalah berbeda*. Pada ujung sebelah atas,  $v$  adalah sama dengan eksentritas beban terpakai, yaitu  $v(0) = e$ . Jadi  $B = e$ , dan Persamaan 13-4 menjadi

$$v = A \sin \lambda x + e \cos \lambda x \quad (13-26)$$

Selanjutnya dengan memperhatikan bahwa berdasarkan simetri, kurva elastis mempunyai garis singgung vertikal pada setengah tinggi kolom,

$$v'(L/2) = 0$$

Karenanya dengan membuat turunan Persamaan 13-26 sama dengan nol pada  $x = L/2$  kita peroleh

$$A = e \frac{\sin \lambda L/2}{\cos \lambda L/2}$$

Jadi persamaan kurva elastis adalah

$$v = e \left( \frac{\sin \lambda L/2}{\cos \lambda L/2} \sin \lambda x + \cos \lambda x \right) \quad (13-27)$$

Dalam persamaan ini tidak dapat ketaktentuan dari konstanta-konstanta dan defleksi maksimum  $v_{\max}$  dapat kita peroleh dari persamaan. Defleksi maksimum ini terjadi pada  $L/2$  karena pada titik ini turunan Persamaan 13-27 sama dengan nol. Jadi

$$v(L/2) = v_{\max} = e \left( \frac{\sin^2 \lambda L/2}{\cos \lambda L/2} + \cos \frac{\lambda L}{2} \right) = e \sec \frac{\lambda L}{2}$$

Dalam kolom yang terlihat dalam Gambar 13-13, momen lentur yang terbesar  $M$  terbentuk pada titik defleksi maksimum dan secara numerik sama dengan  $Pv_{\max}$ . Karena itu, berhubung gaya langsung dan momen lentur terbesar diketahui, maka tegangan tekan maksimum yang terjadi dalam kolom (bandingkan ini dengan tegangan rata-rata  $P/A$  yang bekerja pada kolom) dapat dihitung dengan rumus yang biasa, sebagai

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{P}{A} + \frac{Pv_{\max}c}{Ar^2} = \frac{P}{A} \left( 1 + \frac{ec}{r^2} \sec \frac{\lambda L}{2} \right)$$

Tetapi  $\lambda = \sqrt{P/(EI)} = \sqrt{P/(EAR^2)}$ , Jadi

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} \left( 1 + \frac{ec}{r^2} \sec \frac{L}{r} \sqrt{\frac{P}{4EA}} \right) \quad (13-28)$$

Persamaan ini, karena mengandung faktor sekan, dinamakan *rumus sekan untuk kolom* dan berlaku untuk kolom dengan panjang yang sembarang asal saja tegangan maksimum tidak melebihi batas elastis. Syarat eksentrisitas yang sama dari gaya-gaya terpakai dalam arah yang sama mengakibatkan defleksi yang paling besar.

Perhatikanlah bahwa dalam Persamaan 13-28 jari-jari girasi  $r$  tidak dapat minimum, karena ia diperoleh dari harga  $I$  yang bersangkutan dengan sumbu terhadap mana lenturan terjadi. Dalam beberapa kejadian, syarat penekukan yang lebih kritis dapat muncul dalam arah tidak ada eksentrisitas tertentu. Perhatikan pula bahwa dalam Persamaan 13-28 hubungan antara  $\sigma_{\max}$  dan  $P$  tidak linier;  $\sigma_{\max}$  bertambah lebih cepat dari  $P$ . Karena itu jawaban-jawaban untuk tegangan maksimum dalam kolom yang disebabkan oleh gaya-gaya aksial yang berlainan tidak dapat disuperposisikan; malahan gaya-gaya yang harus disuperposisikan lebih dahulu baru kemudian tegangan-tegangan dihitung.

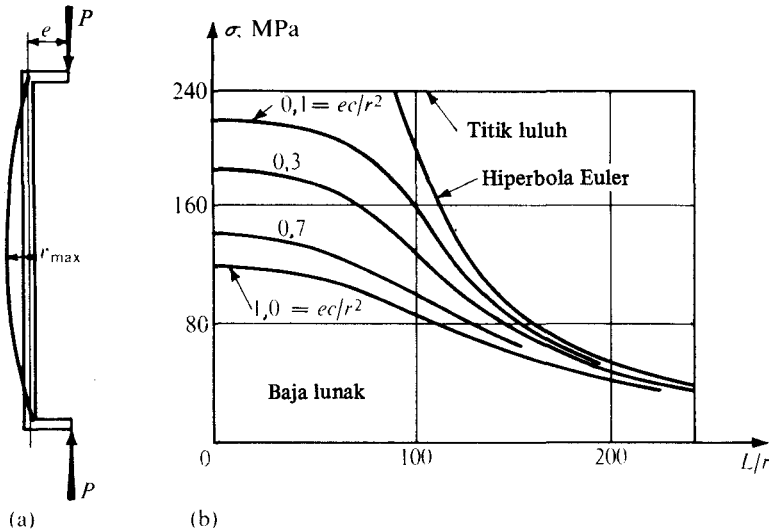
Untuk suatu gaya ijin  $P_a$  pada sebuah kolom, di mana  $n$  merupakan faktor keamanan,  $nP_a$ , harus disubstitusikan untuk  $P$  dalam Persamaan 13-28, sedang  $\sigma_{\max}$  haruslah dibuat pada titik luluh suatu bahan, yaitu

$$\sigma_{\max} = \sigma_{yp} = \frac{nP_a}{A} \left( 1 + \frac{ec}{r^2} \sec \frac{L}{r} \sqrt{\frac{nP_a}{4EA}} \right) \quad (13-29)$$

Prosedur ini memastikan suatu faktor keamanan yang betul untuk gaya terpakai, karena gaya demikian dapat naik menjadi  $n$  kali sebelum tegangan kritis tercapai. Perhatikanlah bahwa faktor  $nP_a$  muncul di bawah tanda akar.

Persamaan 13-28 dan 13-29 telah kita buat, secara matematis persoalan tersebut dapat dipecahkan. Tetapi, penggunaan persamaan-persamaan ini pada disain sangat sukar dilaksanakan. Mereka dapat diselesaikan dengan prosedur-prosedur uji coba (trial and error) atau mereka akan dapat dipelajari secara grafis. Pengkajian yang demikian dapat dilihat dalam Gambar 13-14.\* Dalam plot ini perhatikanlah bahwa eksentrisitas berpengaruh besar pada kolom pendek dan diabaikan pada kolom yang sangat ramping. Grafik macam ini memberikan pertolongan yang sesuai untuk disain yang praktis.

\* Gambar ini diambil dari kertas karya oleh D.H. Young, mengenai "Rational Design of Steel Column", *Trans. ASCE*, 1936, vol. 101, hal. 431. Harga-harga tegangan harus diubah dalam satuan S.I.



**Gambar 13-14** Hasil-hasil analisa dengan rumus sekan untuk kolom-kolom yang belainan

Persamaan sekan mencakup semua daerah panjang kolom. Hambatan paling besar dalam menggunakan rumus ini adalah bahwa kita harus mengandaikan beberapa eksentrisitas  $e$  meskipun untuk balok yang lurus, dan ini merupakan tugas yang sukar.\*

Rumus sekan untuk kolom *pendek* dapat dikembalikan kepada pernyataan yang kita kenal bila  $L/r$  mendekati nol. Untuk kejadian ini, harga sekan mendekati satu, jadi dalam batas tersebut, Persamaan 13-28 menjadi

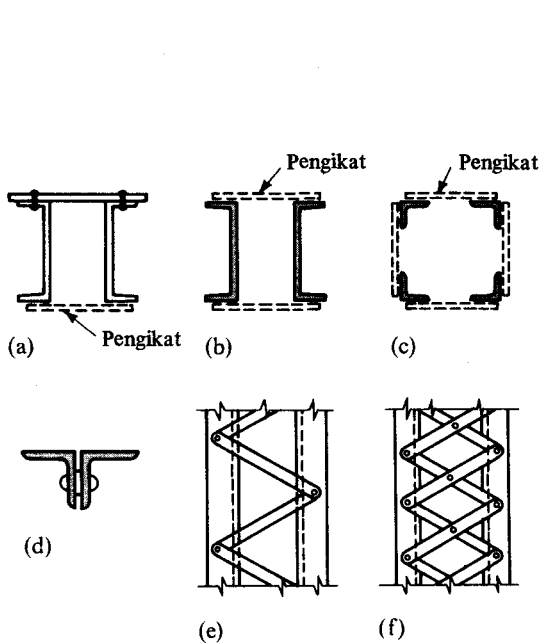
$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{Pec}{Ar^2} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I}$$

yang merupakan hubungan yang biasanya dipakai untuk blok pendek.

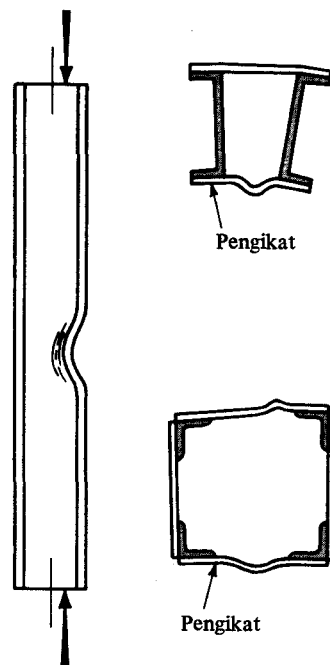
### 13-10 DISAIN KOLOM

Untuk hematnya, luas penampang kolom, selain blok pendek, haruslah mempunyai jari-jari girasi yang sebesar mungkin. Ini memberikan perbandingan  $L/r$  yang lebih kecil, hingga memperbolehkan penggunaan tegangan yang lebih tinggi. Tabung membentuk kolom yang baik sekali. Irisan flens-lebar (yang kadang-kadang disebut irisan H) adalah lebih baik dari irisan I. Dalam kolom yang dibangun dari bentuk rol atau ekstrusi, tiap-tiap potongan direntangkan untuk memperoleh efek yang dikehendaki. Penampang

\* Selain dari itu, ada beberapa pertanyaan mengenai pembetulan secara filosofis rumus sekan. Kenyataan bahwa tegangan mencapai suatu harga tertentu tidaklah berarti bahwa kolom tersebut menekuk yakni dalam setiap kejadian, tegangan bukanlah pengukur beban tekukan. Dapat ditunjukkan bahwa suatu tambahan gaya aksial dapat dilawan di bawah titik di mana tercapainya tegangan maksimum pada irisan kritis. Lihatlah F. Bleich, *Buckling Strength of Metal Structures*, New York: McGraw-Hill, 1952, Bab I.



**Gambar 13-15** Penampang kolom pembangun tertentu

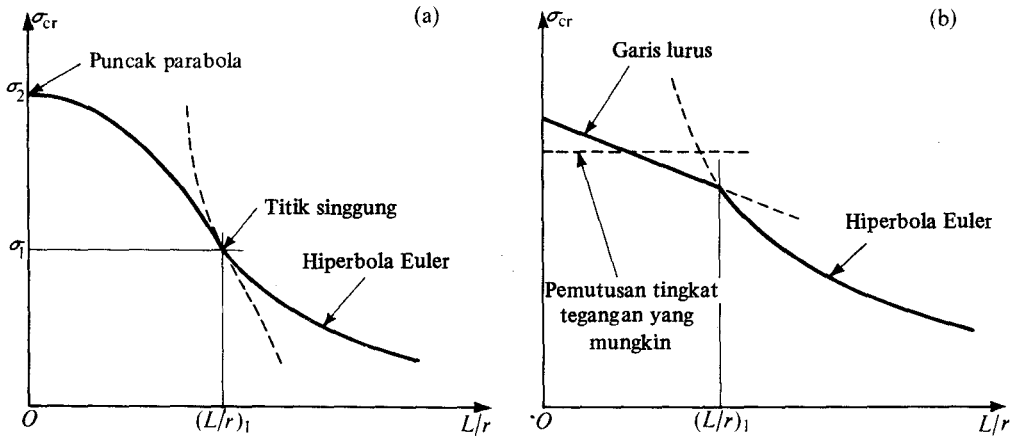


**Gambar 13-16** Contoh ketidak-stabilan lokal dalam kolom

batang tekan dari jembatan tertentu diperlihatkan dalam Gambar 13-15(a) dan (b), untuk tiang pada Gambar 13-15(c), dan untuk kerangka biasa dalam Gambar 13-15(d). Sudut-sudut dalam Gambar 13-15(d) dipisahkan oleh penjarak. Bentuk utama dari Gambar 13-15(a), (b) dan (c) adalah diberi pengikat (atau terali) bersama dengan batang-batang ringan, seperti yang terlihat dalam Gambar 13-15(e) dan (f).

Mendapatkan  $r$  yang besar dengan menempatkan sejumlah bahan tertentu jauh dari titik berat suatu luas, seperti dilukiskan di atas, dapat mencapai suatu batas. Bahan tersebut akan menjadi sangat tipis yang akan kisut secara setempat. Sifat ini disebut *ketidak-stabilan lokal*. Bila kegagalan disebabkan oleh ketidak-stabilan lokal terjadi dalam flens atau pelat komponen sebuah batang, maka batang tekan tersebut akan menjadi tidak berguna. Suatu ilustrasi mengenai penekukan lokal diperlihatkan dalam Gambar 13-16. Hal tersebut biasanya dikarakterisasikan oleh perubahan bentuk penampang. Persamaan yang diturunkan sebelum ini adalah untuk ketidak-stabilan sebuah kolom secara keseluruhan atau ketidak-stabilan utama. Pembicaraan mengenai kemungkinan *ketidak-stabilan puntiran*, yang ditunjukkan oleh pemelintiran seluruh irisan (dalam bentuk ketidak-stabilan utama) berada di luar jangkauan buku ini.

Setelah bertahun-tahun terjadi keadaan yang kacau balau mengenai rumus disain kolom, sekarang gejala penekukan kolom lebih jelas dipahami hanya dengan beberapa rumus yang lazim digunakan. Dalam banyak spesifikasi (syarat) yang dipergunakan secara luas, sepasang rumus diberikan. Suatu rumus diberikan untuk harga-harga  $L/r$  yang



**Gambar 13-17** Kurva penekukan-kolom tertentu untuk disain.

kecil dan menengah; sedang yang satunya lagi untuk kolom-kolom ramping dengan harga  $L/r$  yang besar. Dalam batas harga-harga  $L/r$  yang kecil dan menengah, suatu parabola ataupun garis lurus dengan maksimum yang ditentukan dipakai untuk menerangkan tegangan kritis. Untuk harga-harga  $L/r$  yang besar, digunakan hiperbola Euler untuk tanggapan elastis. Lihat Gambar 13-17. Kadang-kadang persamaan kedua rumus yang saling melengkapi tersebut mempunyai sebuah garis singgung bersama untuk harga  $L/r$  yang dipilih. Beberapa spesifikasi menggunakan pendekatan rumus sekan dengan eksentrisitas yang diandaikan berdasarkan toleransi-toleransi pabrik.

Dalam menggunakan rumus-rumus disain adalah penting untuk mengamati pokok-pokok yang berikut :

1. Bahan untuk rumus ditulis.
2. Apakah rumus tersebut memberikan beban (atau tegangan) kerja atau apakah ia memperhitungkan kapasitas muat ultimat dari sebuah anggota. Bila rumus tersebut dari jenis yang terakhir, maka faktor keamanan harus diikuti sertakan.
3. Batas-batas pemakaian dari rumus tersebut. Beberapa rumus empiris dapat membuat disain menjadi tidak aman bila digunakan di luar batas yang ditentukan (Lihat Gambar 13-17(b)).

### 13-11 RUMUS KOLOM UNTUK PEMBEBANAN TERPUSAT (KONSENTRIS)

Sebagai contoh rumus disain kolom untuk pembebanan konsentris nominal, maka rumus-rumus yang cocok untuk baja, paduan aluminium dan kayu bangunan akan diberikan di bawah. Rumus-rumus untuk kolom-kolom yang dibebani secara eksentris akan ditinjau dalam pasal yang akan datang.

#### Rumus Kolom untuk Baja Bangunan

Institut Baja Konstruksi Amerika (American Institute of Steel Construction)\* mereko-

\* Lihat *AISC Steel Construction Manual* (7th ed.), New York: AISC, 1970. Rumus-rumus AISC yang diberikan di sini adalah konversi lunak dari yang ada dalam Manual.

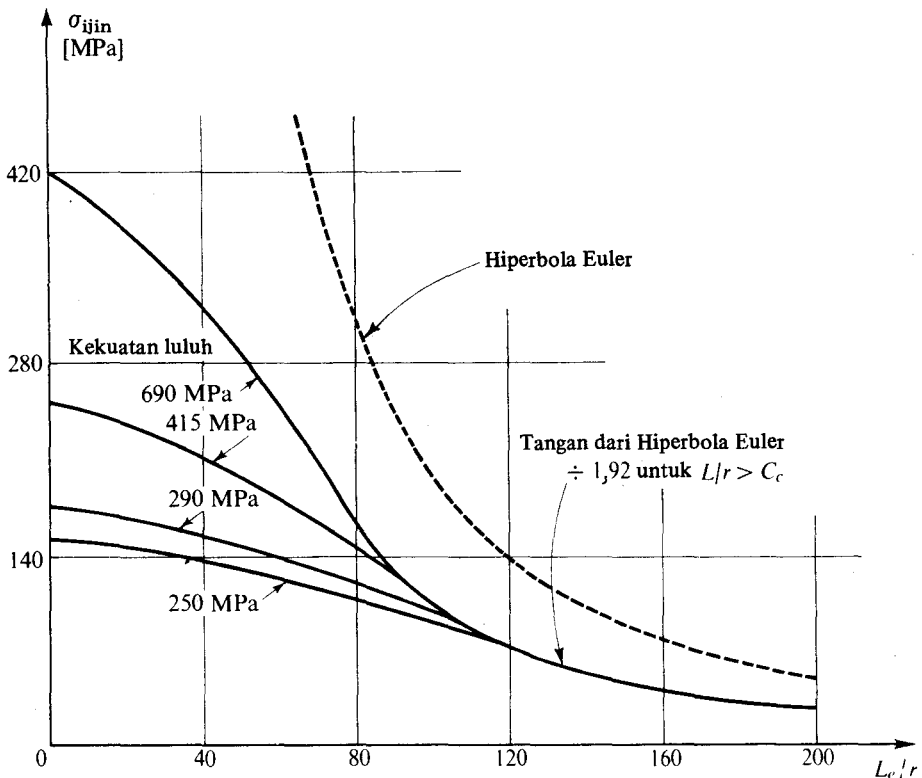
mendasikan penggunaan rumus kolom yang dipolakan pada skema yang dilukiskan dalam Gambar 13-17(a). Karena baja dari berbagai kekuatan luluh yang berbeda dibuat oleh pabrik, maka rumus-rumus dinyatakan dalam bentuk  $\sigma_{yp}$  yang berbeda-beda untuk baja yang berlainan. Modulus elastis  $E$  untuk semua baja hampir sama. Rumus penekukan elastis Euler ditentukan untuk kolom ramping dimulai dengan  $(L/r)_1 = C_c$  yang terjadi pada perbandingan kerampingan untuk separoh tegangan luluh  $\sigma_{yp}$  baja tersebut. Dengan maksud untuk memenuhi pengandaian ini maka dari Persamaan 13-24, diperoleh perbandingan kerampingan  $C_c = (L/r)_1 = \sqrt{2\pi^2 E / \sigma_{yp}}$ . Dengan menggunakan persamaan ini dengan  $E = 200 \times 10^3$  MPa, maka tegangan ijin untuk kolom yang mempunyai perbandingan kerampingan yang lebih besar dari  $C_c$  menjadi

$$\sigma_{ijin} = 1,03 \times 10^6 / (L_e/r)^2 \quad [\text{MPa}] \quad (13-30)$$

di mana  $L_e$  merupakan panjang kolom efektif. Faktor keamanan sebesar 1,92 untuk penekukan sudah tercakup dalam Persamaan 13-30 di atas. Tidak ada kolom yang diperbolehkan melebihi  $L_e/r = 200$ .

Untuk suatu perbandingan  $L_e/r$  yang kurang dari  $C_c$ , AISC menetapkan rumus parabola:

$$\sigma_{ijin} = \frac{[1 - (L_e/r)^2 / (2C_c^2)] \sigma_{yp}}{\text{F.S.}} \quad [\text{MPa}] \quad (13-31)$$



Gambar 13-18 Tegangan ijin untuk kolom yang dibebani secara konsentris perspesifikasi AISC



di mana F.S. adalah faktor keamanan yang didefinisikan sebagai

$$F.S. = \frac{5}{3} + 3(L_e/r)/(8C_c) - (L_e/r)^3/(8C_c^3) \quad (13-32)$$

Sangat menarik untuk diperhatikan bahwa F.S. berubah-ubah, dan lebih konservatif untuk perbandingan  $L_e/r$  yang lebih besar. Persamaan yang dipilih untuk F.S. mendekati seperempat kurva sinus dengan harga 1,67 pada  $L_e/r$  nol dan 1,92 pada  $C_c$ . Suatu grafik tegangan ijin versus perbandingan kerampingan untuk kolom-kolom yang dibebani secara aksial untuk berbagai macam baja bangunan dapat dilihat dalam Gambar 13-18.

### Rumus Kolom untuk Paduan Alumunium

Sejumlah besar paduan alumunium tersedia untuk penggunaan dalam teknik. Kekuatan-kekuatan luluh dan ultimat dari paduan-paduan itu bervariasi dalam batas daerah yang ditinjau, tetapi modulus elastis untuk paduan agak konstan.

Persatuan Alumunium (Aluminum Association) merekomendasikan kurva-kurva kekuatan kolom yang serupa dengan Gambar 13-17(b). Sebagai contoh, diambil dari sejumlah besar kasus dalam Manual Konstruksi Alumunium,\* tinjaulah sebuah paduan ekstrusi 2014-T6. Untuk kolom pendek digunakan harga tegangan ijin yang konstan

$$\sigma_{ijin} = 205 \text{ [MPa]} \quad (L/r \leq 10) \quad (13-33a)$$

Suatu garis lurus miring digunakan untuk harga  $L/r$  yang menengah

$$\sigma_{ijin} = 222 - 1,7L/r \text{ [MPa]} \quad (10 \leq L/r \leq 54) \quad (13-33b)$$

Sedang untuk kolom yang panjang hiperbola Euler yang digunakan

$$\sigma_{ijin} = 380 \times 10^3 / (L/r)^2 \text{ [MPa]} \quad (L/r \geq 54) \quad (13-33c)$$

Panjang yang digunakan dalam rumus-rumus di atas adalah panjang kolom yang sesungguhnya. Pengecualian hanya untuk kolom kantilever di mana digunakan dua kali panjang yang sesungguhnya.

### Rumus Kolom untuk Kayu

Persatuan Pabrik Kayu Nasional (The National Lumber Manufacturer Association)\* merekomendasikan penggunaan rumus beban-penekukan Euler untuk kolom kayu padat. Menurut rekomendasi tersebut tegangan ijin adalah

$$\sigma_{ijin} = \pi^2 E / [2,727(L/r)^2] = 3,619E / (L/r)^2 \quad (13-34)$$

\* *Aluminum Construction Manual*, New York: Aluminum Association, 1970, hal. 17. Rumus-rumus yang diberikan di sini merupakan konversi lunak dari yang ada dalam Manual.

† *NLMA National Design Specification*, Washington D.C.: National Lumber Manufacturers Association, 1962.

Di sini tegangan ijin tidak dapat melebihi harga untuk blok pendek tekan yang sejajar dengan urat untuk species kayu tertentu. Tegangan-tegangan ini bertambah untuk pembebanan jangka waktu pendek dan berkurang untuk pembebanan yang ditahan (lama). Rumus ini berlaku untuk keadaan kolom yang berujung pasak dan berpenampang "bujursangkar".

Untuk kolom berpenampang bujursangkar atau empat persegipanjang Persamaan 13-34 menjadi

$$\sigma_{ijin} = 0,30E/(L/d)^2 \quad (13-35)$$

di mana  $d$  adalah ukuran sisi batang yang terpendek.

### CONTOH 13-2

Hitunglah beban-beban tekan aksial ijin untuk sebuah siku paduan aluminium 76 × 51 × 6,4 mm yang panjangnya 1100 mm bila ia bekerja sebagai kolom yang berujung pasak.

### PENYELESAIAN

Perbandingan ukuran siku paduan aluminium sama dengan yang dari baja. Jadi dari Tabel 7 pada Lampiran, siku dengan ukuran ini mempunyai jari-jari girasi terkecil  $r = 11,0$  mm dan luasnya  $A = 768$  mm<sup>2</sup>. Karena  $L = 1100$  mm, maka  $L/r = 1100/11,0 = 100$ . Jawab menyusul dengan menggunakan Persamaan 13-32

$$\sigma_{ijin} = \frac{380\,000}{(L/r)^2} = 38 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{ijin} = A\sigma_{ijin} = 768 \times 38 = 29\,200 \text{ N}$$

### CONTOH 13-3

Dengan menggunakan rumus-rumus kolom AISC, pilihlah sebuah kolom berujung pasak yang panjangnya 4,5 m untuk membawa beban konsentris dari 900 kN. Baja bangunan adalah A441, mempunyai  $\sigma_{yp} = 345$  MPa.

### PENYELESAIAN

Ukuran kolom yang diperlukan dapat diperoleh langsung dari tabel-tabel dalam AISC Steel Construction Manual. Tetapi, contoh ini memberikan kesempatan untuk memperlihatkan prosedur uji-coba yang acapkali dibutuhkan dalam disain dan penyelesaian yang akan dikemukakan menyusul penggunaan metoda ini.

*Coba pertama:* Ambil  $L/r = 0$  (pengandaian sederhana untuk kolom yang panjangnya 4,5 m). Kemudian, dari Persamaan 13-31, karena F.S. =  $\frac{5}{3}$ ,  $\sigma_{ijin} = 345/(F.S.) = 207$  MPa dan  $A = P/\sigma_{ijin} = 900 \times 10^3/207 = 4350$  mm<sup>2</sup>. Dari Tabel 4 dalam Lampiran, hal ini membutuhkan irisan W 200 × 36, yang mempunyai  $r_{min} = 40,8$  mm. Jadi  $L/r = 4500/40,8 = 110$ . Dengan  $L/r$  ini, tegangan ijin didapat dengan menggunakan Persamaan 13-30 atau 13-31, yang mana dipakai tergantung pada  $C_c$ :

$$C_c = \sqrt{2\pi^2 E/\sigma_{yp}} = \sqrt{2\pi^2 \times 200 \times 10^3/345} = 107 < L/r = 110$$

Jadi

$$\sigma_{ijin} = 1,03 \times 10^6/(110)^2 = 85,1 \text{ MPa}$$

Ini jauh lebih kecil dari tegangan yang diandaikan semula sebesar 207 MPa, hingga irisan yang lain haruslah dipilih pula.

*Coba kedua:* Ambil  $\sigma_{ijin} = 85,1$  MPa seperti yang diperoleh di atas. Kemudian  $A = 900.000/85,1 = 10.600 \text{ mm}^2$  yang membutuhkan sebuah irisan W 200 x 86 yang mempunyai  $r_{min} = 53,2$  mm. Sekarang  $L/r = 4500/53,2 = 84,6$  yang lebih kecil dari  $C_c$  yang didapat di atas. Karena itu Persamaan 13-31 berlaku, dan

$$F.S. = \frac{5}{8} + 3(84,6)/(8 \times 107) - (84,6)^3/(8 \times 107^3) = 1,90$$

dan

$$\sigma_{ijin} = [1 - (84,6)^2/(2 \times 107^2)]345/(1,90) = 125 \text{ MPa}$$

Tegangan ini memerlukan  $A = 900.000/125 = 7200 \text{ mm}^2$ , yang dipenuhi oleh irisan W 200 x 60 dengan  $r_{min} = 51,8$  mm. Suatu perhitungan kapasitas irisan ini memperlihatkan bahwa beban aksial ijin untuknya adalah 926 kN yang memenuhi persyaratan persoalan tersebut.

### \*13-12 RUMUS KOLOM UNTUK PEMBEBANAN EKSENTRIS

Dalam praktek, kolom-kolom didisain untuk beban yang mungkin terpakai secara eksentris atau disengaja ataupun disebabkan oleh alasan-alasan kebetulan. Rumus jenis sekan yang dibahas dalam Pasal 13-9 telah dipakai dalam masa yang lalu sebagai pendekatan yang rasionil pada disain kolom yang demikian. Tetapi hasil-hasil tersebut terlalu usang dan lagi rumus-rumus tersebut agak susah untuk dipakai. Selain dari itu, dua metoda yang lain, yang telah diterima dalam praktek, akan dibahas pula dalam pasal ini.

#### Pendekatan Tegangan Ijin

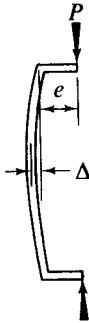
*Tegangan tekan maksimum* dalam kolom yang dibebani dengan eksentris dapat dihitung secara perkiraan seperti yang dilakukan dengan blok pendek, yaitu

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{P}{A} + \frac{Pec}{I} \quad (13-36)$$

di mana  $Pe$  merupakan momen lentur yang disebabkan oleh beban terpakai. Kolom kemudian dapat didisain hanya dengan membuat tegangan maksimum ini *menjadi tegangan kolom ijin* seperti yang diberikan oleh salah satu rumus untuk kolom yang dibebani secara aksial. Prosedur disain yang dihasilkan biasanya agak konservatif, tetapi mempunyai manfaat yang sangat mudah dilakukan. Umpamanya, dengan menggunakan Persamaan 13-33 untuk paduan aluminium 2014-T6 dan membatasi  $L/r$  kurang dari atau sama dengan 54.

$$\sigma_{max} = \sigma_{ijin} = 222 - 1,7L/r = \frac{P}{A} + \frac{Pec}{I}$$

Metoda ini hanya berlaku untuk kolom-kolom dengan  $L/r$  yang cukup, karena momen lentur kedua (tambahan) yang disebabkan oleh defleksi elastis tidak dapat diabaikan untuk batang-batang yang panjang dan ramping, lihat Gambar 13-19. Teori



Gambar 13-19 Kolom yang dibebani secara eksentris

balok-kolom yang hanya dengan singkat dibahas dalam Pasal 13-6 (lihat Gambar 13-9) diperlukan untuk menghadapi batang ramping tersebut.

### Pendekatan Interaksi<sup>1</sup>

Dalam kolom yang dibebani secara eksentris, banyak dari tegangan total dihasilkan oleh momen terpakai. Tetapi, *tegangan ijin dalam lenturan biasanya lebih tinggi dari tegangan aksial ijin*. Jadi untuk kolom tertentu, dikehendaki untuk mengerjakan beberapa keseimbangan antara dua tegangan, tergantung pada besar relatif momen lentur dan gaya aksial. Jadi karena dalam lenturan,  $\sigma = Mc/I = Mc/Ar_1^2$  di mana  $r_1$  adalah jari-jari girasi dalam *bidang lenturan*, sedang luas  $A_b$  yang diperlukan oleh momen lentur  $M$  adalah

$$A_b = \frac{Mc}{\sigma_{ab} r_1^2}$$

di mana  $\sigma_{ab}$  adalah *tegangan lentur maksimum ijin*. (Lihat pula Pasal 13-13). Dengan cara yang sama, luas  $A_a$  yang dibutuhkan untuk gaya aksial  $P$  adalah

$$A_a = \frac{P}{\sigma_{aa}}$$

di mana  $\sigma_{aa}$  adalah *tegangan aksial ijin rata-rata untuk batang yang berlaku sebagai kolom*, dan yang tergantung pada perbandingan  $L/r$ . Karenanya luas *total* yang dibutuhkan untuk sebuah kolom yang memperoleh gaya aksial dan momen lentur adalah

$$A = A_a + A_b = \frac{P}{\sigma_{aa}} + \frac{Mc}{\sigma_{ab} r_1^2} \quad (13-37)$$

Bila dibagi dengan  $A$ ,

$$\frac{\frac{P}{A}}{\sigma_{aa}} + \frac{\frac{Mc}{Ar_1^2}}{\sigma_{ab}} = 1 \quad \text{atau} \quad \frac{\sigma_a}{\sigma_{aa}} + \frac{\sigma_b}{\sigma_{ab}} = 1 \quad (13-38)$$

di mana  $\sigma_a$  adalah tegangan aksial yang disebabkan oleh beban vertikal terpakai dan  $\sigma_b$  adalah tegangan lentur yang disebabkan oleh momen terpakai. Bila sebuah kolom

hanya memuat beban aksial saja sedang momen terpakai adalah nol, maka rumus di atas menunjukkan bahwa kolom tersebut didisain untuk tegangan  $\sigma_{aa}$ . Di pihak lain, tegangan ijin menjadi tegangan lentur  $\sigma_{ab}$  bila tidak ada gaya tekan langsung yang bekerja pada kolom tersebut. Antara kedua kejadian ekstrim ini, Persamaan 13-38 mengukur kepentingan relatif kedua macam aksi tersebut dan menentukan hakekat interaksi keduanya. Karenanya rumus ini sering disebut *rumus interaksi* dan berguna sebagai dasar untuk spesifikasi dalam manual AISC, di mana dinyatakan bahwa jumlah perbandingan kedua tegangan ini haruslah tidak lebih dari satu. Filsafat yang serupa itu mendapat kemurahan dalam penggunaan-penggunaan lain daripada yang mengenai baja bangunan. Aluminum Association (Amerika Serikat) mengusulkan hubungan yang serupa. Laboratorium Hasil-hasil Hutan mengembangkan serangkaian rumus yang menjalankan tujuan yang sama.

Dalam bentuk notasi yang digunakan oleh AISC, Persamaan 13-38 ditulis kembali sebagai

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{f_b}{F_b} \leq 1.0 \quad (13-39)$$

Dalam praktek, eksentrisitas beban pada kolom dapat sedemikian rupa sehingga mengakibatkan momen lentur terhadap kedua sumbu penampang. Persamaan 13-39 lantas dimodifikasikan menjadi

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{f_{bx}}{F_{bx}} + \frac{f_{by}}{F_{by}} \leq 1.0 \quad (13-40)$$

Tanda-tanda huruf  $x$  dan  $y$  bergabung dengan tanda huruf  $b$  menunjukkan sumbu lentur terhadap mana tegangan tertentu bekerja dan

$F_a$  = tegangan aksial ijin bila hanya gaya aksial saja yang ada

$F_b$  = tegangan lentur tekan ijin bila momen lentur saja yang ada

$f_a$  = tegangan aksial yang dihitung

$f_b$  = tegangan lentur yang dihitung

Pada titik-titik yang ditahan dalam bidang lenturan,  $F_a$  sama dengan 60 persen  $F_y$ , tegangan luluh bahan, dan

$$\frac{f_a}{0.6F_y} + \frac{f_{bx}}{F_{bx}} + \frac{f_{by}}{F_{by}} \leq 1.0 \quad (13-41)$$

Pada titik-titik bagian tengah dari panjang batang tekan itu momen lentur kedua yang disebabkan oleh defleksi (lihat Gambar 13-19) dapat memberikan pengaruh yang berarti kepada tegangan gabungan. Berdasarkan spesifikasi AISC, maka pengaruh ini dapat diabaikan dalam hal di mana  $f_a/F_a$  lebih kecil dari 0,15, yaitu tegangan aksial adalah kecil dalam hubungan tegangan aksial ijin, dan selama Persamaan 13-41 masih dapat dipergunakan. Bila  $f_a/F_a$  lebih besar dari 0,15, maka efek momen lentur sekunder tambahan dapat dihitung dengan mengalikan  $f_{bx}$  dan  $f_{by}$  dengan *faktor amplifikasi* (amplification factor),  $C_m/[1 - (f_a/F_c)]$ , ke dalam perhitungan ini telah termasuk perbandingan kerampingan dalam bidang lenturan dan juga sifat dasar momen ujung. Suku yang terdapat

pada penyebut faktor amplifikasi mengikutkan efek perbandingan kerampingan melalui penggunaan  $F'_e$  dan tegangan tekuk Euler (menggunakan  $L_e/r$  pada bidang lentur) yang dibagi dengan 23/12 atau 1,92, yaitu faktor keamanan AISC untuk kolom yang sangat panjang dengan  $L_e/r$  yang lebih besar dari  $C_c$ . (Lihat Pasal 13-11 untuk definisi  $C_c$ ). Dapat diperhatikan bahwa faktor amplifikasi menjadi besar bila  $f_a$  bertambah dan *meledak* bila  $f_a$  mendekati  $F'_e$ . Suku  $C_m$  pada pembilang faktor amplifikasi merupakan faktor koreksi yang di dalamnya telah diperhitungkan sikap dan perbandingan antara momen-momen ujung. Bila momen ujung menyebabkan terjadi kurva tunggal dari batang, maka suku  $C_m$  menjadi lebih besar, dan bila yang terjadi adalah kurva yang terbalik, maka faktor ini menjadi lebih kecil. Lalu rumus  $f_a/F_a > 0,15$  menjadi

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{C_{mx}f_{bx}}{(1 - (f_a/F'_{ex}))F_{bx}} + \frac{C_{my}f_{by}}{(1 - (f_a/F'_{ey}))F_{by}} \leq 1,0 \quad (13-42)$$

Menurut spesifikasi AISC,\* harga  $C_m$  akan diambil sebagai berikut :

1. Untuk batang tekan dalam kerangka yang mengalami perpindahan sambungan (menyamping),  $C_m = 0,85$ .
2. Untuk batang tekan dalam kerangka pengekang yang bertahan terhadap perpindahan sambungan dan tidak mengalami pembebanan transversal antara tumpuan-tumpuannya pada bidang lenturan,

$$C_m = 0,6 - 0,4(M_1/M_2)$$

(tetapi tidak lebih kecil dari 0,4) di mana  $M_1/M_2$  merupakan perbandingan momen-momen yang terkecil terhadap yang terbesar pada ujung-ujung batang yang tidak ditahan pada bidang lentur yang sedang ditinjau.  $M_1/M_2$  adalah positif bila batang itu dibengkokkan dalam kurva yang terbalik dan negatif bila dibengkokkan dalam kurva tunggal.

3. Untuk batang kerangka tekan yang ditahan terhadap perpindahan sambungan dalam bidang lenturan yang mengalami pembebanan transversal antara tumpuan-tumpuannya, maka harga  $C_m$  dapat ditentukan dengan analisa rasional. Tetapi sebagai pengganti analisa tersebut, harga-harga berikut dapat dipergunakan: (a) untuk batang yang ujung-ujungnya pengekang,  $C_m = 0,85$ ; (b) untuk batang yang ujungnya bukan pengekang,  $C_m = 1,0$ .

#### CONTOH 13-4

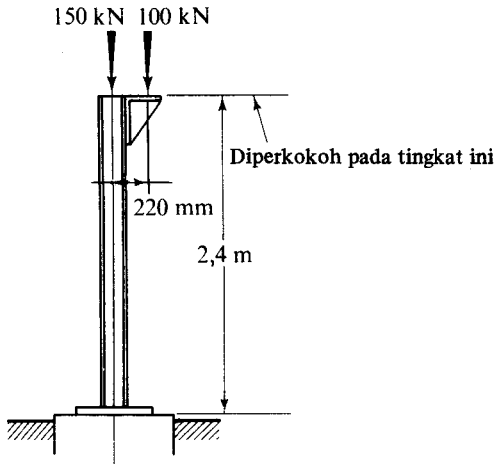
Pilihlah sebuah kolom aluminium untuk pembebanan yang terlihat dalam Gambar 13-20 dengan metoda tegangan ijin dengan menggunakan Persamaan 13-33.

#### PENYELESAIAN

Dalam soal ini, hubungan yang berikut haruslah dipenuhi:

$$\frac{(150 + 100)10^3}{A} + \frac{100 \times 10^3(220)}{S} \leq \sigma_{ijin}$$

\* AISC Steel Construction Manual (7th ed.), New York: AISC, 1970, hal. 5-23.



Gambar 13-20

atau

$$\frac{250 \times 10^3}{A} + \frac{22 \times 10^6}{S} \leq 222 - 1,7L/r$$

di mana  $r$ ,  $A$  dan  $S$  tergantung kepada kolom yang dipilih. Prosedur uji coba dipergunakan untuk memecahkan persoalan ini.

**Coba Pertama:** Ambillah tegangan maksimum yang disebabkan oleh beban sama dengan tegangan ijin yang sesuai dengan  $L/r = 0$  (meskipun ia merupakan pengandaian yang kurang sempurna untuk kolom sepanjang 2,4 m). Kemudian

$$\frac{250 \times 10^3}{A} + \frac{22 \times 10^6}{S} = 222$$

atau dengan mendefinisikan  $A/S = B$ , di mana  $B$  dinamakan *faktor lentur*,\*

$$\frac{250 \times 10^3}{A} + \frac{22 \times 10^6 B}{A} = 222$$

Dari mana  $A = (250 \times 10^3 + 22 \times 10^6 B)/222 = 3108 \text{ mm}^2$  bila  $B$  dianggap 0,02. Cobalah irisan 200 WF 8,78\* dengan  $B_x = 0,014$ ,  $r_{\min} = 31,0 \text{ mm}$  dan  $A = 3232 \text{ mm}^2$ .

Jadi  $L/r = 2400/31 = 77$

$$\sigma_{ijin} = 222 - (1,7)(77) = 91,1 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{pembebanan} = 250 \times 10^3/(3232) + 22 \times 10^6(0,014)/(3232) = 173 \text{ MPa}$$

\* Coba pertama dapat pula dibuat dengan mengabaikan sama sekali momen lentur tetap akan menghasilkan perhitungan yang tepat. Faktor lentur  $B_x$  sekitar sumbu-x dan  $B_y$  sekitar sumbu-y terdaftar dalam manual konstruksi aluminium dan baja.

\* Irisan-irisan aluminium dibentuk dengan pertama-tama memberikan kedalaman dalam milimeter, disusul dengan WF yang berarti balok flens lebar, dan terakhir dengan memberikan massa dalam kilogram per meter linier. Ukuran irisan baja dan aluminium acapkali hampir sama betul. Sifat-sifat geometris dari 200 WF 8,78 yang hampir sesuai dengan irisan baja W 200  $\times$  25 terdaftar dalam Tabel 4 dari Lampiran.

Tegangan-tegangan tidak sesuai sama sekali; jadi suatu irisan yang lebih besar harus dicoba lagi.

*Coba Kedua:* Irisan 200 WF 12,38† dengan harga rata-rata  $B_x = 0,0134$ ,  $r_{\min} = 40,8$  mm dan  $A = 4555$  mm<sup>2</sup>. Jadi  $L/r = 2400/40,8 = 58,8$  dan

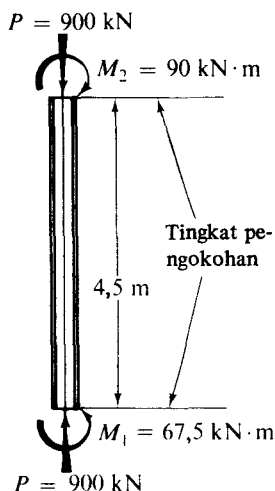
$$\sigma_{\text{ijin}} = 222 - (1,7)(58,8) = 122 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{pembebanan}} = 250 \times 10^3 / 4555 + 22 \times 10^6 (0,0134) / (4555) = 120 \text{ MPa}$$

Karena itu irisan 200 WF 12,38 ini memenuhi.

### CONTOH 13-5

Dengan menggunakan spesifikasi AISC, pilihlah sebuah kolom baja untuk pembebanan yang terlihat dalam Gambar 13-21, dengan menganggap bahwa ia ditahan pada ujung-ujungnya terhadap pelenturan kesamping dalam kedua bidang lenturannya. Anggaplah  $E = 200 \times 10^3$  MPa,  $F_y = 345$  MPa dan  $F_b = 207$  MPa.



Gambar 13-21

### PENYELESAIAN

Dalam soal ini, rumus-rumus interaksi Persamaan 13-39 atau Persamaan 13-42 haruslah dipenuhi, tergantung apakah  $f_a/F_a$  lebih kecil atau lebih besar dari 0,15. Pemecahan dilakukan dengan prosedur uji coba seperti digariskan di bawah.

*Coba Pertama:* Ambil  $L_e/r = 0$ , meskipun ini merupakan pengandaian yang kurang sempurna untuk kolom sepanjang 4,5 m. Sehubungan dengan harga perbandingan kerampingan ini,  $F_a$  dapat dihitung dengan menggunakan Persamaan 13-31, karena  $F_a = 345/(5/3) = 207$  MPa. Luas irisan yang diperlukan lalu dapat dihitung dengan menggunakan Persamaan 13-40:

$$1,0 \geq \frac{f_a}{F_a} + \frac{f_b}{F_b} \quad \text{atau} \quad A \geq \frac{Af_a}{F_a} + \frac{Af_b}{F_b}$$

† Sifat-sifat 200 WF 12,38 berhubungan dekat dengan irisan baja W 200 × 36 yang terdaftar dalam Tabel 4 dari Lampiran.



Karena

$$f_b = \frac{M}{S_x} = \frac{M}{A} \frac{A}{S_x} = \frac{M}{A} B_x \quad \text{dan} \quad f_a = \frac{P}{A}$$

$$A \geq \frac{P}{F_a} + \frac{M}{F_b} B_x$$

Untuk salah satu kedalaman irisan harga  $B_x$  tidak bervariasi dengan baik. Karenanya bila sebuah irisan W 250 dipilih, maka harga  $B_x$  tertentu adalah sekitar 0,0104 (periksalah beberapa harga  $A/S_x$  dalam Tabel 4 dari Lampiran). Kemudian

$$A = \frac{900 \times 10^3}{207} + \frac{(90 \times 10^6)(0,0104)}{207} = 8870 \text{ mm}^2$$

Pilihlah sebuah irisan W 250 x 73 dengan  $A = 9290 \text{ mm}^2$ ,  $r_{\min} = 64,5 \text{ mm}$ ,  $r_x = 110 \text{ mm}$  dan  $B_x = 0,0104$ , serta lakukan perhitungan yang perlu dalam penurunan bila rumus interaksi yang sesuai (Persamaan 13-40 atau Persamaan 13-42) dipenuhi.

$$f_a = \frac{P}{A} = \frac{900 \times 10^3}{9290} = 96,9 \text{ MPa},$$

$$f_b = \frac{MB_x}{A} = \frac{(90 \times 10^6)(0,0104)}{9290} = 101 \text{ MPa}$$

$$\frac{L_e}{r_{\min}} = \frac{4500}{64,5} = 69,8 < C_c \quad (C_c = \sqrt{2\pi^2 E/F_y} = 107)$$

Dengan menggunakan Persamaan 13-31,  $F_a = 144 \text{ MPa}$ ,  $f_a/F_a = 96,9/144 = 0,67 > 0,15$ ; jadi rumus interaksi Persamaan 13-42 haruslah diperiksa. Untuk maksud ini, dengan menggunakan  $L_e/r_x$  dalam bidang lenturan, kita menentukan

$$F'_c = \frac{12\pi^2 E}{23(L_e/r_x)^2} = \frac{1,03 \times 10^6}{(4500/110)^2} = \frac{103 \times 10^6}{(40,9)^2} = 616 \text{ MPa}$$

Maka oleh karena momen-momen ujung membuat kolom mempunyai kurva tunggal,  $M_1/M_2 = -67,5/90 = -0,75$  dan

$$C_m = 0,6 - 0,4M_1/M_2 = 0,6 - (0,4)(-0,75) = 0,9$$

Dengan lenturan hanya terjadi dalam satu bidang saja. Persamaan 13-42 disederhanakan menjadi

$$\frac{F_a}{f_a} + \frac{C_m f_b}{(1 - f_a/F'_c)F_b} \leq 1,0$$

Dengan melakukan substitusi besaran-besaran yang sesuai ke dalam hubungan ini,

$$\frac{96,9}{144} + \frac{0,9(101)}{(1 - 96,9/616)(207)} = 0,67 + 0,52 = 1,19 > 1,0$$

Karena Persamaan 13-42 dilanggar, hal ini tidak dapat diterima, hingga suatu irisan yang lebih besar perlu digunakan.

*Coba Kedua:* Sebagai pertolongan dalam memilih irisan yang besar, anggaplah  $F_a = 144 \text{ MPa}$ , yaitu harga yang dihitung untuk irisan yang terdapat pada coba pertama. Juga dengan menggunakan  $B_x = 0,0104$  untuk irisan W 250,

$$A \geq \frac{P}{F_a} + \frac{MB_x}{F_b} = \frac{900 \times 10^3}{144} + \frac{90 \times 10^6(0,0104)}{207} = 10\,800 \text{ mm}^2$$

Pilihlah sebuah irisan W 250 × 89 dengan  $A = 11420 \text{ mm}^2$ ,  $r_{\min} = 65,3 \text{ mm}$ ,  $r_x = 112 \text{ mm}$  dan  $B_x = 0,0104$  dan lakukan seperti dalam coba pertama untuk memeriksa rumus interaksi.

$$f_a = \frac{P}{A} = \frac{900 \times 10^3}{11\,420} = 78,8 \text{ MPa};$$

$$f_b = \frac{MB_x}{A} = \frac{(90 \times 10^6)(0,0104)}{11\,420} = 82,0 \text{ MPa}$$

$$\frac{L_e}{r_{\min}} = \frac{4500}{65,3} = 68,9 < C_c, \text{ dan dengan menggunakan Persamaan 13-31, } F_a = 146 \text{ MPa}$$

$$f_a/F_a = 78,8/146 = 0,54 > 0,15; \text{ jadi Persamaan 13-42 haruslah diperiksa.}$$

$$F'_e = \frac{1,03 \times 10^6}{(L_e/r_x)^2} = \frac{1,03 \times 10^6}{(4500/112)^2} = 638 \text{ MPa}$$

Sekali lagi dengan menggunakan Persamaan 13-42 untuk pelenturan dalam satu bidang, dan dengan melakukan substitusi besaran-besaran yang sesuai ke dalam persamaan tersebut, kita mendapat

$$\frac{78,8}{146} + \frac{(0,9)(82)}{(1 - 78,8/638)(207)} = 0,54 + 0,41 = 0,95 < 1,0$$

Karena hubungan ini memenuhi Persamaan 13-42, maka irisan W 250 × 89 adalah memenuhi.

### \*13-13 BALOK TANPA TUMPUAN LATERAL

Teori kekuatan dan defleksi balok yang dikembangkan dalam buku ini hanya berlaku bila balok-balok tersebut berada dalam *keseimbangan stabil*. Balok tipis yang kadang-kadang tidak mempunyai tumpuan lateral mungkin menekuk ke samping dan menjadi tidak stabil. Suatu gambaran fisis dari keadaan ini disebutkan dalam Pasal 5-2 yang berkenaan dengan sebuah lembaran kertas pada pinggir yang bekerja sebagai sebuah balok. Balok yang sesungguhnya akan rubuh dengan cara yang sama. Kecenderungan untuk penekukan lateral dikembangkan dalam *zona tekan* dari balok, yang dalam beberapa hal merupakan kolom menerus yang dibebani secara membujur dengan tegangan lentur. Analisa teoritis dari soal ini berada di luar jangkauan buku ini. Hasil-hasil analisa ini adalah sangat penting, dan telah begitu disederhanakan untuk balok baja bangunan hingga mudah dipergunakan.\*

Menurut spesifikasi AISC (1970) balok baja flens tekan yang tidak ditahan secara lateral haruslah didisain dengan perantara rumus lenturan yang biasa dengan *tegangan*

\* Lihatlah Karl de Vries, "Strength of Beams as Determined by Lateral Bucking," *Trans. ASCE*, 1947, vol. 112, hal. 1245.

yang berkurang dalam serat-serat ekstrim. Rumus tegangan lentur tereduksi adalah

$$F_b = \frac{83 \times 10^3 C_b}{\ell d / A_f} \leq 0,60 F_y, \quad (13-43)$$

di mana  $\ell$  adalah panjang balok yang tidak bertumpuan lateral,  $d$  adalah kedalamannya,  $A_f$  adalah luas flens tekan sedang  $C_b$  didefinisikan sebagai berikut:  $C_b = 1,75 + 1,05 (M_1/M_2) + 0,3(M_1/M_2)^2$ , tetapi tidak boleh lebih dari 2,3 (menurut cara lama  $C_b$  dapat diambil sebagai satu), di mana  $M_1$  lebih kecil dari  $M_2$ . Momen  $M_2$  yang lebih besar adalah momen lentur pada ujung dari panjang yang tidak diperkuat. Perbandingan  $M_1/M_2$  adalah positif bila balok tersebut melentur dalam kurva yang terbalik dan negatif dalam kejadian lenturan kurva tunggal. Selanjutnya  $C_b$  diambil sebagai satu bila momen disembarang titik dalam panjang yang tidak diperkuat lebih besar daripada kedua ujungnya.

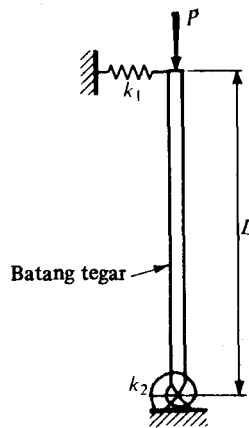
Rumus yang diberikan oleh Persamaan 13-43 hanya berlaku bila flens tekan tersebut padat dan hampir berbentuk penampang sikuempat sedang luasnya tidak boleh lebih kecil dari yang terdapat pada flens tarik. Untuk irisan flens tekan yang tidak memenuhi persyaratan di atas, maka AISC menentukan sekumpulan rumus pengganti.\* Rumus ini tergantung pada perbandingan  $\ell/r_T$ , di mana  $r_T$  merupakan jari-jari girasi irisan yang terdiri dari flens tekan dan sepertiga luas badan (web) tekan yang diambil sekitar suatu sumbu dalam bidang dari badan. Harga  $F_b$  diambil lebih besar dari yang terdapat dalam Persamaan 13-43 ataupun Persamaan 1.5-6a atau 1.5-6b dari Manual AISC bila berlaku, tetapi tidak melebihi  $0,60 F_y$ .

Rumus-rumus AISC ini mencoba menghitung hasil-hasil analisa yang rasional dengan pernyataan-pernyataan yang sederhana. Rumus-rumus yang serupa dipakai pula pada bahan-bahan yang lain.

#### SOAL-SOAL UNTUK DISELESAIKAN

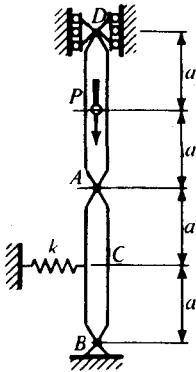
13-1. Sebuah batang kaku dipegang dalam posisi tegak seperti yang terlihat dalam gambar oleh sebuah pegas yang mempunyai tetapan pegas  $k_1$  N per meter dan sebuah pegas puntiran yang mempunyai kekakuan  $k_2$  N.m per radian. Hitunglah beban kritis  $P_{cr}$  untuk sistem ini.

13-2. Dua buah batang kaku yang sama panjangnya dihubungkan dengan sebuah engsel tanpa gesekan pada  $A$  dan ditumpu pada  $B$  dan  $D$  seperti yang terlihat dalam gambar. Tentukanlah besar gaya kritis  $P_{cr}$ . Pegas yang menempel pada batang sebelah bawah pada titik  $C$  adalah elastis linier yang mempunyai tetapan pegas  $k$ .  
Jawab:  $ka/3$ .



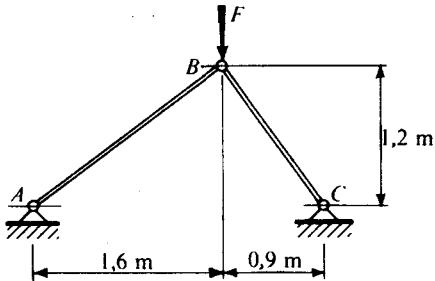
GAMBAR SOAL 13 - 1

\* Persamaan 1.5-6a dan 1.5-6b dalam Manual AISC (Edisi ke-7), 1970.



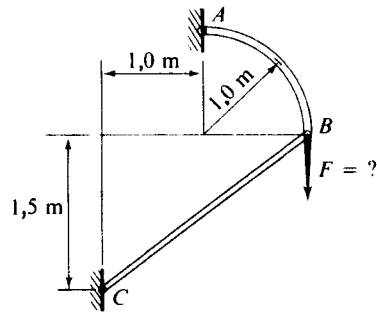
GAMBAR SOAL 13 - 2

13-3. Kerangka paduan aluminium yang dihubungkan oleh pasak terlihat membawa suatu gaya terpusat  $F$ . Dengan menganggap penekukan hanya dapat terjadi dalam bidang kerangka, tentukanlah harga  $F$  yang akan mengakibatkan ketidak-stabilan. Gunakanlah rumus Euler sebagai kriteria penekukan batang. Ambil  $E = 70 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$  untuk paduan tersebut. Kedua batang mempunyai penampang  $50 \text{ mm} \times 50 \text{ mm}$ .



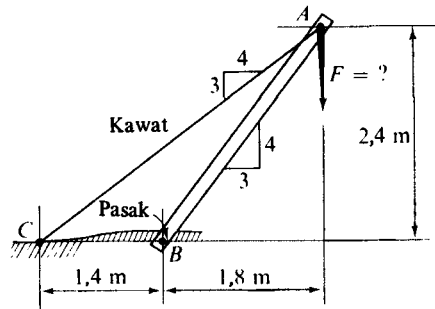
GAMBAR SOAL 13 - 3

13-4. Sebuah konsol terdiri dari bagian yang melengkung  $AB$  dan bagian yang lurus  $BC$ . Bila bagian  $BC$  merupakan sebuah kolom kayu  $40 \text{ mm} \times 80 \text{ mm}$ , berapakah gaya vertikal dapat ditumpukan pada sambungan  $B$ ? Anggaplah semua sambungan mempunyai ujung pasak. Abaikanlah berat bangunan tersebut. Gunakanlah rumus kolom Euler dengan faktor keamanan dari 3,0. Ambil  $E = 11 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ .



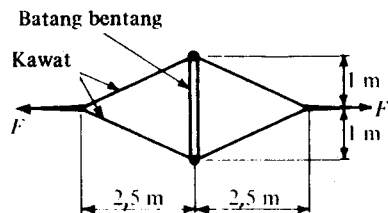
GAMBAR SOAL 13 - 4

13-5. Sebuah batang kayu berujung pasak  $AB$  dengan panjang efektif 3 m bekerja dalam tegangan tekan dalam susunan bidang seperti yang terlihat dalam gambar. Batang ini mempunyai penampang segiempat dari  $0,060 \text{ m} \times 0,100 \text{ m}$ . Bila faktor keamanan terhadap penekukan sebesar 2 dipertahankan, berapakah harga maksimum dari gaya terpakai  $F$ ? Gunakanlah rumus dasar Euler untuk bagian  $AB$ . Ambillah  $E = 1,2 \times 10^{10} \text{ Pa}$ . Jawab: 4,14 kN.



GAMBAR SOAL 13 - 5

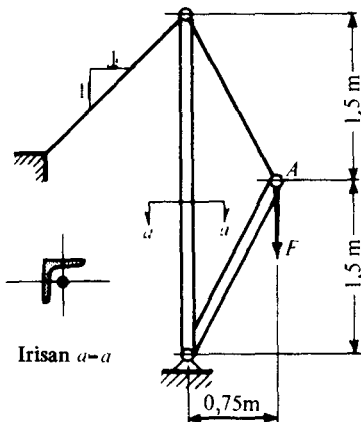
13-6. Sebuah batang baja bundar 30 mm yang panjangnya 2 m bekerja sebagai batang bentang dalam susunan yang terlihat dalam gambar.



GAMBAR SOAL 13 - 6

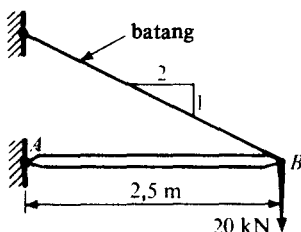
Bila kawat dan hubungan-hubungan didisain dengan baik, berapakah gaya tarik  $F$  yang diberikan kepada susunan tersebut? Gunakanlah rumus Euler dan anggaplah faktor keamanan adalah 3. Ambillah  $E = 200 \times 10^3$  MPa.

13-7. Tiang sebuah derek terbuat dari sebuah siku baja standar  $102 \times 102 \times 12,7$  mm. Bila derek ini dipasang seperti diperlihatkan dalam gambar, berapakah gaya vertikal  $F$ , yang diatur oleh ukuran dari siku yang digunakan untuk tiang, yang dapat diberikan pada titik  $A$ ? Anggaplah bahwa semua sambungan berhubungan pasak dan bahwa perincian hubungan tersebut dibuat sedemikian hingga tiang dibebani dengan konsentris. Puncak tiang diperkuat untuk mencegah pergeseran ke samping. Gunakanlah rumus Euler dengan faktor keamanan 3,5. Ambillah  $E = 200$  GPa.



GAMBAR SOAL 13 - 7

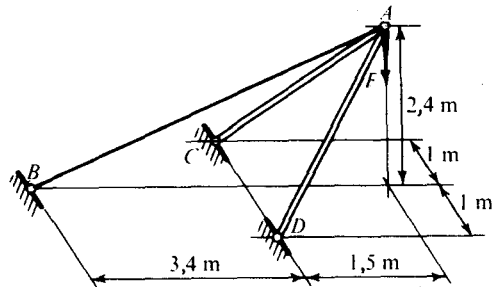
13-8. Bila kapasitas keran derek dinding yang ukuran-ukurannya terlihat dalam gambar, adalah 20 kN, berapakah ukuran pipa baja standar  $AB$  yang harus digunakan? Gunakanlah rumus



GAMBAR SOAL 13 - 8

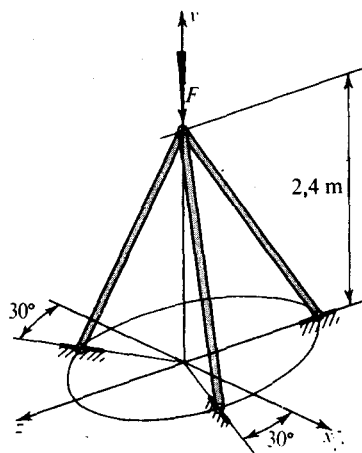
Euler dengan faktor keamanan 3,5. Ambillah  $E = 200 \times 10^3$  MPa. Abakanlah berat konstruksi tersebut.

13-9. Sebuah tripod (kaki tiga) terbuat dari pipa-pipa baja standar O.D. 60,3 mm digunakan untuk mengangkat beban secara vertikal dengan sebuah katrol pada titik  $A$  seperti yang terlihat dalam gambar. Berapakah beban yang diizinkan untuk bangunan ini? Gunakanlah rumus Euler dan faktor keamanan 3. Semua sambungan yang ditinjau diberi pasak, dan anggaplah bahwa perincian hubungan, peletakan tripod dan batang tarik  $AB$  cukup memadai. Ambil  $E = 200$  GPa.



GAMBAR SOAL 13 - 9

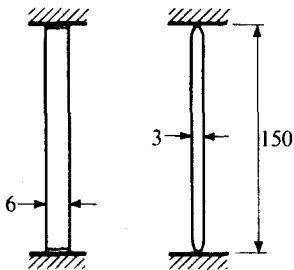
13-10. Sebuah tripod (kaki tiga) dibuat dari tiga buah siku baja  $76 \times 76 \times 6,4$  mm yang panjangnya masing-masing adalah 3 m. Dalam pandangan pada lantai siku-siku tersebut membuat busur  $120^\circ$  antara sesamanya sedang tinggi



GAMBAR SOAL 13 - 10

tripod sendiri adalah 2,4 m, lihatlah gambar. Dengan menganggap bahwa ujung-ujung siku-siku ini mempunyai ujung pasak, berapakah besar gaya ijin vertikal ke bawah  $F$  yang dapat diberikan pada tripod tersebut? Gunakanlah rumus Euler dengan faktor keamanan sama dengan 3. Abaikanlah berat dari siku-siku tersebut. Ambillah  $E = 200$  GPa.

13-11. Sebuah batang tipis dari stainless steel diberi pra-tekan secara aksial sebesar 100 N antara kedua pelat yang dijepit pada jarak antara yang konstan dari 150 mm, seperti yang terlihat dalam gambar. Susunan ini dibuat pada suhu  $20^\circ\text{C}$ . Berapakah seharusnya tinggi kenaikan suhu batang tersebut hingga faktor keamanan batang terhadap penekukan adalah 2? Anggaplah  $E = 200 \times 10^6$  kN/m<sup>2</sup> dan  $\alpha = 15 \times 10^{-6}$  per  $^\circ\text{C}$ . Jawab:  $29,1^\circ\text{C}$ .



GAMBAR SOAL 13 - 11

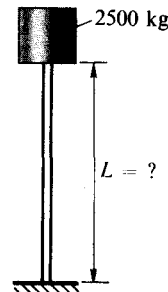
\*13-12. Turunkanlah Persamaan 13-14 dan buktikanlah bahwa eigenfunction (fungsi khas) yang khusus untuk modus ke- $n$  dalam kasus ini adalah  $v_n = C_n(1 - \cos \lambda_n x)$  di mana  $\lambda_n =$

$(2n + 1)\pi/(2L)$  dengan  $n$  adalah bilangan bulat. (Untuk  $n = 0$  lihatlah Gambar 13-8(b)).

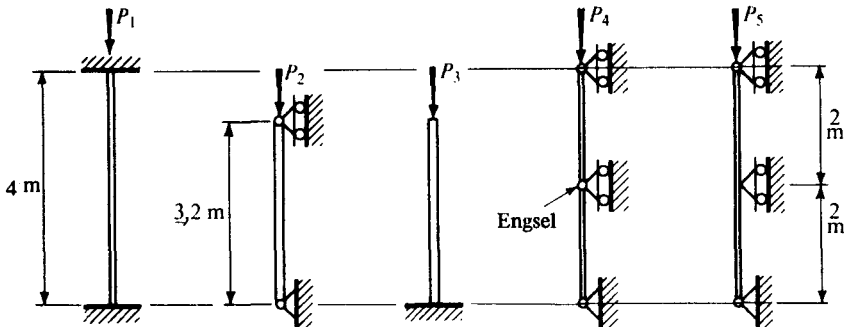
\*13-13. Turunkanlah Persamaan 13-12. (Di sini persamaan transedental untuk menentukan akar-akar kritis adalah  $\tan \lambda L = \lambda L$ , yang dipenuhi bila  $\lambda L = 4,493$ ).

13-14. Sebuah beban aksial ijin dari sebuah kolom berujung pasak yang panjangnya 4 m yang terbuat dari bahan elastis linier tertentu adalah 20 kN. Lima kolom yang berlainan yang terbuat dari bahan yang sama dan mempunyai penampang yang sama pula mendapat tumpuan yang keadaannya seperti yang terlihat dalam gambar. Dengan menggunakan kapasitas kolom untuk kolom yang panjangnya 4 m sebagai kriteria, berapakah beban ijin untuk kelima kolom yang terlihat?

13-15. Sepotong perlengkapan mekanis harus ditumpu pada puncak pipa baja standar dengan diameter luar 141,3 mm seperti yang terlihat



GAMBAR SOAL 13 - 15



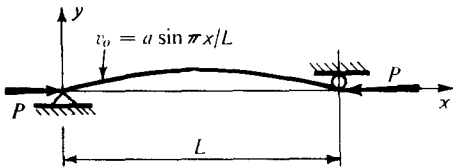
GAMBAR SOAL 13 - 14

dalam sketsa. Perlengkapan tersebut beserta punggung pendukungnya beratnya 2500 kg. Dasar dari pipa akan ditanamkan pada bantalan beton, sedang ujung atas tidak akan ditumpu. Bila faktor keamanan yang dibutuhkan untuk melawan penekukan adalah 2,5, berapakah tinggi maksimum kolom tersebut pada mana perlengkapan tersebut dapat ditumpu. Ambil  $E = 200 \text{ GPa}$ .

13-16. Sebuah batang pada mulanya adalah melengkung hingga sumbunya berbentuk setengah gelombang sinus,  $v_0 = a \sin \pi x/L$ . Bila batang ini dihadapkan kepada gaya tekan aksial seperti yang terlihat dalam gambar, buktikanlah bahwa defleksi total

$$v = v_0 + v_1 = [1/(1 - P/P_{cr})]a \sin \pi x/L$$

di mana  $P_{cr} = \pi^2 EI/L^2$  dan pernyataan dalam tanda kurung adalah faktor perbesaran.



GAMBAR SOAL 13 – 16

13-17. Bila batas proporsional baja adalah  $250.000 \text{ kN/m}^2$  dan  $E = 200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ , batas-batas berapakah dari perbandingan kerampingan hingga penggunaan rumus Euler untuk kolom-kolom yang berujung jepit tidak diperkenankan? *Jawab:* Kurang dari 178.

13-18. (a) Bila sebuah poros melingkar berujung pasak panjangnya 1,5 m dan diameternya 50 mm, berapakah perbandingan kerampingan poros tersebut? (b) Bila bahan yang sama banyaknya dengan yang di atas dibentuk kembali menjadi batang berpenampang bujursangkar dengan panjang yang sama, berapakah perbandingan kerampingan batang tersebut? *Jawab:* (a) 120.

13-19. Penampang sebuah batang tekan untuk sebuah jembatan kecil dibuat seperti yang terlihat dalam Gambar 13-15(a). Pelat tutup atas penampangnya adalah  $12 \text{ mm} \times 450 \text{ mm}$  sedang kedua kanal C  $310 \times 30,8$  ditempatkan

sedemikian rupa hingga jarak antara punggung ke punggung adalah 250 mm. Bila panjang batang ini adalah 6 m, berapakah perbandingan kerampingannya? (Periksalah  $L/r$  dalam kedua arah).

13-20. Berapakah ukuran kolom W yang diperlukan untuk memuat suatu beban konsentris dari 900 kN pada sebuah kolom yang berujung pasak bila panjangnya 4 m? Gunakanlah rumus-rumus AISC dan anggaplah bahwa baja A36 dengan  $\sigma_{yp} = 250 \text{ MPa}$  yang akan dipakai.

13-21. Dua buah kanal 250 mm – 22,8 kg membentuk batang tekan bujursangkar yang panjangnya 8 m; flens dipasang dan kanal-kanal tersebut diikat bersama sepenuhnya. Berapakah gaya aksial ijin pada batang ini menurut Persamaan 13-30 atau Persamaan 13-31, tergantung dari persamaan yang sesuai? (Periksalah  $L/r$  untuk kedua arah). Kanal-kanal dibuat dari baja A36 yaitu  $\sigma_{yp} = 250 \text{ MPa}$ .

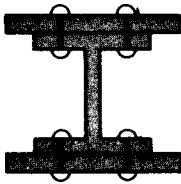
13-22. Sebuah batang tekan yang terbuat dari dua buah kanal C  $200 \times 17,1$  disusun seperti yang terlihat dalam Gambar 13-15(b). (a) Tentukanlah jarak antara punggung dengan punggung kanal agar momen inersia terhadap kedua sumbu utama adalah sama. (b) Bila batang tersebut berujung pasak yang panjangnya 10 m, berapakah beban aksial yang boleh dipakai menurut peraturan AISC? Anggaplah bahwa yang akan dipakai adalah baja A441 dengan  $\sigma_{yp} = 345 \text{ MPa}$ , sedang pembuatan pengikat cukup memadai.

13-23. Sebuah tiang lengan untuk sebuah mesin penggali dibuat dari empat buah siku baja  $64 \times 64 \times 12,7 \text{ mm}$  yang disusun seperti yang terlihat dalam Gambar 13-15(c). Ukuran-ukuran (jarak) antara bagian-bagian sebelah luar yang satu dengan yang lain dari kolom bujursangkar adalah 350 mm. (tidak termasuk ukuran-ukuran batang pengikat). Berapakah beban aksial yang dapat diberikan kepada batang ini bila panjangnya 16 m? Gunakanlah rumus Euler untuk kolom-kolom berpasak serta faktor keamanan dari 4.

13-24. Sebuah kord (kawat gantung) tekan dari sebuah kerangka kecil terdiri dari dua buah siku baja  $102 \times 102 \times 9,5 \text{ mm}$  yang disusun seperti yang terlihat dalam Gambar 13-15(d).

Kaki-kaki vertikal siku-siku tersebut terpisah 12 mm antara masing-masingnya oleh pengatur jarak. Bila panjang antara titik-titik yang diperkuat dari batang ini adalah 2,4 m, berapakah besar beban aksial yang dapat diberikan menurut peraturan AISC?  $\sigma_{yp} = 250$  MPa.

13-25. Sebuah irisan inti W 360  $\times$  476 mempunyai dua buah pelat tutup 600 mm  $\times$  75 mm seperti yang terlihat dalam gambar. Batang ini panjangnya adalah 6 m serta diandaikan mempunyai ujung pasak, berapakah gaya tekan aksial yang dapat diberikan menurut peraturan AISC? Anggaplah bahwa yang akan digunakan adalah baja A242, dengan  $\sigma_{yp} = 290$  MPa.



GAMBAR SOAL 13 – 25

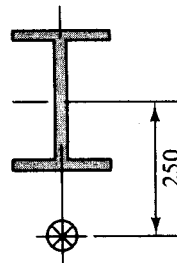
13-26. Sebuah irisan aluminium 200 WF 12,38 dipergunakan sebagai sebuah kolom dengan panjang 4,5 m. (anggaplah sifat-sifat geometrik dari aluminium ini sama dengan yang pada irisan baja W 200  $\times$  36; lihatlah catatan kaki pada Contoh 13-4). Tentukanlah kapasitas muat dari kolom ini, dengan menggunakan Persamaan 13-32 atau Persamaan 13-33 tergantung mana yang berlaku.

13-27. Tentukanlah beban aksial ijin untuk kedua buah tiang Douglas-Fir 100 mm  $\times$  100 mm (ukuran yang sesungguhnya), yang masing-masing panjangnya adalah 3 m dan 5 m.  $E = 11 \times 10^6$  kN/m<sup>2</sup>.

13-28. Sebuah panggung bundar berdiameter 2 m, yang digunakan oleh seorang "penjaga tiang bendera" dipasang pada sebuah pipa standar berdiameter luar 168,3 mm dan panjang 6 m. Bila berat "penjaga" tersebut adalah 650 N, berapakah berat perlengkapan untuk kesenangannya yang dapat diperbolehkan pada panggung tersebut? Letakkanlah berat tersebut pada kedudukan yang paling kritis, yaitu pada jarak 1 m dari garis pusat vertikal pipa. Jawab haruslah didasarkan kepada suatu pendekatan

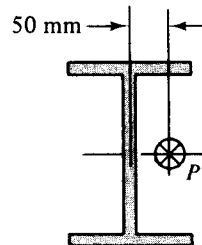
tegangan ijin:  $P/A + Mc/I \leq$  tegangan ijin untuk kolom dengan rumus Euler dengan F.S. = 3. (Petunjuk: lihatlah Gambar 13-8(b)).  $E = 200 \times 10^3$  MPa.

13-29. Sebuah kolom W 310  $\times$  126 yang panjangnya 6 m diberikan beban eksentris sebesar 800 kN yang terletak seperti yang terlihat dalam gambar. Dengan menggunakan rumus interaksi AISC, tentukanlah apakah kolom ini memadai. Gunakanlah tegangan-tegangan ijin yang sama dalam Contoh 13-5.



GAMBAR SOAL 13 – 29

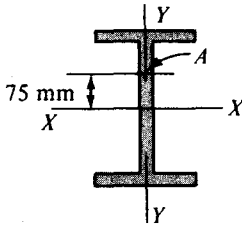
13-30. Sebuah kolom W 360  $\times$  101 yang terbuat dari baja tingkat A36 ( $\sigma_{yp} = 250$  MPa) yang panjangnya 6 m, dibebani secara eksentris seperti yang terlihat dalam gambar. Tentukanlah beban ijin  $P$  dengan menggunakan rumus-rumus AISC. Anggaplah bahwa kolom tersebut berujung pasak. Ambillah  $F_b = 185$  MPa.



GAMBAR SOAL 13 – 30

13-31. Sebuah kolom W 310  $\times$  60 mempunyai panjang efektif 6 m. Dengan menggunakan rumus-rumus AISC, tentukanlah besar suatu beban eksentris yang dapat diberikan kepada kolom ini di titik A, seperti yang terlihat dalam gambar, sebagai tambahan pada beban konsentris dari 90 kN. Kolom ini diperkuat pada atas dan bawahnya. Tegangan lentur ijin diberikan oleh Persamaan 13-43.





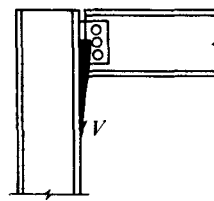
GAMBAR SOAL 13 – 31

13-32. Berapakah besar reaksi balok maksimum yang dapat dimuati oleh sebuah kolom W 250 × 73 yang mempunyai panjang efektif 4,3 m., menurut rumus interaksi AISC? Anggaplah bahwa balok tersebut memberikan reaksi pada flens sebelah luar dari kolom seperti yang terlihat dalam gambar dan merupakan konsentris yang berkenaan dengan sumbu minor. Bagian atas dan bawah kolom dipegang secara lateral. Anggaplah  $F_y = 250$  MPa dan  $F_b = 150$  MPa.

13-33. Sebuah balok sederhana W 610 × 149 mempunyai panjang 7 m tidak ditumpu secara

lateral. Berapakah besarnya beban yang terbagi rata, termasuk berat balok sendiri, yang dapat diberikan menurut spesifikasi AISC?

13-34.\* Dengan menggunakan peraturan AISC, pilihlah sebuah kolom berbentuk W untuk memuat suatu beban konsentris dari 260 kN dan sebuah beban eksentris dari 110 kN yang bekerja pada sumbu Y-Y pada jarak 150 mm dari sumbu X-X. Kolom tersebut diperkuat pada atas dan bawah dan panjangnya adalah 4,3 m. Tegangan lentur ijin adalah 150 MPa. Ambillah  $\sigma_{yp} = 250$  MPa.



GAMBAR SOAL 13 – 32



# \*14 Sambungan Struktur

## 14-1 PENDAHULUAN

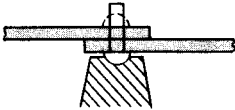
Disain berbagai bagian struktur yang didasarkan pada pertimbangan-pertimbangan kekuatan, kekakuan dan stabilitas telah dibahas dalam bab-bab yang lalu. Dalam bab ini, kita akan melakukan metoda analisa dan disain dari hubungan-hubungan pada bagian-bagian struktur ini. Analisa hubungan tidak dapat dibuat seteliti yang kita gunakan dalam banyak masalah yang lalu. Disain sambungan sebagian besar adalah empiris dan berdasarkan pada pengalaman dan penafsiran penelitian eksperimental.

Sambungan paku keling memainkan peranan yang dominan dalam konstruksi teknik masa lalu. Tetapi kenaikan penggunaan las dan pembautan berkekuatan tinggi yang disebabkan oleh keuntungan ekonomi yang mereka berikan, mengakibatkan kemunduran yang cepat dari penggunaan paku keling dan baut biasa sebagai pengikat dalam pembuatan hasil-hasil produksi bangunan. Cara bagaimana hubungan paku keling dan baut dapat gagal akan kita bahas, menyusul dengan metoda pemilihan ukuran yang tepat dan jumlah paku keling atau baut (yang biasa atau berkekuatan tinggi) untuk meneruskan gaya tertentu melalui sebuah sambungan. Yang selebihnya dari bab ini akan bersangkutan dengan sambungan-sambungan las.

## 14-2 SAMBUNGAN PAKU KELING DAN BAUT

Kebanyakan batang terbentuk dari bagian-bagian yang berupa pelat seperti pelat yang sesungguhnya, badan (web) dan flens dari balok, kaki-kaki dari siku dan seterusnya. Disain sambungan paku keling dan baut terutama menyangkut pemindahan gaya-gaya melalui pelat-pelat ini. Pemindahan gaya dengan perantaraan geser tunggal dan ganda telah dibicarakan dalam Pasal 1-5. Mungkin pula lebih dari dua bidang geser terdapat pada sambungan-sambungan rumit yang melibat interaksi antara beberapa elemen pelat.

Untuk pemasangan bagian-bagian yang biasa dengan paku keling, lubang-lubang penyesuaian dilubangi pada pelat-pelat tersebut untuk dimasukkan paku keling yang panas.\* Untuk pekerjaan yang lebih teliti, sebaiknya untuk paku keling yang berukuran lebih besar (diameter 25 mm sampai 32 mm), lubang-lubang digurdi atau mula-mula dilubangi dan kemudian diperlebar menjadi lubang yang lebih besar. Salah satu ujung paku keling mempunyai sebuah kepala, sedang kepala lainnya dibentuk dari tangkai dengan alat pukul pneumatik sebagai alat penyokong yang dipegang terhadap kepala produksi permulaan, Gambar 14-1. Kita menghendaki agar terdapat ruang bebas yang sekecil



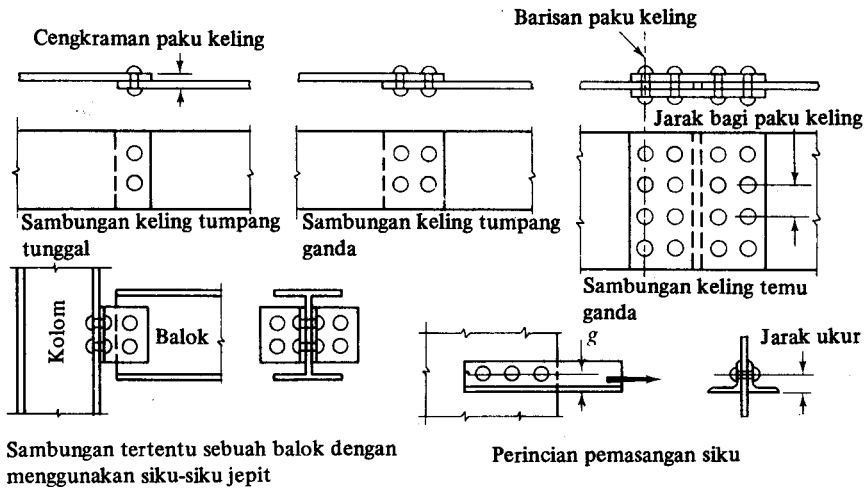
Gambar 14-1 Salah satu kepala paku keling yang terbentuk dari tangkai asli

mungkin antara paku keling dengan lubang yang dipersiapkan untuk paku keling tersebut. Untuk paku keling dengan diameter 13 mm atau lebih, biasa dibuat pertambahan diameter lubang antara 0,8 mm sampai 1,6 mm dari diameter lubang nominal. Dalam pemasangan yang benar, paku keling yang panas akan memuai dalam lubang yang disiapkan, dan selagi panas, ia menekan bahan sekitarnya ke luar. Ketika mendingin, diameter paku keling agak berkurang, tetapi bahan disekitar akan kembali keadaan semula dengan elastis hingga menolong memperkecil kecenderungan untuk menjadi longgar yang tidak dikehendaki. Selain itu, *selagi mendingin paku keling menyusut pula menurut panjangnya*. Efek ini mengakibatkan terjadinya tegangan tarik permanen dalam tangki paku keling dan tegangan tekan dalam pelat-pelat susunan (lihat Contoh 12-6). Gaya tekan yang terbentuk antara pelat-pelat mungkin agak besar hingga gaya ini mampu membentuk hambatan gesek yang besar yang tegaklurus pada sumbu paku keling. Tindakan ini mungkin cukup untuk memuat beban kerja terpakai. Tetapi dalam menentukan jumlah paku keling yang dibutuhkan, biasanya hambatan gesek dari sambungan *tidak perlu diperhatikan*. Kapasitas sebuah hubungan dipikirkan dalam bentuk-bentuk kapasitas ultimatnya sesudah hambatan gesek antara pelat-pelat menjadi "hancur".

Kecerdikan haruslah dilakukan dalam mengatur paku-paku keling pada suatu hubungan. Pengelangan yang mudah dilakukan serta kelonggaran (clearance) alat yang sebaiknya merupakan pertimbangan-pertimbangan yang penting. Beberapa pengaturan paku-paku keling yang khusus dengan judul-judul penjelasan diri diperlihatkan dalam Gambar 14-2. Hubungan-hubungan paku keling biasanya didisain untuk mengantarkan geser daripada tarik melalui paku-paku keling tersebut. Disain suatu sambungan lebih banyak dibutuhkan daripada pemeriksaan tegangan-tegangan yang terdapat dalam hubungan yang ada.

Baut-baut yang biasa dapat pula digunakan untuk mengantarkan gaya-gaya dalam sebuah sambungan. Hambatan gesek hubungan tersebut dapat diabaikan berhubung

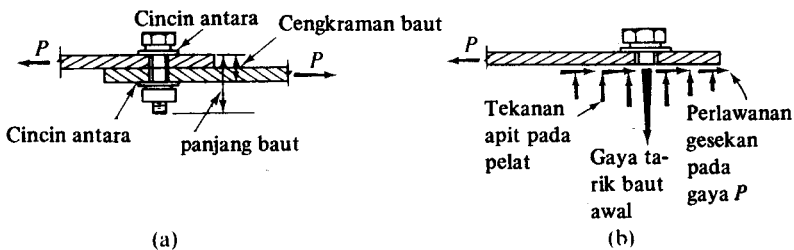
\* Paku-paku keling baja biasa dipasang pada suhu antara  $540^{\circ}$  (warna merah darah) dan  $1065^{\circ}$  C (kuning muda). Sedang paku-paku keling baja yang kecil serta beberapa paku aluminium dipasang tanpa pemanasan pendahuluan, meskipun paku-paku keling yang panas ( $\pm 560^{\circ}$  C) dan yang dingin ( $0^{\circ}$  C) sering dilakukan dalam pekerjaan aluminium. Beberapa jenis paku keling paten tersebut terbuat dari logam non-ferro.



Gambar 14-2 Susunan tertentu dari sambungan paku keling

tarikan awal yang terbentuk oleh baut-baut yang seperti itu (yang disebut juga baut-baut biasa atau tak selesai) tidak menentu. Jadi disain sambungan yang menggunakan baut-baut biasa mengikuti prosedur umum yang sama dengan yang terdapat pada paku keling, kecuali ditentukan harga-harga tegangan ijin yang lebih rendah yang mengakibatkan kemungkinan bagian ulir dari baut masuk ke dalam bidang geser.

Penggunaan baut-baut berkekuatan tinggi, Gambar 14-3(a), merupakan perkembangan yang relatif baru yang telah mendapatkan sambungan sebagai pengikat yang disukai dalam tugas lapangan. Baut diperkuat dengan mempergunakan metoda kunci yang dikalibrasi atau metoda putar mur untuk memperoleh tarikan awal minimum tertentu kira-kira 70 persen dari kekuatan tariknya.\* Suatu gaya apit yang andal dengan demikian terbentuk, dan pemindahan beban dicapai melalui hambatan gesek antara pelat-pelat, Gambar 14-3(b). Berhubung baut tidak menggelincir pada beban-beban yang



Gambar 14-3

\* Lihat Manual AISC (7th ed.), 1970. Juga, bagi pembaca yang menaruh perhatian bisa mencari buku-buku modern mengenai desain baja yang lebih terperinci, umpamanya, B.G. Johnston dan F.J. Lin, *Basic Steel Design*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1974, Y.Y. Lin, *Elementary Steel Structures*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1973, dan B. Bresler, T. Y. Lin dan J. B. Sclazi, *Design of Steel Structures*, John Wiley, 2nd ed., 1968.

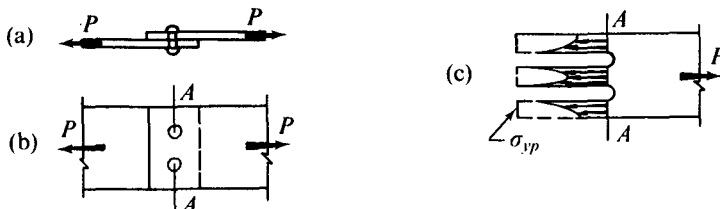
diperbolehkan karena tekanan apit, maka tegangan geser tidak terdapat pada baut itu sendiri, demikian pula tidak ada gaya dukung baut terhadap pelat yang dilaluinya. Tetapi untuk mendapatkan suatu analisa sederhana, suatu tegangan geser ijin ditentukan dengan memperhitungkan pemindahan beban yang disebabkan oleh hambatan gesek yang terjadi. Ini memungkinkan kita mendisain suatu sambungan yang menggunakan baut-baut berkekuatan tinggi untuk dilakukan dengan cara yang sama dengan yang menggunakan paku keling dan baut-baut biasa. Bila sebuah beban langsung yang diberikan pada sebuah baut mengakibatkan pengecilan gaya apit awal, maka hambatan gesek akan berkurang pula, maka Manual AISC dapat menetapkan rumus-rumus tertentu untuk memperkecil tegangan geser ijin yang sesuai.

### 14-3 METODA KEGAGALAN SAMBUNGAN PAKU KELING ATAU BAUT

Sambungan-sambungan paku keling atau baut biasa dapat gagal dengan sejumlah cara yang berlainan (lihat pula Pasal 1-5). Hal-hal ini adalah sebagai berikut:

#### Kegagalan dalam Tarik

Sebuah hubungan paku keling yang mengantarkan suatu gaya tarik dapat gagal dalam pelat yang diperlemah oleh lubang-lubang paku keling. Umpamanya sambungan tumpang dengan paku keling tunggal, Gambar 14-4(a), luas *netto* pada tiap pelat melalui irisan A-A dalam Gambar 14-4(b) adalah luas paling kecil dan sebuah sobekan dapat terjadi di sana. Pada beban kerja, sebelum kegagalan terjadi, konsentrasi tegangan yang besar terjadi pada lubang-lubang paku keling dalam pelat, Gambar 14-4(c), karena lubang-lubang tadi mengganggu kontinuitas pelat. Tetapi begitu gaya terpakai bertambah, distribusi tegangan yang merata akan berlaku pada titik luluh bahan-bahan liat (Pasal 2-11). Karena pengelingan dikerjakan hanya pada bahan-bahan liat, maka biasanya kapasitas sebuah sambungan dalam tarikan didasarkan kepada pengandaian suatu *distribusi tegangan merata pada seluruh irisan netto suatu pelat*. Disebabkan oleh sifat-sifat fatig dari bahan, pengandaian ini tidak dapat digunakan untuk sambungan paku keling yang mendapat pembebanan-pembebanan yang berfluktuasi hebat, karenanya konsentrasi tegangan penting dalam hal-hal seperti itu. Biasanya tidak ada kesimpulan yang dapat diambil untuk lubang-lubang paku keling dalam sambungan tekan.



Gambar 14-4 Tegangan tarik dalam pelat sambungan paku keling

#### Kegagalan Geser

Dalam sambungan paku keling, paku-paku keling sendiri mungkin gagal dalam geseran. Jenis kegagalan ini dapat dilihat dalam Gambar 14-5(a) dan (b). Dalam menelaah cara

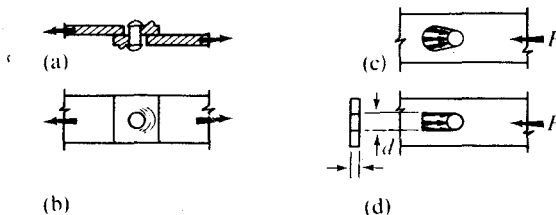


**Gambar 14-5** Geser (a) tunggal; (b) ganda dari sebuah paku keling

kegagalan ini, kita harus selalu memperhatikan apakah sebuah paku keling bekerja dalam geser tunggal atau ganda. Dalam hal yang terakhir, *dua* luas penampang paku keling yang sama memberikan perlawanan pada gaya terpakai. Dalam perhitungan-perhitungan praktis, tegangan geser diandaikan *sebagai distribusi terbagi rata pada penampang sebuah paku keling*. Pengandaian ini dibenarkan untuk bahan-bahan liat setelah melampaui batas elastis.

### Kegagalan Dukung

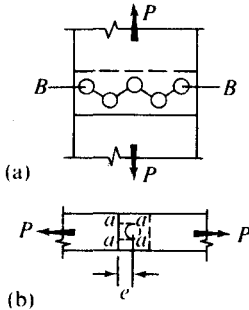
Sebuah sambungan paku keling dapat gagal bila sebuah paku keling meremukkan bahan pelat terhadap mana ia memberikan gaya dukung, Gambar 14-6(a) dan (b), atau bila paku keling itu sendiri berdeformasi oleh pelat yang bekerja padanya. Pada jenis kegagalan ini distribusi tegangan sangat rumit seperti yang terlihat dalam Gambar 14-6(c). Dalam praktek, distribusi tegangan ini diperkirakan berdasarkan pada suatu *tegangan dukung rata-rata yang bekerja atas luas tangkai paku keling yang diproyeksikan pada sebuah pelat*, yaitu, pada luas  $td$  dalam Gambar 14-6(d). Memang sukar untuk membenarkan prosedur ini secara teoretis. Tetapi tegangan dukung ijin ditentukan dari percobaan-percobaan dan ditafsirkan berdasarkan *tegangan rata-rata* ini yang bekerja pada luas proyeksi sebuah paku keling. Karena itu proses sebaliknya yang digunakan dalam disain memuaskan. Pengujian-pengujian memperlihatkan bahwa pelat-pelat yang *dikurung* oleh pelat-pelat lain seperti pelat yang ditengah dalam Gambar 14-5(b), dapat menahan tekanan dukung rata-rata yang lebih besar dari pelat-pelat yang tidak dikurung, seperti yang terdapat dalam Gambar 14-6(a) atau pelat-pelat yang sebelah luar dalam Gambar 14-5(b). Karena alasan inilah, beberapa spesifikasi membolehkan tegangan dukung yang lebih besar untuk paku-paku keling dalam geser ganda yang bekerja pada pelat-pelat sebelah dalam daripada untuk paku keling dalam geser tunggal yang bekerja pada pelat-pelat sebelah luar.



**Gambar 14-6** Kegagalan dukung sebuah sambungan paku keling serta distribusi tegangan dukung (c) kemungkinan, (d) diandaikan

### Metoda-metoda Kegagalan Lain

Dalam sebuah sambungan paku keling berganda banyak dengan beberapa baris paku keling, luas netto yang digunakan dalam perhitungan kadang-kadang sukar untuk di-



**Gambar 14-7** Metoda kegagalan yang mungkin dari sebuah sambungan paku keling, (a) sobekan zig-zag dan (b) sobekan yang disebabkan oleh jarak tepi yang tidak cukup



**Gambar 14-8** Pembengkokan pelat pada sambungan tumpang, biasanya diabaikan

tentukan. Umpamanya bila seperti dalam Gambar 14-7(a), baris-baris paku keling tersebut sangat berdekatan dengan sesamanya, suatu sobekan *zig-zag* (berkelok-kelok) lebih cenderung terjadi daripada sobekan yang melintasi irisan tegak lurus *B-B*. Tetapi spesifikasi standar untuk praktek bengkel menuliskan bahwa jenis kegagalan ini tidak umum. Karenanya kemungkinan terjadinya sobekan zig-zag tidak akan ditinjau di sini, karena kita akan menganggap bahwa dalam semua kejadian, jarak antara baris-baris paku keling cukup jauh.\* Kita menganggap pula bahwa *e*, jarak tepi (edge distance), cukup besar untuk mencegah kegagalan geser melintasi bidang *a-a* dalam Gambar 14-7(b). Juga, sesuai dengan praktek biasa, pembengkokan pelat setempat dalam sambungan tumpang, Gambar 14-8, akan diabaikan.

### Beberapa Catatan Lanjut

Dalam buku ini kapasitas sambungan paku keling atau baut biasa akan didasarkan kepada kapasitas sobekan, kapasitas geser dan kapasitas dukung yang mungkin. Tindakan sambungan paku keling yang kita andaikan ini dilukiskan dalam Gambar 14-9.† Hambatan gesek antara kedua pelat diabaikan.‡ Yang *terkecil* dari ketiga hambatan ialah kekuatan sambungan. Perbandingan antara kekuatan ini dengan kekuatan sebuah pelat atau batang padat, yang dinyatakan dalam persen, disebut *efisiensi (daya guna) sebuah sambungan* yaitu:

$$\text{efisiensi} = \frac{\text{kekuatan sambungan}}{\text{kekuatan anggota padat}} \times 100 \quad (14-1)$$

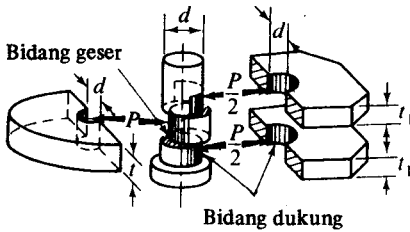
Gaya total yang bekerja kosentris pada sebuah sambungan diandaikan terdistribusi sama antara paku-paku keling yang ukurannya sama. Dalam banyak kejadian ini tidak

\* Untuk yang lebih terperinci lihatlah Manual AISC (Edisi ke-7), 1970.

† Dari G. Dreyer, *Festigkeitslehre und Elastizitätslehre*, Leipzig: Jänecke, 1938, p. 34.

‡ Perhatikanlah pada pihak lain, bahwa hambatan gesek *hanya* akan dipertimbangkan bila hubungan didesain dengan menggunakan baut berkekuatan tinggi dengan kapasitas tiap baut itu sama dengan tegangan geser ijin kali luas baut nominal.





Gambar 14-9 Aksi yang diandaikan untuk sebuah sambungan paku keling

dapat dibenarkan oleh analisa elastisitas, tetapi deformasi paku-paku keling yang liat membolehkan pendistribusian kembali gaya-gaya terpakai yang sama sebelum kapasitas ultimat sebuah hubungan tercapai. Pendistribusian kembali ini adalah mungkin karena paku-paku keling tersebut terus memuat beban yang penuh selama peluluhan. Karena itu praktek menentukan gaya-gaya yang sama pada sebuah sambungan paku keling yang dibebani dengan konsentris hampir mendekati kebenaran.<sup>†</sup> Pengandaian yang sama dipergunakan pula dalam analisa sambungan-sambungan baut.

Paku keling dan baut biasanya ditentukan untuk disesuaikan dengan standar American Society for Testing Materials (ASTM). Menyusul Manual AISC, beban-beban geser ijin diberikan dalam tabel yang mengikuti paku-paku keling dan baut berdiameter 19 mm dan 22 mm yang banyak dipakai dalam praktek. Beban dukung ijin untuk sambungan-

#### BEBAN GESER IJIN UNTUK PAKU KELING DAN BAUT 19 mm DAN 22 mm\*

| Perincian  | Diameter mm | Penandaan ASTM atau tegangan luluh, MPa | Geser, $F_v$ , MPa    | Geser Tunggal kN | Geser Ganda, kN |
|--|-------------|---|-----------------------|------------------|-----------------|
| Paku keling lapangan penggerak daya dan bengkel                                  | 19          | A502-1                                  | 100                   | 28,4             | 56,7            |
|  |             | A502-2                                  | 140                   | 39,7             | 79,4            |
|  | 22          | A502-1                                  | 100                   | 38,0             | 76,0            |
|  |             | A502-2                                  | 140                   | 53,2             | 106,4           |
| Baut tanpa tutup, ASTM 307, dan bagian ulir sekrup, $F_y = 250$ MPa <sup>a</sup> | 19          | A307<br>$F_y = 250$                     | 70<br>75 <sup>a</sup> | 19,8<br>21,3     | 39,7<br>42,5    |
|  | 22          | A307<br>$F_y = 250$                     | 70<br>75 <sup>a</sup> | 26,6<br>28,5     | 53,2<br>57,0    |
| Baut berkekuatan tinggi, jenis gesekan   | 19          | A325-F                                  | 100                   | 28,4             | 56,7            |
|  |             | A490-F                                  | 140                   | 39,7             | 79,4            |
|  | 22          | A325-F                                  | 100                   | 38,0             | 76,0            |
|  |             | A490-F                                  | 140                   | 53,2             | 106,4           |

\* Perkiraan konversi kepada satuan SI dan tabel dalam Manual AISC, 7th edition, 1970.

<sup>a</sup> Untuk bagian ulir bahan selain  $F_y = 250$  MPa, gunakan  $F_v = 0,30 F_y$ .

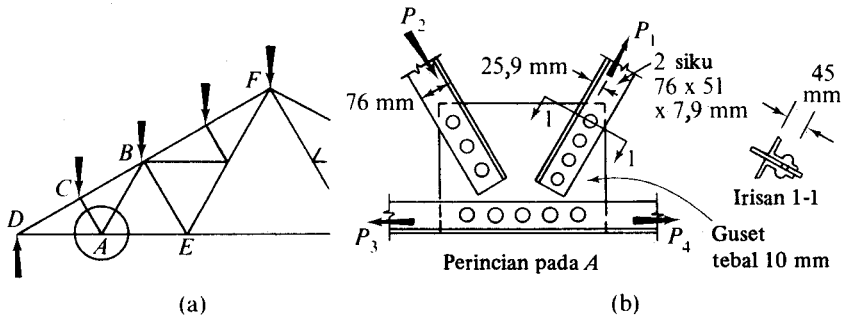
<sup>†</sup> Kesimpulan penurunan eksperimental pengandaian ini dapat diperoleh dalam kertas ilmiah oleh R.E. Davis, G.B. Woodruff, dan H.E. Davis, "Tension Tests of Large Riveted Joints," *Trans. ASCE*, 1940, vol. 105, halaman 1193.

sambungan paku keling dan baut biasa diperoleh dengan memperkalikan luas proyeksi paku keling atau baut dengan tegangan dukung ijin  $F_p = 1,35 F_y$  di mana  $F_y$  merupakan tegangan luluh bagian yang dihubungkan.

Pada umumnya, tata nama AISC akan dianut lebih banyak oleh bab ini; yaitu, tergantung kepada tanda huruf,  $F$  berhubungan dengan tegangan (serat) ijin atau ultimat, sedang  $f$  adalah tegangan (serat) yang dihitung yang disebabkan oleh beban-beban terpakai.

#### CONTOH 14-1

Hitunglah kapasitas batang tarik  $AB$  dari susunan kerangka Fink yang terlihat dalam Gambar 14-10(a) bila ia terbuat dari dua siku  $76 \times 51 \times 7,9$  mm yang dipasangkan pada pelat gusset (pelat buhul) setebal 10 mm oleh empat buah paku keling 19 mm A502-1 dalam lubang-lubang berdiameter 21 mm. Tegangan-tegangan ijin (AISC) pada siku-siku dan juga gusset adalah 150 MPa dalam tarik, 100 MPa dalam geser serta 335 MPa dalam tegangan dukung.



Gambar 14-10

#### PENYELESAIAN

Luas penampang netto siku-siku tersebut dapat diperoleh dengan mengambil perkalian antara lebar lubang paku keling (diameter paku keling tambah 3 mm) dengan tebal siku dari luas bruto siku-siku (Tabel 7 dari Lampiran). Luas netto dikalikan dengan tegangan tarik ijin memberikan gaya ijin yang dikendalikan oleh tegangan tarik. Perhitungan yang sama dibuat pula untuk modul kegagalan yang lain berdasarkan pengamatan-pengamatan yang berikut: Ada *delapan* permukaan dukung dengan geser tunggal antara paku-paku keling dengan siku-siku, empat buah paku memberikan *delapan* permukaan dukung, sedang *empat* permukaan dukung dengan geser ganda didapat untuk paku keling dengan pelat gusset. Berikut ini melalui pemecahan soal ini, pembaca didorong untuk memperhatikan rangkaian pemindahan beban, dari siku-siku ke paku keling dan dari paku keling ke pelat gusset.

*Sobekan pada Irisan 1-1 :*

$$A_{\text{net}} = 2[942 - 7,9(19 + 3)] = 1536 \text{ mm}^2$$

$$P_{\text{ijin}} = A_{\text{net}} F_t = (1536)(150)10^{-3} = 230 \text{ kN}$$

*Dukungan pada siku-siku:*

$$A = 8td = 8(7,9)(19) = 1200 \text{ mm}^2$$

$$P_{ijin} = AF_p = (1200)(335)10^{-3} = 402 \text{ kN}$$

*Dukungan pada guset :*

$$A = 4t_1d = 4(10)(19) = 760 \text{ mm}^2$$

$$P_{ijin} = AF_p = (760)(335)10^{-3} = 255 \text{ kN}$$

*Geser paku keling:*

$$A_{\text{satu paku}} = \frac{1}{4}\pi(19)^2 = 283,5 \text{ mm}^2$$

$$P_{ijin} = 8A_{\text{satu paku}}F_v = 8(283,5)(100)10^{-3} = 227 \text{ kN} \quad (\text{menentukan})$$

Tegangan tarik pada irisan 1-1 menentukan kapasitas hubungan tersebut.

Perhatikan bahwa garis-garis ukur standar umumnya dipergunakan untuk garis-garis paku keling (lihat Manual AISC) sedang paku-paku tersebut berjarak 75 mm antara s-s-nya. Garis ukur standar untuk siku-siku dalam contoh ini adalah 45 mm. Pada pihak lain, titik berat luas penampang untuk siku-siku yang sama adalah 25,9 mm dari pojok (Tabel 7 dari Lampiran). Jadi ada eksentrisitas dari  $45 - 25,9 = 19,1$  mm dari gaya terpakai yang berkenaan dengan garis paku keling tersebut. Untuk susunan rangka yang kecil, efek eksentrisitas ini biasa diabaikan, karena rupanya tegangan-tegangan ijin diberikan cukup rendah hingga mendapatkan kemungkinan ini. Tidak boleh kurang dari dua paku keling digunakan pada semua sambungan utama. Diusahakan untuk menghindari jumlah paku keling yang terlalu besar dalam satu garis.

Batang tekan dari susunan rangka yang kecil acapkali dihubungkan dengan pelat guset dengan cara yang sama dengan yang diperlihatkan untuk batang tarik. Batang tekan susunan rangka didisain seperti kolom. Panjang kolom efektif ditentukan dari suatu diagram garis tengah seperti yang terlihat Gambar 14-10(a) serta pengkajian penguatan dalam arah yang tegaklurus pada bidang susunan rangka. *Luas bruto* kolom dipergunakan untuk menentukan kapasitas muat beban mereka, sedang hubungan diatur oleh tegangan dukung tegangan dan geser. Dalam banyak kejadian, batang susunan rangka dapat bekerja dalam tarik, kemudian di bawah sebuah keadaan pembebanan yang berlainan, ia bekerja dalam gaya tekan. Batang tersebut haruslah didisain seperti itu.

#### CONTOH 14-2

Kerjakanlah kembali Contoh 14-1 bila baut tidak tertutup atau baut biasa A307 berdiameter 19 mm dipergunakan sebagai pengganti paku keling.

#### PENYELESAIAN

Tegangan-tegangan ijin tarik dan dukung sama dengan yang dalam Contoh 14-1. Tegangan geser ijin  $F_v$  dalam baut A307 adalah 70 MPa. Jadi dengan  $A_{\text{satu baut}} = 283,5 \text{ mm}^2$ ,

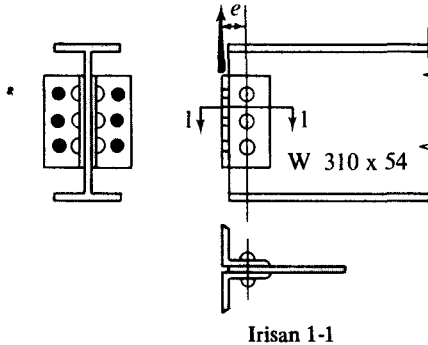
*Gaya geser baut:*

$$P_{ijin} = (8)(283,5)(70)10^{-3} = 159 \text{ kN}$$

yang lebih kecil dari  $P_{ijin}$  yang dihitung sebelumnya untuk sobekan pada irisan 1-1, tegangan dukung pada siku-siku dan pelat guset. Jadi dalam kejadian ini kapasitas hubungan diatur oleh gaya geser baut tersebut.

#### CONTOH 14-3

Hitunglah kapasitas sambungan AISC standar untuk balok W 310 × 54 yang terlihat dalam Gambar 14-11. Sambungan tersebut terdiri dari dua buah siku 102 × 89 × 9,5 mm masing-masing panjangnya 215 mm; paku-paku keling A502-1 22 mm yang berjarak antara 75 mm digunakan dalam lubang 24 mm. Gunakanlah tegangan ijin AISC yang diberikan dalam Contoh 14-1.



Gambar 14-11

#### PENYELESAIAN

Dalam sambungan ini tidak akan terjadi sobekan tarik, hingga yang perlu diselidiki hanyalah kapasitas-kapasitas geser dan dukung. *Gaya dukung pada plat badan dari balok W 310 × 54:* (Tebal plat badan diperoleh dari Tabel 4 dari Lampiran).

$$P_b = 3(7.75)(22)(335)10^{-3} = 171 \text{ kN} \quad (\text{menentukan})$$

*Geser dalam paku keling:* Ada enam buah luas penampang.

$$A_{\text{satu paku}} = 380 \text{ mm}^2$$

$$P_s = (6)(380)(100)10^{-3} = 228 \text{ kN}$$

*Gaya dukung paku keling pada siku-siku:*

$$P_b = 6(22)(9,5)(335)10^{-3} = 420 \text{ kN}$$

Jadi kapasitas sambungan ini adalah 171 kilonewton.

Kaki-kaki dari siku tegaklurus pada plat badan dari balok disebut *kaki-kaki yang menonjol*. Mereka digunakan untuk memasang sambungan pada sebuah kolom atau pelat. Hambatan geser yang memadai melalui paku-paku keling tambahan dan gaya dukung pada kaki-kaki menonjol selalu ada. Tetapi tebal pelat di mana sambungan

dibuat haruslah diselidiki. Bila pelat ini tipis maka kapasitas sambungan mungkin lebih rendah dari yang dihitung di atas. Perhatikanlah bahwa pengaruh eksentrisitas  $e$ , demikian pula lenturan dan geseran yang terdapat pada siku-siku sambungan, biasanya tidak diselidiki. Kapasitas sambungan-sambungan standar terdaftar dalam Manual AISC.

#### CONTOH 14-4

Kerjakanlah kembali Contoh 14-3 bila baut berkekuatan tinggi jenis gesekan A490-F berdiameter 22 mm digunakan menggantikan paku keling.

#### PENYELESAIAN

Tegangan geser ijin untuk baut A490-F adalah 140 MPa.

*Gaya geser baut kekuatan tinggi:*

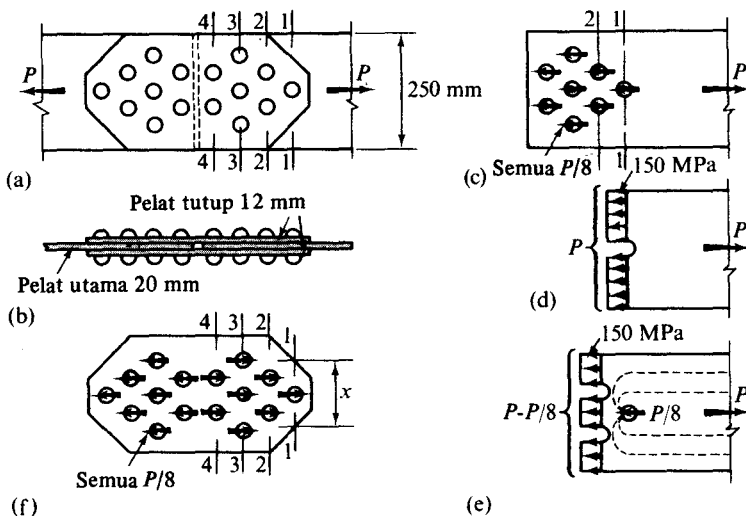
$$P_s = (6)(380)(140)10^{-3} = 319 \text{ kN}$$

Karena tidak terjadi gelincir dalam sebuah sambungan jenis gesekan, maka gaya dukung baut dengan bagian-bagian yang dihubungkan tidak terjadi, sedang kapasitas hubungan ini diberikan sebagai 319 kN.

Dengan penggunaan luas pengelasan dan kapasitas yang tinggi dari baut kekuatan tinggi, maka daripada dua buah siku hubungan, yang sering dipergunakan hanyalah sebuah pelat tunggal pada satu sisi plat badan dari balok tersebut. Pelat tersebut dilas pada kolom dibengkel dan dibuat kepada balok dilapangan.

#### CONTOH 14-5

Hitunglah gaya tarik ijin yang dapat diantarkan oleh sambungan konstruksi paku keling berganda banyak seperti yang terlihat dalam Gambar 14-12(a) dan (b). Hitung pulalah



Gambar 14-12

efisiensi sambungan ini. Semua paku keling nominal 22 mm dalam lubang-lubang berdiameter 24 mm. Gunakanlah tegangan ijin AISC yang diberikan dalam Contoh 14-1.

#### PENYELESAIAN

Penelaahan sambungan konstruksi paku keling berganda banyak didasarkan kepada pengandaian bahwa *gaya terpakai secara konsentris didistribusikan sama dengan antara paku-paku keling yang ukurannya sama pula*. Karena itu benda bebas salah satu pelat utama dapat dilihat dalam Gambar 14-12(c), sedang yang untuk dua pelat tutup dapat dilihat pada Gambar 14-12(f). Tegangan-tegangan tarik harus diselidiki pada berbagai irisan. Ini dilakukan dengan meninjau benda-benda bebas seperti yang terlihat dalam Gambar 14-12(d) dan (e) dan mengandaikan distribusi tegangan yang merata terdapat dalam pelat-pelat. Diameter paku keling nominal digunakan untuk perhitungan-perhitungan gaya-gaya geser dan dukung.

*Kapasitas geser  $P_s$  dari sambungan:* Ada 16 luas penampang paku keling.  $F_v = 100$  MPa

$$A_{\text{satu paku}} = \frac{1}{4}\pi(22)^2 = 380 \text{ mm}^2$$

$$P_s = 16(380)(100)10^{-3} = 608 \text{ kN} \quad (\text{menentukan})$$

*Kapasitas dukung  $P_B$  dari sambungan pada pelat utama:* terdapat 8 permukaan dukung dalam geser ganda.  $F_p = 335$  MPa.

$$P_B = 8(22)(20)(335)10^{-3} = 1180 \text{ kN}$$

*Kapasitas dukung  $P_b$  dari sambungan pada pelat tutup:* terdapat 16 permukaan dukung dalam geser tunggal.  $F_p = 335$  MPa.

$$P_b = 16(22)(12)(335)10^{-3} = 1420 \text{ kN}$$

*Kapasitas tarik pelat utama:*

$$F_t = 150 \text{ MPa}$$

*Tanpa lubang :*

$$P_t = (20)(250)(150)10^{-3} = 750 \text{ kN}$$

*Irisan 1-1, benda bebas, Gambar 14-12(d):*

$$P_{1-1} = (20)[250 - (22 + 3)](150)10^{-3} = 675 \text{ kN}$$

*Irisan 2-2, benda bebas, Gambar 14-12(e):*

$$P_{2-2} = \frac{1}{8}P_{2-2} + (20)[250 - 2(22 + 3)](150)10^{-3} \quad \text{atau} \quad \frac{7}{8}P_{2-2} = 600 \text{ kN}$$

Jadi  $P_{2-2} = 686 \text{ kN}$ .

Hasil ini berarti bahwa bila suatu gaya tarik  $P_{2-2} = 686 \text{ kN}$  diberikan kepada sambungan, hanya tujuh per delapan gaya ini yang perlu ditahan oleh irisan 2-2 pada tegangan 150 MPa, karena seperdelapan gaya ini ditahan oleh *paku keling yang di luar*. Dengan

cara yang sama,

$$\frac{5}{8}P_{3-3} = (20)(250 - 75)(150)10^{-3} \quad \text{atau} \quad P_{3-3} = 840 \text{ kN}$$

dan  $\frac{2}{8}P_{4-4} = (20)(250 - 50)(150)10^{-3} \quad \text{atau} \quad P_{4-4} = 2400 \text{ kN}$

Kapasitas tarik dua pelat tutup:  $F_t = 150 \text{ MPa}$ . Melalui irisan 4-4, Gambar 14-12(f), seluruh gaya  $P$  diteruskan, jadi

$$P_{4-4} = 2(12)[250 - 2(22 + 3)](150)10^{-3} = 720 \text{ kN}$$

Kemudian dengan meninjau diagram-diagram benda bebas dari pelat-pelat tutup pada satu sisi irisan, seperti yang dilakukan pada pelat utama,

$$\frac{6}{8}P_{3-3} = (24)(250 - 75)(150)10^{-3} \quad \text{atau} \quad P_{3-3} = 840 \text{ kN}$$

dan  $\frac{3}{8}P_{2-2} = (24)(250 - 50)(150)10^{-3} \quad \text{atau} \quad P_{2-2} = 1920 \text{ kN}$

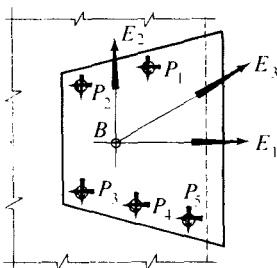
Dengan cara yang sama, irisan 1-1 tidaklah kritis. Karena itu lebar *pelat tutup* pada irisan 1-1 dapat diperkecil menjadi lebar  $x$  untuk mendapatkan tegangan ijin, suatu luas netto untuk hanya seperdelapan gaya terpakai.

Kapasitas sambungan ini dibatasi oleh tegangan geser ijin dalam paku keling. Jadi kapasitas sambungan ini adalah 608 kN. Efisiensi sambungan ini adalah  $(608/750)100 = 81,1\%$ , yang berarti baik.

Prosedur perhitungan yang sama dapat pula digunakan untuk sebuah sambungan tekan bila ujung-ujung pelat-pelat utama tidak dibubut. Tetapi bila ujung-ujung tersebut difris, maka pemindahan gaya tekan adalah langsung. Meskipun demikian, dalam kasus seperti itu, adalah biasa untuk mendapatkan sambungan paku keling yang dihitung pada pecahan tertentu, sebutlah 50% dari gaya total yang sesungguhnya.

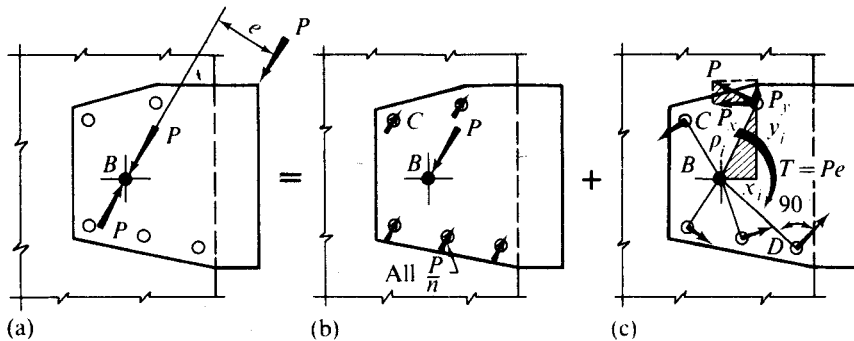
#### 14-4 SAMBUNGAN PAKU KELING DAN BAUT EKSENTRIS

Pembahasan sambungan paku keling dan baut yang baru lalu berlaku pada keadaan di mana garis kerja gaya terpakai melalui titik berat suatu kelompok paku keling. Lebih tepat lagi diandaikan bahwa tiap paku keling atau baut memiliki perlawanan geser atau dukung ijin tertentu dalam *setiap* arah. Jadi tiap paku keling dalam sekelompok paku keling mempunyai perlawanan tertentu, sebutlah dalam arah mendatar, ditunjukkan oleh  $P_1, P_2, \dots, P_5$  dalam Gambar 14-13. Tempat terbaik untuk melakukan gaya



**Gambar 14-13** Gaya terpakai harus bekerja melalui titik berat luas paku keling untuk mencegah pemelintiran sebuah sambungan

mendatar pada kelompok paku keling ini adalah dalam arah  $E_1$ , yang merupakan pengimbang gaya-gaya paku keling ijin. Gaya yang bekerja sepanjang garis aksi ini mendistribusikan dirinya sendiri diantara pelbagai paku keling tanpa suatu kecenderungan untuk memelintir pelat yang terpasang. Dengan alasan yang sama garis aksi  $E_2$  dapat dibuat dalam arah yang vertikal. Kemudian bila titik potong  $E_1$  dan  $E_2$  ditulis dengan titik  $B$ , maka kita dapat melihat bahwa suatu gaya miring  $E_3$  haruslah melalui  $B$ , agar tidak mengakibatkan pelintiran pelat tersebut, sebab  $E_3$  dapat diuraikan menjadi komponen-komponen mendatar dan tegak. Titik  $B$  searti dengan titik berat luas paku keling, karena dalam kejadian yang paling praktis perlawanan sebuah paku keling tergantung pada luas penampangnya. Suatu gaya yang bekerja pada suatu arah, tetapi melalui titik berat luas paku keling, adalah masalah sambungan yang dibebani dengan konsentris yang terdahulu. Tetapi sehubungan gaya-gaya tidak selalu bekerja melalui titik ini, maka hasilnya adalah sambungan-sambungan yang dibebani secara eksentris.



Gambar 14-14 Penguraian suatu masalah sambungan paku keling yang dibebani dengan eksentris menjadi dua soal

Tinjaulah sebuah sambungan, seperti yang terlihat dalam Gambar 14-14(a), dengan gaya  $P$  yang bekerja dengan eksentris terhadap titik berat  $B$  dari luas paku keling. Soal ini tidak akan menjadi berubah bila pada  $B$  kita berikan dua gaya  $P$  yang sama besar tetapi berlawanan arah yang sejajar dengan gaya terpakai  $P$ . Persoalan yang baru ini lebih baik diuraikan menjadi dua soal yang terlihat dalam Gambar 14-14(b) dan (c). Soal yang pertama, Gambar 14-14(b), dibahas lebih dahulu, dan tegangan geser langsung rata-rata  $f_d$  dalam semua paku keling adalah

$$f_d = \frac{P}{\sum A_i} \quad (14-2)$$

di mana  $\sum A_i$  merupakan jumlah semua luas penampang paku keling. Bila semua  $n$  paku keling mempunyai ukuran yang sama,  $\sum A_i = nA$ , di mana  $A$  adalah luas penampang sebuah paku keling dan

$$f_d = \frac{P}{nA} \quad \text{atau} \quad P_d = Af_d = \frac{P}{n} \quad (14-2a)$$

di mana  $P_d$  adalah gaya langsung dalam tiap paku keling. Untuk keseimbangan,  $f_d$  dan  $P_d$  bekerja dalam arah yang berlawanan dengan gaya  $P$  yang bekerja pada titik  $B$ .



Soal kedua, Gambar 14-14(c), merupakan soal puntiran, di mana momen terpakai  $T$  sama dengan  $Pe$ . Dalam soal ini, bila sekiranya diandaikan bahwa pelat adalah *kaku* dan bahwa ia memelintir sekitar titik  $B$ , maka regangan-regangan geser dalam paku-paku keling bervariasi linier dari titik  $B$ . Selanjutnya bila paku-paku keling tersebut diandaikan elastis, maka tegangan geser rata-rata dalam tiap paku keling bervariasi linier pula dari titik  $B$ . Karena itu soal ini kembali kepada persoalan puntiran sebuah poros melingkar (atau sebuah kopling baut, Pasal 3-12), sedang rumus puntiran  $\tau = T\rho/I_p$  dapat diambil untuk pemecahannya. Dengan perantaraan rumus ini, bila tiap paku keling diandaikan terpusat pada sebuah titik, maka jarak  $\rho$  ( $c$  untuk paku keling yang terjauh) dari pusat-pusat berbagai paku keling ke titik  $B$ , dapat ditentukan dengan mudah, dan hanya besaran  $I_p$  yang perlu mendapatkan ulasan lebih lanjut. Jadi, karena oleh definisi  $I_p = \int \rho^2 dA$ , dan "Luas batang puntiran" untuk kejadian ini merupakan suatu jumlah luas paku keling diskrit, dengan ketelitian yang cukup,

$$I_p \approx \sum \rho_i^2 A_i$$

di mana penjumlahan tersebut meliputi perkalian luas penampang  $A_i$  dari masing-masing paku keling dengan kwadrat jaraknya  $\rho_i$  dari titik berat tiap luas paku keling tersebut. Selanjutnya, karena dari Persamaan 14-14(c), masing-masing  $\rho_i^2 = x_i^2 + y_i^2$ , di mana  $x_i$  dan  $y_i$  adalah koordinat pusat paku keling tertentu dari titik berat semua luas paku, maka  $I_p \approx \sum (x_i^2 + y_i^2) A_i$ .

Dengan menggunakan perkiraan  $I_p$  yang dibuat di atas, maka tegangan geser *puntiran*  $f_t$  pada salah satu paku keling pada jarak  $\rho_i$  dari titik berat semua luas paku keling menjadi

$$(f_t)_i = \frac{T\rho_i}{I_p} \approx \frac{T\rho_i}{\sum \rho_i^2 A_i} = \frac{T\rho_i}{\sum (x_i^2 + y_i^2) A_i} \quad (14-3)$$

sedangkan, bila semua paku keling berukuran sama,

$$(f_t)_i = \frac{T\rho_i}{A \sum (x_i^2 + y_i^2)} \quad \text{atau} \quad (P_t)_i = A(f_t)_i = \frac{T\rho_i}{\sum (x_i^2 + y_i^2)} \quad (14-3a)$$

di mana  $(P_t)_i$  adalah gaya yang disebabkan oleh momen puntir  $T$  yang bekerja pada sebuah paku keling pada jarak  $\rho$  dari titik berat semua luas paku keling. Baik  $(f_t)_i$  maupun  $(P_t)_i$  bekerja tegaklurus terhadap arah  $\rho_i$ . Selanjutnya dengan memperhatikan kesamaan segitiga dengan sisi-sisi  $x_i$ ,  $y_i$  dan  $\rho_i$  dengan segitiga gaya pada sebuah paku keling serta komponen-komponennya yang diperlihatkan sebagai bergaris-garis dalam Gambar 14-14(c), maka kemudian menyusul bahwa *komponen-komponen* tegangan puntir masing-masing dalam arah-arahan  $x$  dan  $y$  adalah

$$(f_{tx})_i = \frac{Ty_i}{\sum (x_i^2 + y_i^2) A_i} \quad \text{dan} \quad (f_{ty})_i = \frac{Tx_i}{\sum (x_i^2 + y_i^2) A_i} \quad (14-3b)$$

Suatu *superposisi vektorial* tegangan-tegangan (atau gaya-gaya) geser langsung dan puntiran yang diberikan oleh persamaan-persamaan di atas memberikan tegangan (atau

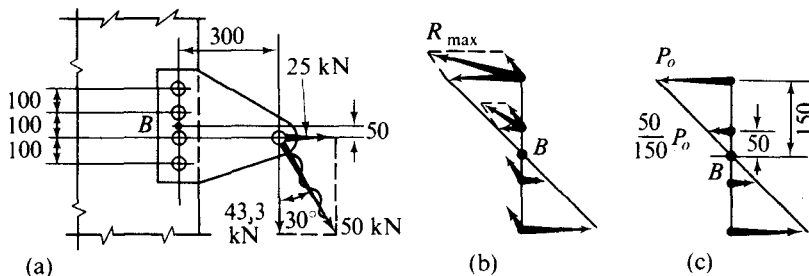
gaya) geser total yang bekerja pada masing-masing paku keling. Paku keling yang mengalami tegangan paling tinggi biasanya dapat diperoleh dengan pemeriksaan. Umpamanya dalam Gambar 14-14 paku keling  $C$  tidak muncul sebagai mengalami tegangan paling tinggi, karena gaya  $P/n$  dan gaya pada titik  $C$  yang disebabkan oleh momen puntir bekerja kira-kira dalam arah yang berlawanan. Pada pihak lain gaya-gaya yang bersangkutan pada paku keling  $D$  hampir merupakan kolinier dan mempunyai sikap yang sama.

Prosedur analisa yang sama berlaku pula untuk kedua sambungan baut biasa dan baut kekuatan tinggi. Harus diperhatikan bahwa bila eksentrisitas beban mengakibatkan kedua geseran dan tarikan pengikat, AISC menetapkan pengurangan tegangan tarik ijin untuk paku keling dan baut biasa serta pengurangan tegangan geser ijin untuk baut kekuatan tinggi jenis gesekan.

Perhatikan pula bahwa jawaban untuk sebuah sambungan yang dibebani secara eksentris berdasarkan pada superposisi sepenuhnya dua jawaban yang berbeda. Pertama, untuk tegangan langsung, berdasarkan pada suatu hipotesa tak-elastis; kedua, untuk tegangan puntir didasarkan kepada konsep-konsep elastis. Superposisi kedua jawaban ini tidaklah konsisten sempurna. Kapasitas puntiran yang mungkin dari sambungan tidak dapat ditaksir dengan teliti karena paku-paku keling yang terletak berdekatan dengan titik berat keseluruhan kelompok paku keling, dapat menahan gaya-gaya yang lebih tinggi pada beban ultimat. Bagaimana pun jawaban yang diperoleh adalah konservatif; hingga penggunaannya dalam praktek dibenarkan.\*

#### CONTOH 14-6

Hitunglah tegangan geser maksimum yang disebabkan oleh gaya miring  $P = 50$  kN dalam paku-paku keling dari sambungan yang terlihat dalam Gambar 14-15(a). Paku keling mempunyai diameter 25 mm ( $A = 491 \text{ mm}^2$ ). Semua ukuran dalam mm.



Gambar 14-15

#### PENYELESAIAN

Gaya terpakai mula-mula diuraikan menjadi komponen-komponen horisontal dan vertikal, yang menyederhanakan penentuan komponen-komponen tegangan geser langsung dan juga momen puntir  $T$ . Titik berat seluruh luas paku keling berada antara paku-paku atas dan bawah pada titik  $B$ . Pemeriksaan Gambar 14-15(b), di mana tegangan-tegangan

\* Lihat pula paragraf terakhir Pasal 3-12.

langsung dan puntir yang diharapkan terlihat bekerja bersamaan, menunjukkan bahwa paku sebelah atas merupakan paku keling yang mengalami tegangan yang paling tinggi. Paku ini adalah  $c = 150$  mm dari titik  $B$ . Perhatikanlah bahwa pola paku keling ini adalah simetris, dan bahwa  $x$  dalam suku  $\Sigma (x^2 + y^2)$  adalah nol.

$$P_x = 50 \sin 30^\circ = 25 \text{ kN} \rightarrow, P_y = 50 \cos 30^\circ = 43,3 \text{ kN} \downarrow$$

$$T = (43,3)(300) - (25)(50) = 11\,740 \text{ kN} \cdot \text{mm} \circlearrowleft$$

$$f_{dy} = \frac{P_y}{nA} = \frac{43\,300}{4(491)} = 22,0 \text{ MPa, menahan} \uparrow$$

$$f_{dx} = \frac{P_x}{nA} = \frac{25\,000}{4(491)} = 12,7 \text{ MPa, menahan} \leftarrow$$

$$f_{tx} = f_t = \frac{Tc}{A \sum (x^2 + y^2)} = \frac{(11\,740 \times 10^3)(150)}{(491)(150^2 + 50^2)2} = 71,7 \text{ MPa} \leftarrow$$

$$f_{\max} = \sqrt{(12,7 + 71,7)^2 + 22,0^2} = 87,2 \text{ MPa}$$

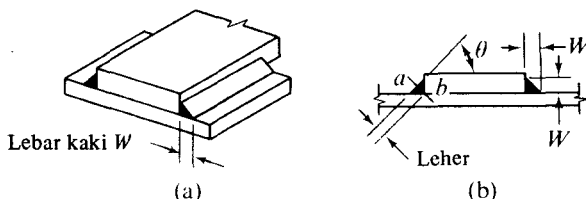
Bagian puntiran dari suatu masalah sambungan yang dibebani dengan konsentris selalu dapat dipecahkan dari azas pertama tanpa menggunakan rumus puntiran. Jadi, dengan mengandaikan, seperti sebelumnya, bahwa pelat adalah *kaku*, juga dengan menganggap variasi regangan yang linier dalam paku-paku keling dari pusat pelintiran, dan dengan menggunakan hukum Hooke, diperoleh bahwa tegangan dalam paku bervariasi linier dari pusat pelintir. Jadi, untuk soal di atas dengan luas penampang yang sama untuk semua paku, dalam bentuk gaya  $P_o$  pada paku-paku sebelah luar, Gambar 14-15(c),

$$P_o(300) + (50/150)P_o(100) = T = 11\,740 \quad \text{dan} \quad P_o = 35,2 \text{ kN}$$

di mana, seperti di atas,  $f_t = (35,200)/(491) = 71,7$  MPa. Prosedur ini hampir sama dengan penurunan kembali rumus puntiran.

#### 14-5 SAMBUNGAN LAS

Sambungan batang dengan memakai pengelasan sangat banyak dipergunakan dalam industri. *Las menumpu* (butt welds) telah kita sebut dalam Pasal 9-6 untuk digunakan dalam pembuatan bejana-bejana tekan. Kekuatan las ini mudah diperoleh dengan memperkalikan luas penampang pelat paling tipis yang hendak dihubungkan, dengan tegangan tarik atau tegangan tekan ijin untuk suatu las. Spesifikasi AISC, berdasarkan rekomendasi American Welding Society (AWS) memperbolehkan tegangan tarik yang sama dalam pengelasan seperti dalam logam dasar dalam hal las temu yang mendapat beban statik dalam struktur baja.



Gambar 14-16 Contoh las sudut

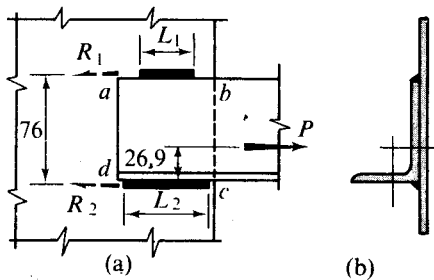
Jenis las umum lain yang didisain pada basis semi-empiris, disebut *las sudut* (fillet weld) yang diperlihatkan dalam Gambar 14-16. Las ini ditentukan oleh ukuran kaki, Gambar 14-16(b), yang biasanya dibuat dari lebar yang sama  $W$ . Ukuran terkecil melalui sebuah las disebut *leher las*. Umpamanya, sebuah las 12 mm mempunyai kedua kaki yang lebarnya 12 mm sedang leher sama dengan  $12 \sin \theta = 12 \sin 45^\circ = (0,707)(12)$  mm. Kekuatan sebuah las sudut, *tanpa memperhatikan arah gaya terpakai*,\* didasarkan kepada luas penampang pada *leher* dikalikan dengan *tegangan geser* ijin dari logam las. Tegangan geser ijin AWS adalah 0,3 kali kekuatan tarik elektroda. Umpamanya elektroda E70 (yakni kekuatan tarik dari 483 MPa) digunakan sebagai logam las yang mempunyai tegangan geser ijin  $0,3 \times 483 = 145$  MPa. Gaya ijin  $q$  per mm las diberikan sebagai

$$q = (145)(0,707) W = 102 W \quad [\text{N/mm}] \quad (14-4)$$

di mana  $W$  adalah lebar kaki. Untuk las sudut 6 mm  $q$  berkurang menjadi 612 newton per mm; sedang untuk las sudut 10 mm  $q$  berkurang menjadi 1020 newton per mm, dan seterusnya.

#### CONTOH 14-7

Tentukanlah panjang las yang pantas untuk hubungan sebuah siku baja  $76 \times 51 \times 11,1$  mm pada sebuah pelat baja, Gambar 14-17(a). Hubungan tersebut adalah untuk membentuk kekuatan penuh dalam siku yang mendapat tegangan yang merata sampai 140 MPa. Gunakanlah las sudut 10 mm, yang kekuatannya per spesifikasi AWS adalah 1020 newton per millimeter linier.



Gambar 14-17

#### PENYELESAIAN

Banyak susunan las yang mungkin dilakukan. Bila dua las yang panjangnya  $L_1$  dan  $L_2$  akan digunakan, kekuatan mereka adalah sedemikian rupa hingga menjaga gaya terpakai  $P$  berada dalam keseimbangan tanpa suatu kecenderungan untuk memelintir sambungan tersebut. Ini memerlukan resultante gaya-gaya  $R_1$  dan  $R_2$  terbentuk dalam las yang sama besar dan berlawanan arah dengan  $P$ . Untuk pelaksanaan yang optimum dari siku tersebut, gaya  $P$  haruslah bekerja melalui titik berat luas penampang\* (lihat Tabel 7 dari Lampiran). Untuk maksud-maksud perhitungan, las tersebut dianggap hanya mempunyai ukuran yang linier.

\* Ini merupakan penyederhanaan sungguh-sungguh dari soal yang nyata.

$$A_{\text{siku}} = 1290 \text{ mm}^2 \quad \sigma_{\text{ijin}} = 140 \text{ MPa}$$

$$P = A\sigma_{\text{ijin}} = 1290(140) = 181 \times 10^3 \text{ N}$$

$$\sum M_a = 0 \circ +, \quad R_1(76) - 181(26,9) \quad R_1 = 64,1 \text{ kN}$$

$$\sum M_a = 0 \circ +, \quad R_2(76) - 181(76 - 26,9) = 0, \quad R_2 = 116,9 \text{ kN}$$

*Periksa:*  $R_1 + R_2 = 64,1 + 116,9 = 181 \text{ kN} = P$

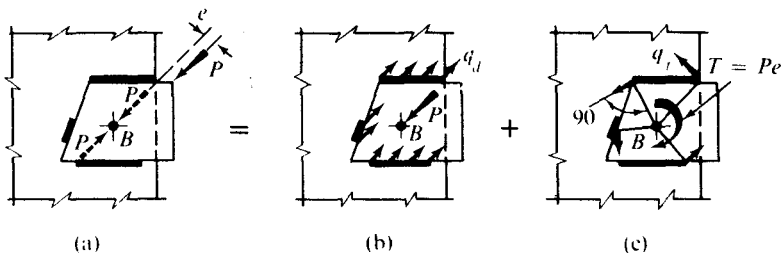
Jadi, dengan menggunakan harga tertentu untuk kekuatan las 10 mm, perhatikanlah bahwa  $L_1 = (64,1)/(1,02) = 62,8 \text{ mm}$  dan  $L_2 = (116,9)/(1,02) = 114,6 \text{ mm}$ . Panjang las yang sesungguhnya biasanya naik sedikit pada panjang yang dihitung berdasarkan kepada lubang-lubang yang terjadi pada permulaan dan akhir pengelasan. Eksentrisitas gaya  $P$  yang berkenaan dengan bidang las diabaikan.

Las sudut ujung acapkali dipergunakan untuk memperkecil panjang hubungan. Jadi, seperti contoh di atas, las sepanjang garis  $ad$  dapat ditambahkan. Titik berat tahanan untuk las ini berada dipertengahan antara  $a$  dan  $d$ . Untuk susunan ini, panjang-panjang  $L_1$  dan  $L_2$  juga diperkecil hingga gaya resultante untuk ketiga las berimpit dengan resultante  $R_1$  dan  $R_2$  dari kasus yang terdahulu. Untuk menyelesaikan tujuan yang sama, celah dan takik dipergunakan pula pada batang yang dihubungkan.

#### 14-6 SAMBUNGAN LAS EKSENTRIS

Sebuah las sudut, untuk maksud-maksud perhitungan, terpusat pada sebuah garis dan dianggap menahan suatu gaya yang sama per mm linier dalam arah yang sembarang. Karena itu garis aksi yang paling menguntungkan untuk suatu gaya yang bekerja pada sebuah sambungan las adalah melalui *titik berat garis-garis las*. Bila hal ini tidak terjadi, hasil yang didapat adalah sambungan yang dibebani secara eksentris. Penelaahan sambungan-sambungan ini serupa dengan yang terdapat pada sambungan-sambungan baut yang berbeban eksentris. Soal tersebut dipisah menjadi dua soal seperti yang terlihat dalam Gambar 14-18. Soal yang pertama, Gambar 14-18(b) adalah sambungan yang dibebani secara konsentris di mana gaya terpakai  $P$  bekerja melalui titik berat  $B$  untuk semua las. Untuk kejadian ini, gaya *langsung*  $q_d$  per mm panjang las yang bekerja dalam arah yang berlawanan dengan  $P$  adalah

$$q_d = \frac{P}{\sum L_i} \quad [\text{N/mm}] \quad (14-5)$$



**Gambar 14-18** Penguraian satu sambungan las yang dibebani eksentris ke dalam dua soal yang terpisah.

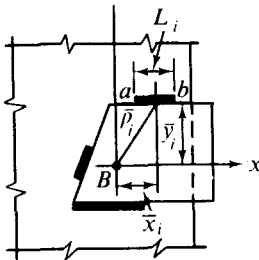
di mana  $\Sigma L_i$  adalah *panjang total* semua las. Bila gaya  $P$  diuraikan ke dalam komponen-komponen horisontal dan vertikal masing-masing  $P_x$  dan  $P_y$ , maka komponen-komponen gaya langsung per mm las adalah

$$q_{dx} = \frac{P_x}{\Sigma L_i} \quad \text{dan} \quad q_{dy} = \frac{P_y}{\Sigma L_i} \quad (14-5a)$$

Soal yang kedua, Gambar 14-18(c), adalah serupa dengan soal puntiran, bila pelat dianggap *kaku* dan hanya memelintir sekitar titik  $B$ . Kemudian, lebih lanjut dengan menganggap las bertindak elastis, maka rumus puntiran dengan harga  $I_p$ , yang diperbaharui, dapat kita pergunakan. Harga  $I_p$  tertentu untuk sekelompok las *lurus* dapat diperoleh sebagai digariskan di bawah.

Momen inersia kutub  $I_p$  adalah sama dengan jumlah dua momen inersia siku-empat yang bersangkutan dengan dua sumbu yang saling tegaklurus yaitu  $I_p = I_{xx} + I_{yy}$ . Demikian pula, dengan mengingat teorema sumbu sejajar, Persamaan 5-2, maka pengaruh terhadap  $I_p$  yang berkenaan dengan pusat pelintir  $B$  suatu las *lurus individual* seperti  $ab$  dalam Gambar 14-19 adalah\*

$$(I_{xx})_i + (I_{yy})_i = 0 + L_i \bar{y}_i^2 + \frac{1}{12} L_i^3 + L_i \bar{x}_i^2 \quad [\text{in.}^3]$$



Gambar 14-19

di mana  $L_i$  adalah panjang las dan  $\bar{x}_i$  dan  $\bar{y}_i$  adalah koordinat jarak yang bersangkutan dari titik berat  $B$  semua las *kepada pusat las yang ditinjau*. Pernyataan ini masih tetap sama untuk kedudukan yang sembarang atau miring dari las lurus, sebab  $\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2 = \bar{\rho}_i^2 = \bar{x}_1^2 + \bar{y}_1^2$ . Oleh sebab itu  $I_p$  ekuivalen total berbagai las lurus adalah

$$I_p = \Sigma I_{pi} = \Sigma \left( \frac{L_i^3}{12} + L_i \bar{x}_i^2 + L_i \bar{y}_i^2 \right)$$

di mana pernyataan dalam tanda kurung dihitung untuk *setiap* sambungan las yang panjang individualnya adalah  $L_i$  sedangkan hasil-hasil ditambahkan.

Dengan menggunakan harga ekuivalen  $I_p$  di atas dalam rumus puntiran, maka gaya puntir  $q_t$  per mm las, adalah

$$q_t = \frac{T\rho}{\Sigma \left( \frac{L_i^3}{12} + L_i \bar{x}_i^2 + L_i \bar{y}_i^2 \right)} \quad [\text{N/mm}] \quad (14-6)$$

\* Perhatikan bahwa  $I$  sebuah garis terhadap dirinya sendiri sama dengan nol.

di mana  $\rho$  adalah jarak dari titik berat semua las kepada *titik tertentu pada suatu las*. Gaya puntir  $q_t$  bekerja tegaklurus pada vektor radius  $\rho$ . *Komponen-komponen*  $q_t$  horisontal dan vertikal, dengan cara yang serupa dengan yang dikerjakan dalam penelaahan sambungan-sambungan paku keling, dapat dibuktikan, berturut-turut,

$$q_{tx} = \frac{Ty}{\sum \left( \frac{L_i^3}{12} + L_i \bar{x}_i^2 + L_i \bar{y}_i^2 \right)} \quad (14-6a)$$

dan

$$q_{ty} = \frac{Tx}{\sum \left( \frac{L_i^3}{12} + L_i \bar{x}_i^2 + L_i \bar{y}_i^2 \right)}$$

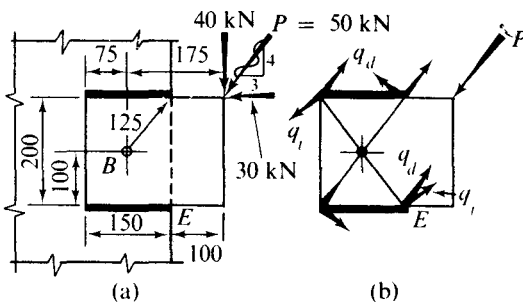
di mana seperti di atas,  $T$  adalah *momen puntir total*  $Pe$  pada sambungan tersebut, sedang  $x$  dan  $y$  adalah jarak koordinat pada sebuah titik yang dipilih pada las.

Superposisi vektoris gaya-gaya langsung dan puntiran per mm las memberikan *intensitas gaya total per mm las*. Pemeriksaan diagram untuk sambungan tersebut pada mana  $q_d$  dan  $q_t$  diperkirakan umumnya menyatakan titik yang memperoleh tegangan tertinggi pada las tersebut. Sebagaimana halnya sambungan paku keling yang dibebani secara eksentris, jawaban ini diperoleh dengan superposisi jawaban-jawaban yang tak-elastis dengan yang bersifat elastis.

Sebagai kesimpulan perlu diperhatikan bahwa penjumlahan vektor gaya per mm hanya dipergunakan dalam las sudut saja. Dalam hal las temu, tegangan-tegangan langsung dan puntiran digabungkan dengan menggunakan lingkaran Mohr.

#### CONTOH 14-8

Hitunglah ukuran dua las yang diperlukan untuk memasang sebuah pelat pada sebuah mesin seperti yang terlihat dalam Gambar 14-20(a) bila pelat memuat suatu gaya miring  $P = 50$  kN. Gunakanlah tegangan ijin dari AWS. Semua ukuran yang terlihat dalam mm.



Gambar 14-20

#### PENYELESAIAN

Gaya terpakai diuraikan menjadi komponen-komponen horisontal dan vertikal. Titik berat kedua las dapat dilihat berada di titik  $B$ . Dalam menghitung  $I_p$ , keadaan simetri dan kenyataan bahwa  $\bar{x}$  adalah nol harus diperhatikan. Pemeriksaan terhadap gaya-gaya langsung dan puntiran pada las itu dalam Gambar 14-20(b) memperlihatkan bahwa

titik  $E$  mempunyai tegangan yang tertinggi. Penggunaan Persamaan 14-5(a) dan 14-6(a) memberikan komponen-komponen  $q_d$  dan  $q_t$ , yang kemudian digunakan untuk mendapatkan  $q_{\max}$ .

$$\begin{aligned}
 P_x &= \frac{3}{5}(50) = 30 \text{ kN} & P_y &= \frac{4}{5}(50) = 40 \text{ kN} \\
 T &= 40(175) - 30(100) = 4000 \text{ kN}\cdot\text{mm} \\
 I_p &= 2\left(\frac{L^3}{12} + L\bar{y}^2\right) = 2\left[\frac{150^3}{12} + 150(100)^2\right] = 3,56 \times 10^6 \text{ mm}^3 \\
 (q_{dx})_E &= \frac{P_x}{\sum L_i} = \frac{30\,000}{150 + 150} = 100 \text{ N/mm} \rightarrow \\
 (q_{dy})_E &= \frac{P_y}{\sum L_i} = \frac{40\,000}{300} = 133 \text{ N/mm} \uparrow \\
 (q_{tx})_E &= \frac{T y_E}{I_p} = \frac{(4000)(10^3)(100)}{(3,56)(10^6)} = 112 \text{ N/mm} \rightarrow \\
 (q_{ty})_E &= \frac{T x}{I_p} = \frac{(4000)(10^3)(75)}{(3,56)(10^6)} = 84 \text{ N/mm} \uparrow \\
 q_{\max} &= q_E = \sqrt{(100 + 112)^2 + (133 + 84)^2} = 303 \text{ N/mm}
 \end{aligned}$$

Akhirnya, sehubungan dengan Persamaan 14-14 gaya ijin per milimeter las, tanpa memperhatikan arah gaya terpakai,

$$q = 101,8 \text{ W} = 303 \text{ N/mm} \quad \text{atau} \quad W = 2,98 \text{ mm}$$

Jadi las sudut ukuran 3 mm yang merata harus digunakan seluruhnya.

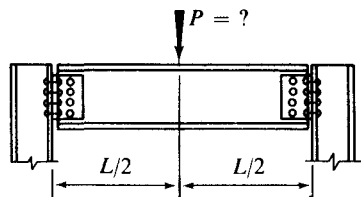
#### SOAL-SOAL UNTUK DISELESAIKAN

**14-1.** Sebuah batang dari sebuah susunan rangka yang dibuat dari dua buah siku  $102 \times 102 \times 12,7$  mm harus mengantarkan suatu gaya aksial dari 300 kN kepada sebuah pelat gusset 12 mm. Siku-siku tersebut harus disusun seperti yang terlihat dalam Gambar 14-10. Berapakah banyak paku keling 22 mm yang diperlukan? Berapakah banyak paku keling yang harus digunakan untuk membentuk kapasitas tarik penuh siku-siku tersebut? Gunakanlah tegangan ijin yang diberikan dalam Contoh 14-1.

**14-2.** Sebuah sambungan geser balok kerangka untuk sebuah balok S  $510 \times 97,3$  terdiri dari dua buah siku  $102 \times 89 \times 6,4$  mm dengan empat paku keling A502-1 22 mm melalui plat badan dan delapan paku keling pada kaki-kaki yang menonjol. (Sambungan yang sama dapat dilihat dalam Gambar 14-11). Tentukanlah kapasitas dari sambungan tersebut. Guna-

kanlah tegangan ijin yang diberikan dalam Contoh 14-1.

**14-3.** Sebuah balok W  $460 \times 74$  dipasang pada dua buah kolom W  $310 \times 97$  dengan perantara sambungan-sambungan yang masing-masing terdiri dari dua buah siku  $102 \times 89 \times 9,5$  mm. Empat buah paku keling 19 mm menyusup plat badan balok sedang delapan buah paku keling 19 mm digunakan pada masing-masing kolom. Berapakah gaya  $P$ , yang diatur oleh gaya-gaya



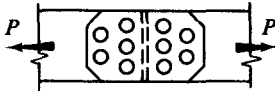
GAMBAR SOAL 14 - 3



dukung dan geser ijin pada paku-paku keling, dapat dilakukan pada balok tersebut seperti yang terlihat dalam gambar? Gunakanlah tegangan-tegangan AASHO (American Association of State Highway Officials) yang lama: geser, 93 MPa; dukung tunggal *atau* ganda, 186 MPa.

14-4. Bila sambungan-sambungan antara balok dan kolom yang dilukiskan dalam Soal 14-3 dibuat dengan baut-baut berkekuatan tinggi jenis gesekan A325-F 19 mm sebagai pengganti paku keling, berapakah gaya ijin  $P$ ?

14-5. Berapakah gaya tarik langsung yang dapat diberikan kepada sambungan temu struktural, paku keling berganda banyak yang terlihat dalam gambar? Berapakah efisiensi sambungan itu? Pelat-pelat utama tebalnya 13 mm dan lebarnya 250 mm; *dua* buah pelat tutup masing-masing tebalnya 7 mm. Diameter paku-paku keling adalah 22 mm. Tegangan-tegangan tarik, geser dan dukung ijin berturut-turut adalah  $140 \text{ MN/mm}^2$ ,  $100 \text{ MN/mm}^2$  dan  $340 \text{ MN/mm}^2$ .

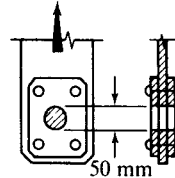


GAMBAR SOAL 14 - 5

14-6. Sebuah sambungan temu struktural, paku keling berganda banyak mempunyai susunan paku keling seperti pada sambungan dalam soal yang sebelum ini. Pelat-pelat utama tebalnya 10 mm dan lebar 200 mm; *kedua* pelat tutup masing-masing mempunyai tebal 6 mm dan lebar 200 mm. Paku-paku keling 25 mm dipergunakan dalam lobang-lobang berdiameter 27 mm. Bila sambungan tersebut meneruskan gaya 120 kN: (a) berapakah tegangan tarik dalam pelat-pelat tutup pada baris sebelah dalam paku-paku tersebut? (b) berapakah tegangan tarik dalam pelat utama pada baris-baris sebelah dalam dan luar dari paku-paku?

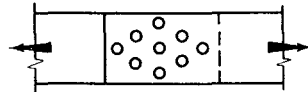
14-7. Sebuah pelat 25 mm  $\times$  200 mm yang mengantarkan suatu gaya tarik sebesar 467 kN diperkuat dengan dua buah pelat samping pada pasak yang berdiameter 50 mm untuk kebutuhan-kebutuhan gaya dukungan seperti yang terlihat dalam gambar. (a) Tentukanlah tebal pelat samping yang diperlukan bila tegangan dukung

ijin dalam geser tunggal atau ganda adalah 185 MPa. Nyatakanlah jawab tersebut dalam milimeter yang terdekat. (b) Tentukanlah jumlah paku keling 22 mm yang dibutuhkan untuk menempelkan pelat-pelat samping kepada pelat utama bila tegangan geser ijin adalah 90 MPa. Jawab: (a) 12 mm, (b) 4.



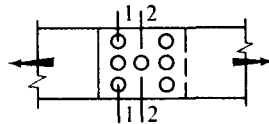
GAMBAR SOAL 14 - 7

14-8. Dua buah pelat 13 mm  $\times$  300 mm ditumpangkan dan dipaku kelingkan dengan paku-paku 25 mm seperti yang terlihat dalam gambar. Tentukanlah beban ijin dan efisiensi sambungan tersebut. Gunakanlah tegangan ijin yang diberikan dalam Soal 14-5. Jawab: 80,9%.



GAMBAR SOAL 14 - 8

14-9. Sebuah sambungan struktural, tumpang paku keling berganda banyak seperti yang terlihat dalam gambar didisain untuk beban 189 kN. Pelat-pelat mempunyai tebal 10 mm dan lebar 250 mm. Paku-paku keling dari 19 mm. (a) Berapakah tegangan geser dalam paku yang di tengah? (b) Berapakah tegangan tarik dalam pelat atas dalam baris 1-1 dan baris 2-2?



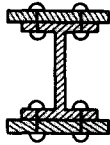
GAMBAR SOAL 14 - 9

14-10. Kerjakanlah kembali Contoh 14-5 bila sebagai pengganti paku keling digunakan baut-baut berkekuatan tinggi jenis gesekan A325-F 22 mm.

14-11. Sebuah sambungan temu struktural harus mengantarkan suatu gaya tarik sebesar

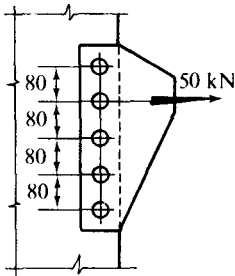
450 kN. Pelat utama adalah dari 200 mm × 25 mm. Gunakanlah pelat-pelat tutup 12 mm dan baut-baut kekuatan tinggi A325-F 22 mm. Disainlah sambungan tersebut yaitu tentukanlah jumlah baut dan ukuran-ukuran yang diperlukan.

14-12. Sebuah balok S 510 × 127 mempunyai dua buah pelat tutup 25 mm × 250 mm seperti yang terlihat dalam gambar. Balok gabungan ini memuat suatu geser vertikal total pada suatu irisan tertentu sebesar 650 kN. Dengan menggunakan tegangan ijin dari peraturan AISC (Contoh 14-1), tentukanlah jarak antara paku-paku keling 19 mm yang menghubungkan balok dengan pelat-pelat tutup.



GAMBAR SOAL 14 – 12

14-13. Sebuah pelat baja dipasangkan kepada sebuah mesin dengan lima baut 19 mm seperti yang terlihat dalam gambar. Tentukanlah tegangan yang disebabkan oleh gaya terpakai dalam baut yang mendapat tegangan tertinggi. Semua ukuran yang terlihat adalah dalam mm.

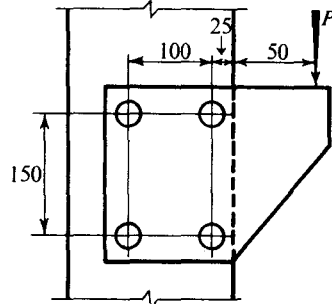


GAMBAR SOAL 14 – 13

14-14. Bila sambungan dalam Soal 14-13 dibuat dengan baut-baut kekuatan tinggi jenis gesekan A490-F 19 mm, berapakah besar gaya tarik mendatar ijin maksimum yang dapat diberikan seperti yang terlihat dalam Gambar Soal 14-13?

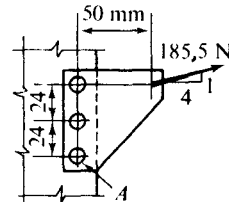
14-15. Bila tegangan geser dalam paku-paku keling mengatur beban ijin  $P$  yang dapat diberi-

kan kepada sambungan yang terlihat dalam gambar, berapakah gaya ijin  $P$ ? Paku-paku keling adalah 19 mm sedang tegangan geser ijin adalah 100 MN/m<sup>2</sup>. Semua ukuran yang terlihat dalam gambar adalah dalam mm.



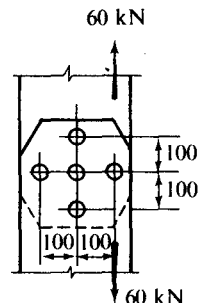
GAMBAR SOAL 14 – 15

14-16. Untuk sambungan paku keling yang terlihat dalam gambar dan dipakai dalam pesawat udara, (a) tentukanlah tegangan maksimum pada paku keling yang mendapat tegangan tertinggi. Semua paku berdiameter 3 mm. (b) Bila paku keling  $A$  patah, berapakah jadinya tegangan pada paku keling yang mempunyai tegangan yang tertinggi? Semua ukuran yang terlihat adalah dalam mm.



GAMBAR SOAL 14 – 16

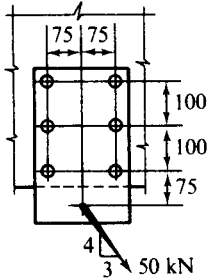
14-17. Hitunglah tegangan geser maksimum da-



GAMBAR SOAL 14 – 17

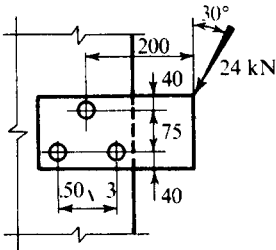
lam kelompok paku keling yang terlihat dalam gambar bila semua paku berdiameter 19 mm. Pelat-pelat membentuk sebuah sambungan tum-pang. Semua ukuran yang terlihat dalam gambar adalah dalam mm.

14-18. Hitunglah tegangan geser yang disebabkan oleh gaya terpakai dalam tiap paku-paku keling yang berdiameter 24 mm untuk sambungan yang terlihat dalam gambar.



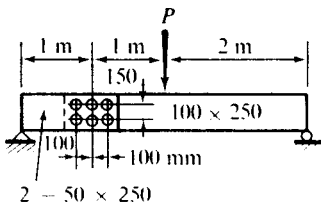
GAMBAR SOAL 14 – 18

14-19. Tentukanlah tegangan geser maksimum dalam paku-paku keling dalam braket yang dibebani seperti yang terlihat dalam gambar. Semua paku berdiameter 24 mm.



GAMBAR SOAL 14 – 19

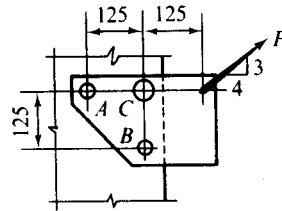
14-20. Dengan maksud untuk mendapatkan sebuah balok kayu yang mempunyai panjang yang cukup, dua potong kayu pendek 50 mm x



GAMBAR SOAL 14 – 20

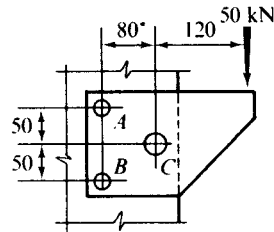
250 mm disambungkan kepada ujung sebuah kayu 100 mm x 250 mm oleh enam buah baut 19 mm seperti yang terlihat dalam gambar. Bila beban kerja sebuah baut 19 mm dalam geseran ganda dalam arah yang sembarang terbatas sampai 5 kN, berapakah beban maksimum  $P$  yang dapat didukung oleh balok tersebut? Abaikan berat balok tersebut.

14-21. Tentukanlah gaya boleh  $P$  yang dapat diberikan pada sebuah sambungan keling yang mempunyai ukuran-ukuran seperti yang terlihat dalam gambar. Luas penampang paku-paku  $A$  dan  $B$  adalah 130 mm<sup>2</sup> dan paku  $C$  adalah 390 mm<sup>2</sup>. Tegangan geser boleh dalam paku adalah 140 MPa.



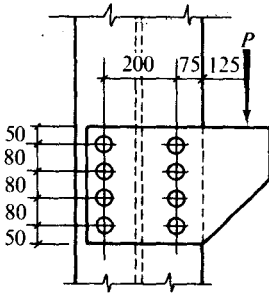
GAMBAR SOAL 14 – 21

14-22. Hitunglah tegangan geser maksimum dalam paku-paku keling untuk sambungan yang terlihat dalam gambar. Paku-paku  $A$  dan  $B$  mempunyai luas penampang 500 mm<sup>2</sup> sedang paku  $C$  dengan luas penampang 1000 mm<sup>2</sup>.



GAMBAR SOAL 14 – 22

14-23. Sebuah braket tiang dibuat dengan memasang pelat-pelat gusset 12 mm pada flens sebuah tiang dengan baut-baut kekuatan tinggi A325-F 22 mm. Ukuran-ukuran sambungan tersebut terlihat dalam gambar. Tentukanlah beban keselamatan  $P$  untuk braket tersebut.



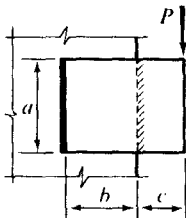
GAMBAR SOAL 14 – 23

14-24. Tinjaulah disain dalam Soal 14-7 dengan mengelas pelat-pelat penguat pada pelat utama. Selidikilah dua skema pengelasan pilihan: (a) las kontinu, semuanya sekitar pelat-pelat penguat, dan (b) las terputus-putus dengan besar yang cukup untuk membentuk gaya-gaya yang dibutuhkan. Penyelesaian yang manakah yang anda sukai? Gunakanlah tegangan-tegangan AWS.

14-25. Kerjakanlah kembali Contoh 14-7 untuk sebuah siku  $203 \times 152 \times 19,0$  mm dengan menggunakan las sudut 12 mm.

14-26. Tentukanlah panjang-panjang las  $L_1$  dan  $L_2$  yang pantas dalam Contoh 14-7 bila untuk memperkecil panjang sambungan, las dilakukan sepanjang  $ad$ .

14-27. Sebuah braket dibebani seperti yang terlihat dalam gambar. Bila tegangan geser boleh las tersebut adalah  $145 \text{ MN/m}^2$ , berapakah ukuran las sudut yang harus digunakan, pada

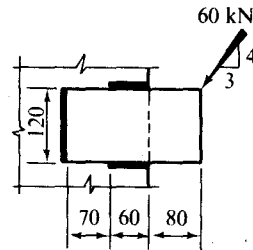


GAMBAR SOAL 14 – 27

milimeter yang terdekat? Ambillah  $a = 200$  mm,  $b = 150$  mm,  $c = 100$  mm dan  $P = 50$  kN.

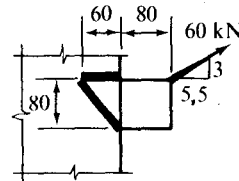
14-28. Kerjakanlah kembali soal yang di atas dengan mengambil  $a = 100$  mm,  $b = 75$  mm,  $c = 50$  mm dan  $P = 30$  kN.

14-29. Sebuah braket harus dipasang pada badan sebuah mesin dengan melalui tiga pengelasan seperti yang terlihat dalam gambar. Bila gaya serong terpakai adalah 60 kN, berapakah ukuran las sudut yang dibutuhkan?



GAMBAR SOAL 14 – 29

14-30.\* Tentukanlah ukuran las sudut yang diperlukan untuk sambungan yang dibebani seperti yang terlihat dalam gambar. Jawab:  $\frac{3}{8}$  in.



GAMBAR SOAL 14 – 30

14-31. Bila dalam Soal 14-12 pelat-pelat tutup ditempelkan pada balok dengan melalui pengelasan, tentukanlah ukuran las sudut yang diperlukan. (Petunjuk: tentukanlah arus geser per meter panjang balok, kemudian tentukanlah besar dan panjang las yang dibutuhkan dalam jarak tersebut. Pakailah las terputus-putus).

# 15 Metoda Energi

## 15-1 PENDAHULUAN

Dalam bab-bab yang lalu dari buku ini, persamaan-persamaan keseimbangan statis selalu dilakukan untuk memecahkan persoalan-persoalan dasar dalam mekanika teknik. Konsep dasar yang sama untuk persoalan-persoalan ini didasarkan pula kepada azas kekekalan energi. Metoda-metoda analisis persoalan yang berlaku umum yang dihasilkan dengan menggunakan konsep ini serta pengkajian metoda-metoda ini akan menjadi sasaran bab ini.

Dalam mekanika, energi didefinisikan sebagai kapasitas untuk melakukan kerja, dan kerja adalah hasil kali suatu gaya dengan jarak dalam arah gerak gaya. Dalam benda padat yang berdeformasi (berubah bentuk), tegangan yang dikalikan dengan luas yang bersangkutan adalah gaya, sedang deformasi adalah jarak. Hasil kali kedua besaran ini merupakan *kerja dalam* (internal work) yang dilakukan dalam sebuah benda oleh gaya terpakai luar. Kerja dalam ini disimpan dalam sebuah benda sebagai *energi deformasi elastis dalam* atau *energi regangan elastis* (elastic strain energy). Metoda-metoda untuk menghitung energi dalam ini akan dibahas pertama-tama. Kemudian dengan menggunakan azas kekekalan energi dan menyamakan kerja dalam *dengan kerja luar* kita akan memperoleh defleksi batang yang dibebani secara aksial, batang puntiran dan balok-balok. Prosedur ini memungkinkan penyelidikan tegangan dan defleksi tidak hanya dari batang yang mendapat gaya-gaya terpakai yang stedi (tetap), tetapi juga batang yang mendapat *energi* atau *beban tumbuk*.

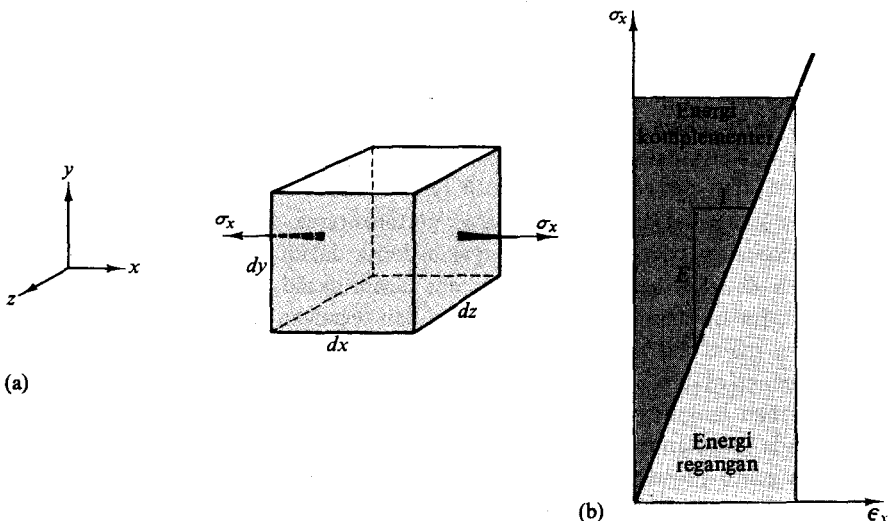
Pemecahan langsung soal-soal dengan menyamakan kerja luar dengan kerja dalam terbatas pada kejadian di mana hanya satu gaya saja yang bekerja pada sebuah batang. Karena itu suatu prosedur yang umum akan diperlakukan di bawah judul kerja *semua* (virtual work), dan akan digunakan dalam membahas soal-soal defleksi dalam hakekat yang sangat umum, seperti yang disebabkan oleh pembebanan susunan rangka dan batang lengkung. Dalam semua keadaan, kita akan menganggap batang-batang berada

dalam keseimbangan, sedang pemecahan soal ketidak-stabilan dengan metoda energi di luar jangkauan buku ini.

## 15-2 ENERGI REGANGAN ELASTIS UNTUK TEGANGAN SUMBU TUNGGAL

Tinjaulah sebuah elemen kecil tak berhingga, seperti yang terlihat dalam Gambar 15-1(a), yang mendapat tegangan normal  $\sigma_x$ . Gaya yang bekerja pada permukaan kanan atau kiri dari elemen ini adalah  $\sigma_x dy dz$ , di mana  $dy dz$  adalah luas kecil tak berhingga dari elemen tersebut. Disebabkan oleh gaya ini, elemen tersebut bertambah panjang sebesar  $\epsilon_x dx$  di mana  $\epsilon_x$  adalah regangan dalam arah  $x$ . Bila elemen tersebut terbuat dari suatu bahan yang elastis linier, maka tegangan sebanding dengan regangan, seperti pada Gambar 15-1(b). Karena itu bila elemen tersebut semula bebas dari pengaruh tegangan, maka gaya tersebut yang akhirnya bekerja pada elemen tersebut meningkat secara linier dari nol sampai mencapai harga yang penuh. Gaya rata-rata yang bekerja pada elemen ketika terjadi deformasi adalah  $\sigma_x dy dz/2$ . Gaya rata-rata ini yang dikalikan dengan jarak yang ditempuh selama bekerja merupakan kerja yang dilakukan pada elemen tersebut. Untuk benda yang elastis sempurna tidak ada energi yang hilang, sedang kerja yang dilakukan pada elemen disimpan sebagai energi regangan dalam yang dapat dipulihkan. Jadi, energi regangan elastis dalam  $U$  untuk sebuah elemen tidak berhingga kecil yang mengalami tegangan sumbu tunggal (uniaksial) adalah

$$dU = \underbrace{\frac{1}{2} \sigma_x dy dz \times \epsilon_x dx}_{\text{kerja}} = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x dx dy dz = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x dV \quad (15-1)$$



Gambar 15-1 (a) Sebuah elemen dalam pengaruh tegangan tarik dan (b) diagram tegangan regangan

di mana  $dV$  adalah volume elemen.

Dengan menyusun kembali Persamaan 15-1, kita memperoleh energi regangan yang disimpan dalam sebuah benda elastis per satuan volume bahan, atau *kerapatan energi regangannya* (strain-energy density)  $U_o$ . Jadi

$$U_o = \frac{dU}{dV} = \frac{\sigma_x \epsilon_x}{2} \quad (15-1a)$$

Pernyataan ini secara grafis dapat ditafsirkan sebagai luas di bawah garis miring pada diagram tegangan-regangan, Gambar 15-1(b). Luas yang dibatasi oleh garis miring dan sumbu vertikal dari diagram tersebut disebut *energi komplementer* (complementary energy). Untuk bahan-bahan elastis linier kedua luas adalah sama besar. Pernyataan-pernyataan yang serupa dengan Persamaan 15-1(a) berlaku pula untuk tegangan-tegangan normal  $\sigma_y$  dan  $\sigma_z$  serta regangan-regangan yang bersangkutan  $\epsilon_y$  dan  $\epsilon_z$ .

Karena dalam daerah elastis hukum Hooke berlaku,  $\sigma_x = E\epsilon_x$ , maka Persamaan 15-1a dapat ditulis sebagai

$$U_o = \frac{dU}{dV} = \frac{E\epsilon_x^2}{2} = \frac{\sigma_x^2}{2E} \quad (15-1b)$$

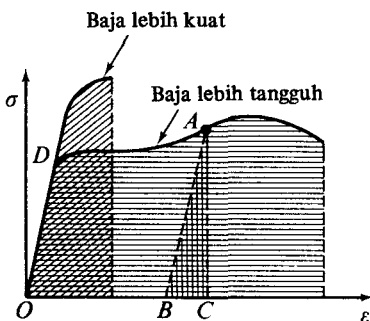
atau

$$U = \int_{\text{vol}} \frac{\sigma_x^2}{2E} dV \quad (15-1c)$$

Bentuk-bentuk persamaan energi regangan elastis ini mudah digunakan, meskipun mereka menyembunyikan pernyataan ketergantungan energi terhadap gaya dan jarak.

Untuk suatu bahan tertentu, substitusi harga tegangan pada batas proporsional ke dalam Persamaan 15-1b memberikan suatu index kemampuan bahan untuk menyimpan atau menyerap energi tanpa deformasi permanen. Besaran yang diperoleh itu disebut *modulus kelentingan* (modulus of resilience) dan digunakan untuk membedakan bahan-bahan untuk pemakaian di mana energi harus diserap oleh batang. Umpamanya sebuah baja dengan batas proporsional 200 MPa dan  $E$  dari  $200 \times 10^3$  MPa mempunyai modulus lenting sebesar  $\sigma^2/(2E) = (200)^2/(2 \times 200 \times 10^3) = 0,1$  N·mm per mm<sup>3</sup>, pada hal sebuah kayu cemara Douglas yang mempunyai batas proporsional 44,5 MPa dan  $E$  dari  $13,2 \times 10^3$  MPa mempunyai suatu modulus lenting sebesar  $(44,5)^2/(2 \times 13,2 \times 10^3) = 0,075$  N·mm per meter kubik.

Dengan pertimbangan yang sama dengan yang di atas, luas di bawah diagram tegangan-regangan yang lengkap, Gambar 15-2, memberikan suatu pengukuran kemampuan

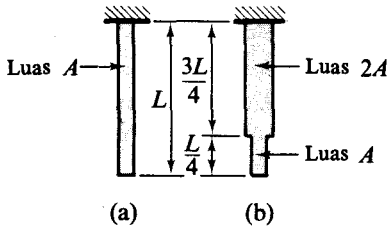


Gambar 15-2 Definisi ketangguhan

bahan untuk menahan beban energi sampai pecah dan ini dinamakan *ketangguhan* (toughness). Makin besar luas total yang ada di bawah diagram tegangan-regangan, makin tangguh bahan itu. Dalam daerah tak-elastis, hanya sebagian kecil energi saja yang diserap oleh suatu bahan yang dapat dikembalikan lagi. Kebanyakan energi tersebut *tersebar* ke dalam bahan yang berdeformasi permanen dan hilang menjadi panas. Energi yang dapat dikembalikan bila contoh telah diberi tegangan sampai pada suatu titik seperti *A* dalam Gambar 15-2, dinyatakan oleh segitiga *ABC*. Garis *AB* dari segitiga ini sejajar dengan garis *OD*, disebabkan semua bahan bersifat elastis sesudah tegangan dibebaskan.

#### CONTOH 15-1

Dua batang elastis, yang ukuran-ukurannya terlihat dalam Gambar 15-3, harus menyerap sejumlah energi yang sama yang diberikan oleh gaya-gaya aksial. Abaikanlah konsentrasi tegangan dan bandingkanlah tegangan-tegangan dalam kedua batang.



Gambar 15-3

#### PENYELESAIAN

Batang yang terlihat dalam Gambar 15-3(a) mempunyai luas penampang yang serba sama, karena itu tegangan normal  $\sigma_1$  adalah konstan di seluruh batang tersebut. Dengan menggunakan Persamaan 15-1c dan mengintegrasikan atas volume batang  $V$ , kita dapat menulis energi total batang itu sebagai

$$U_1 = \int_V \frac{\sigma_1^2}{2E} dV = \frac{\sigma_1^2}{2E} \int_V dV = \frac{\sigma_1^2}{2E} (AL)$$

di mana  $A$  adalah luas penampang batang dan  $L$  panjangnya.

Batang yang diperlihatkan dalam Gambar 15-3(b) mempunyai penampang yang bervariasi. Karena itu bila tegangan  $\sigma_2$  bekerja dalam batang bagian bawah, maka tegangan di bagian atasnya menjadi  $\frac{1}{2}\sigma_2$ . Dengan menggunakan lagi Persamaan 15-1c dan mengintegrasikan atas volume batang, kita memperoleh bahwa energi total yang akan diserap batang ini dalam bentuk tegangan  $\sigma_2$  adalah

$$\begin{aligned} U_2 &= \int_V \frac{\sigma^2}{2E} dV = \frac{\sigma_2^2}{2E} \int_{\text{bagian bawah}} dV + \frac{(\sigma_2/2)^2}{2E} \int_{\text{bagian atas}} dV \\ &= \frac{\sigma_2^2}{2E} \left( \frac{AL}{4} \right) + \frac{(\sigma_2/2)^2}{2E} \left( 2A \frac{3L}{4} \right) = \frac{\sigma_2^2}{2E} \left( \frac{5}{8} AL \right) \end{aligned}$$

Bila kedua batang harus menyerap energi yang sama banyak,  $U_1 = U_2$  dan



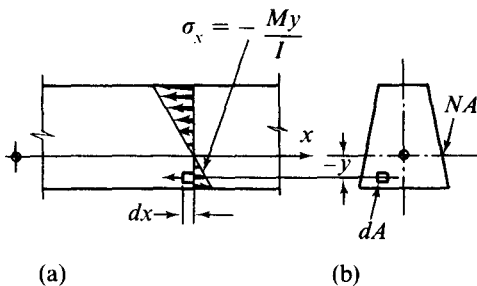
$$\frac{\sigma_1^2}{2E}(AL) = \frac{\sigma_2^2}{2E}\left(\frac{5}{8}AL\right) \quad \text{atau} \quad \sigma_2 = 1.265\sigma_1$$

Pembesaran luas penampang pada sebagian batang dalam kasus yang kedua sesungguhnya mengganggu. Untuk beban energi yang sama, tegangan dalam batang yang "diperkuat" adalah 26,5% lebih tinggi dari batang yang pertama. Keadaan ini tidak akan didapati dalam disain batang untuk beban-beban statis.

### 15-3 ENERGI REGANGAN ELASTIS DALAM LENTURAN MURNI

Setelah energi regangan elastis untuk sebuah elemen kecil tak berhingga dalam tegangan sumbu tunggal dibuat, maka kita dapat memperoleh energi regangan elastis balok dalam lenturan murni. Untuk kasus khusus ini, tegangan normal diketahui bervariasi linier dari sumbu netral seperti yang terlihat dalam Gambar 15-4(a), dan tegangan yang bekerja pada elemen yang tertentu adalah  $\sigma_x = -My/I$ , Persamaan 5-1a. Volume elemen ini adalah  $dx dA$ , di mana  $dx$  adalah panjang elemen dan  $dA$  merupakan luas penampangnya, Gambar 15-4(b). Jadi dengan menggunakan Persamaan 15-1c dan mengintegrasikan atas volume balok  $V$ , maka pernyataan energi regangan elastis dalam untuk sebuah balok adalah

$$U = \int_V \frac{\sigma_x^2}{2E} dV = \int_V \frac{1}{2E} \left( -\frac{My}{I} \right)^2 dx dA$$



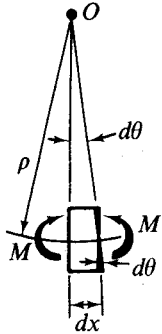
Gambar 15-4 Segmen sebuah balok yang digunakan untuk menurunkan ungkapan energi regangan dalam lenturan

Dengan menyusun kembali suku-suku persamaan dan dengan mengingat kembali bahwa  $M$  pada suatu irisan balok adalah konstan dan bahwa maksud melaksanakan integrasi dapat dipilih secara tertentu, kita memperoleh

$$U = \int_{\text{panjang}} \frac{M^2}{2EI^2} dx \int_{\text{luas}} y^2 dA = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI} \quad (15-2)$$

di mana penyederhanaan yang terakhir dimungkinkan oleh definisi  $I = \int y^2 dA$ . Persamaan 15-2 menyederhanakan integral volume untuk energi elastis balok prismatis dalam lenturan murni menjadi integral tunggal yang diambil terhadap panjang batang  $L$ .

Untuk perhatian lebih lanjut, Persamaan 15-2 akan diturunkan kembali dari sudut pandangan yang lain, dengan meninjau sebuah segmen elementer dari sebuah balok yang panjangnya  $dx$ , seperti yang terlihat dalam Gambar 15-5. Sebelum melakukan momen-momen lentur  $M$ , kedua bidang yang tegaklurus pada sumbu balok adalah sejajar. Sete-



**Gambar 15-5** Sebuah segmen balok yang digunakan dalam penurunan energi regangan dalam lenturan dengan cara yang lain.

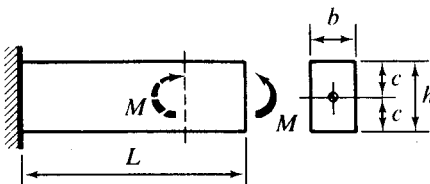
lah momen-momen lentur tersebut dilakukan, perluasan kedua bidang tersebut, yang masih tetap berupa bidang datar, tidak sejajar lagi dan akan berpotongan di titik  $O$ , dan sudut yang dibentuk oleh kedua bidang ini adalah  $d\theta$ . Selanjutnya karena harga penuh momen  $M$  dicapai *secara berangsur-angsur*, maka momen *rata-rata* yang bekerja melalui suatu sudut  $d\theta$  adalah  $\frac{1}{2}M$ . Jadi kerja luar  $U_e$  yang dilakukan pada segmen balok adalah  $dW_e = \frac{1}{2}M d\theta$ . Lebih lanjut lagi, karena untuk defleksi kecil  $dx \approx \rho d\theta$ , di mana  $\rho$  merupakan radius kurva garis elastis dan  $1/\rho = M/EI$ , maka dari azas kekekalan energi, energi regangan dalam sebuah elemen balok adalah

$$dU = dW_e = \frac{1}{2}M d\theta = \frac{1}{2}M \frac{dx}{\rho} = \frac{M^2 dx}{2EI}$$

yang mempunyai arti yang sama dengan Persamaan 15-2.

#### CONTOH 15-2

Hitunglah energi regangan elastis yang tersimpan dalam sebuah kantilever sikuempat yang memperoleh momen lentur  $M$  yang bekerja pada ujung, Gambar 15-6.



**Gambar 15-6**

#### PENYELESAIAN

Momen lentur pada setiap irisan balok ini, demikian juga kekakuan lentur  $EI$  adalah konstan. Dengan penggunaan langsung Persamaan 15-2,

$$U = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI} = \frac{M^2}{2EI} \int_0^L dx = \frac{M^2 L}{2EI}$$

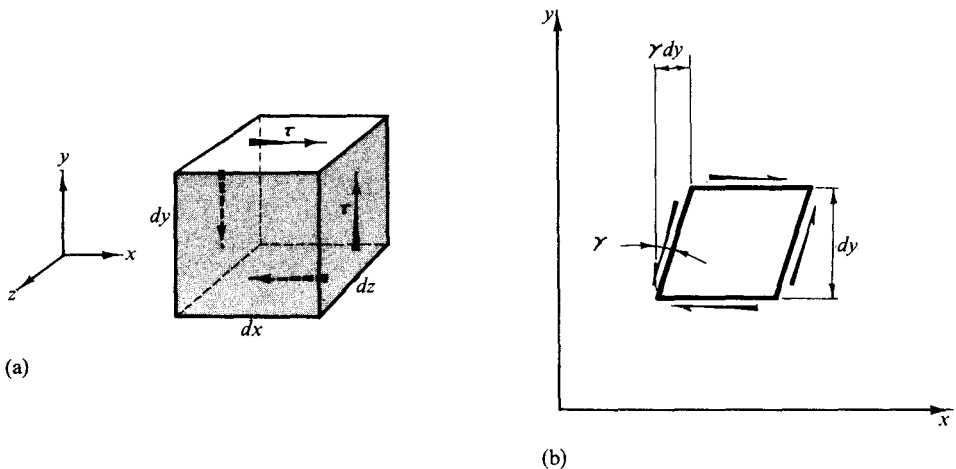
Adalah lebih baik kita menulis hasil ini dalam bentuk lain. Jadi, karena  $\sigma_{\max} = Mc/I$ , maka  $M = \sigma_{\max} I/c = 2 \sigma_{\max} I/h$ , dan  $I = bh^3/12$ ,

$$U = \frac{\left(\frac{2\sigma_{\max} I}{h}\right)^2 L}{2EI} = \frac{\sigma_{\max}^2 (bhL)}{2E} = \frac{\sigma_{\max}^2}{2E} \left(\frac{1}{3} \text{vol}\right)$$

Untuk tegangan maksimum tertentu, volume bahan dalam balok ini hanyalah sepertiga seefektif penyerapan energi yang terdapat pada batang yang mendapatkan tegangan yang merata di mana  $U = (\sigma^2/2E)(\text{vol})$ . Hasil-hasil ini berasal dari adanya tegangan yang bervariasi dalam balok. Bila momen lentur bervariasi pula disepanjang balok prismatis, maka volume bahan tersebut menjadi kurang efektif lagi.

#### 15-4 ENERGI REGANGAN ELASTIS UNTUK TEGANGAN GESER

Pernyataan energi regangan elastis untuk sebuah elemen yang kecil tak berhingga dalam geseran murni dapat ditetapkan dengan cara yang serupa dengan yang dibuat untuk tegangan sumbu tunggal. Jadi tinjaulah sebuah elemen dalam keadaan geser seperti yang terlihat dalam Gambar 15-7(a). Bentuk deformasi dari elemen ini diperlihatkan dalam Gambar 15-7(b), di mana diandaikan bahwa bidang dasar dari elemen ter-



**Gambar 15-7** Sebuah elemen untuk menurunkan pernyataan energi regangan yang disebabkan oleh tegangan geser.

sebut berada dalam kedudukan yang tetap.\* Begitu elemen ini berdeformasi, gaya pada bidang atas mencapai suatu harga akhir sebesar  $\tau \, dx \, dz$ . Pergeseran total gaya ini untuk deformasi elemen yang kecil adalah  $\gamma \, dy$ , Gambar 15-7(b). Karena itu, berhubung kerja luar yang dilakukan pada elemen itu sama dengan energi regangan elastis dalam yang dapat pulih kembali, maka

$$dU_{\text{geser}} = \underbrace{\frac{1}{2} \tau \, dx \, dz}_{\text{gaya rata-rata}} \times \underbrace{\gamma \, dy}_{\text{jarak}} = \frac{1}{2} \tau \gamma \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{2} \tau \gamma \, dV \quad (15-3)$$

\* Pengandaian ini tidak membuat ungkapan menjadi kurang berlaku umum.

di mana  $dV$  adalah volume elemen kecil tak berhingga.

Dengan menyusun kembali Persamaan 15-3, maka kerapatan energi regangan geser menjadi

$$(U_o)_{\text{geser}} = \left( \frac{dU}{dV} \right)_{\text{geser}} = \frac{\tau\gamma}{2} \quad (15-3a)$$

Dengan menggunakan hukum Hooke untuk tegangan geser,  $\tau = G\gamma$ , maka Persamaan 15-3a dapat ditransformasikan sebagai

$$(U_o)_{\text{geser}} = \left( \frac{dU}{dV} \right)_{\text{geser}} = \frac{\tau^2}{2G} \quad (15-3b)$$

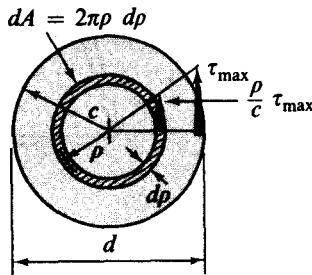
atau

$$U_{\text{geser}} = \int_{\text{vol}} \frac{\tau^2}{2G} dV \quad (15-3c)$$

Perhatikanlah kesamaan Persamaan 15-3, 15-3a, 15-3b dan 15-3c dengan Persamaan 15-1, 15-1a, 15-1b dan 15-1c untuk elemen-elemen dalam status tegangan sumbu tunggal.

#### CONTOH 15-3

Hitunglah energi yang diserap oleh sebuah batang melingkar elastis yang mendapat momen puntir yang konstan dalam bentuk tegangan geser maksimum dan volume bahan, Gambar 15-8.



Gambar 15-8

#### PENYELESAIAN

Tegangan geser dalam sebuah batang melingkar elastis memperoleh momen puntir bervariasi linier dari sumbu mendatar. Jadi tegangan geser yang bekerja pada sebuah elemen pada jarak  $\rho$  dari tengah-tengah penampang adalah  $\tau_{\max}\rho/c$ . Kemudian, dengan menggunakan Persamaan 15-3(c) dan mengintegrasikan pada volume batang  $V$  yang panjangnya  $L$ , kita memperoleh

$$\begin{aligned} U &= \int_V \frac{\tau^2}{2G} dV = \int_V \frac{\tau_{\max}^2 \rho^2}{2Gc^2} 2\pi\rho d\rho L \\ &= \frac{\tau_{\max}^2 2\pi L}{2G c^2} \int_0^c \rho^3 d\rho = \frac{\tau_{\max}^2 2\pi L c^4}{2G c^2 4} \\ &= \frac{\tau_{\max}^2}{2G} \left( \frac{1}{2} \text{vol} \right) \end{aligned}$$

Bila terdapat tegangan geser yang serbasama di seluruh batang itu, maka pengaturan yang lebih efisien untuk penyerapan energi dapat diperoleh. Dalam praktek keadaan hampir dapat dicapai dalam pemasangan karet jenis sisipan pada mesin-mesin.

### \*15-5 ENERGI REGANGAN UNTUK STATUS TEGANGAN SUMBU BANYAK

Seperti telah ditunjukkan dalam Pasal 15-2, persamaan-persamaan yang serupa dengan Persamaan 15-1a dapat ditulis untuk tegangan-tegangan normal  $\sigma_y$  dan  $\sigma_z$  dan regangan-regangan muai  $\epsilon_y$  dan  $\epsilon_z$ . Untuk menjadikan bentuk Persamaan 15-3a berlaku umum dengan mengikutsertakan semua komponen tegangan geser yang mungkin (lihat Gambar 1-3) serta regangan-regangan geser yang bersangkutan, kita harus mengenal bahwa Persamaan 15-3a ditulis dalam sumbu-sumbu koordinat  $xy$ . Karena itu, ia dapat ditulis kembali sebagai  $(U_o)_{\text{geser}} = \tau_{xy}\gamma_{xy}/2$ . Kemudian dengan hanya menukarkan tanda huruf, energi regangan geser yang bersangkutan dengan  $\tau_{yz}$  dan  $\tau_{zx}$  dapat pula dituliskan. Berdasarkan ini pernyataan energi regangan untuk status tegangan tiga dimensi langsung diperoleh dengan superposisi energi yang berhubungan dengan tiap komponen tegangan, yaitu

$$U_o = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2}\sigma_x\epsilon_x + \frac{1}{2}\sigma_y\epsilon_y + \frac{1}{2}\sigma_z\epsilon_z + \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy} + \frac{1}{2}\tau_{yz}\gamma_{yz} + \frac{1}{2}\tau_{zx}\gamma_{zx} \quad (15-4)$$

Dengan substitusi ke dalam persamaan hubungan-hubungan regangan yang diberikan oleh hukum Hooke umum, yaitu Persamaan 2-6 dan 2-9a, ke dalam persamaan yang di atas serta melakukan beberapa manipulasi aljabar yang sederhana, kita memperoleh

$$V_o = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \quad (15-4a)$$

sebagai pernyataan energi regangan elastis per satuan volume untuk bahan, *isotropik*. Suku terakhir dari persamaan menjadi nol untuk keadaan di mana tidak terdapat tegangan geser. Untuk kasus tegangan bidang dua dimensi dengan  $\sigma_z = 0$  dan  $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ , maka Persamaan 15-4a lebih disederhanakan menjadi

$$U_o = \frac{dU}{dV} = \frac{\sigma_x^2}{2E} + \frac{\sigma_y^2}{2E} - \frac{\nu}{E}\sigma_x\sigma_y + \frac{\tau_{xy}^2}{2G} \quad (15-4b)$$

### \*15-6 DISAIN BATANG UNTUK BEBAN ENERGI

Hasil-hasil pemeriksaan dari contoh-contoh yang kita pecahkan menunjukkan karakteristik-karakteristik umum yang harus ditinjau dalam mendisain batang yang akan menahan beban energi. Jadi, apakah yang kita tinjau adalah batang yang dibebani secara

aksial, balok atau batang puntiran, maka tegangan maksimum untuk beban energi tertentu  $U$  yang diserap oleh batang dinyatakan oleh

$$\sigma_{\max} = \sqrt{\frac{2EU}{fV}} \quad \text{atau} \quad \tau_{\max} = \sqrt{\frac{2GU}{fV}}$$

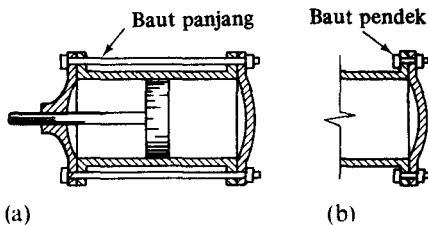
di mana  $f$  merupakan suatu gesekan yang harus dikalikan dengan volume total batang  $[V]$  yang tergantung pada jenis distribusi tegangan.

Dari pernyataan-pernyataan ini dapat kita lihat bahwa untuk  $U$  tertentu, tegangan yang terkecil akan kita peroleh :

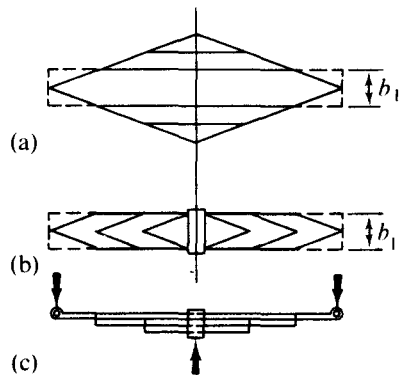
- (1) Dengan memilih bahan dengan  $E$  atau  $G$  yang rendah;
- (2) Dengan membuat *volume* total batang itu besar;
- (3) Dengan memberikan bahan tegangan yang merata.

Bila tegangan yang konstan terdapat di seluruh benda,  $f = 1$ . Batang melingkar padat puntiran yang biasanya terdapat pada pegas menjadi cukup baik karena  $f = 0,5$ . Untuk tegangan yang sama, volume bahan sebuah balok paling baik hanya sepertiga seefektif pada batang yang dibebani secara aksial. Keadaan ini hanya didapati dalam balok-balok yang berkekuatan konstan. Umpamanya, kita dapat melihat\* bahwa bila sebuah kantilever dengan irisan sikuempat digunakan untuk menyerap energi yang diberikan oleh suatu gaya terpusat pada ujung, maka  $f = \frac{1}{9}$ .

Beberapa kejadian dapat kita sebutkan sebagai ilustrasi keadaan-keadaan praktis di mana azas-azas di atas diterapkan. Kayu digunakan dalam bantalan jalan kereta api karena mempunyai  $E$  yang rendah sedang harga per satuan volume bahan adalah kecil. Dalam silinder dan bor palu tangan pneumatik, Gambar 15-9, baut yang sangat panjang dipakai untuk memasang ujung-ujung pada tabung. Baut-baut yang panjang memiliki volume bahan yang besar yang dalam operasi mendapat tegangan tarik yang merata. Pada babak permulaan perkembangan alat ini, dipergunakan baut-baut yang pendek



Gambar 15-9 Disain silinder pneumatik yang (a) baik dan (b) buruk



Gambar 15-10 Pegas daun (a) daun-daun sebuah pegas gabungan dalam satu bidang yang hampir sama dengan balok berkekuatan tetap.

\* Lihat Soal 15-6.

hingga mengakibatkan seringkali terjadi kegagalan. Suatu perkiraan praktis mengenai balok kekuatan tetap diperoleh dalam pegas daun (leaf spring), lihat Gambar 15-10(b) dan (c). Pelbagai pegas daun, bila dibentangkan, Gambar 15-10(a), kira-kira setara dengan sebuah balok kekuatan tetap† (lihat Gambar 10-18(c)).

## 15-7 DEFLEKSI DENGAN METODA ENERGI

Seperti dinyatakan dalam pendahuluan, azas kekekalan energi dapat digunakan untuk mendapatkan defleksi sebuah batang yang mempunyai beban. Untuk maksud ini, energi regangan dalam  $U$  sebuah batang ditentukan dengan menggunakan persamaan yang telah kita turunkan di atas. Kemudian dengan menyamakan energi ini dengan kerja luar  $W_e$  yang dilakukan oleh suatu gaya, kita dapat membuat hubungan dari mana kita memperoleh defleksi dalam arah gaya terpakai. Prosedur ini dapat juga digunakan hanya dalam keadaan di mana satu gaya bekerja pada sebuah batang. Suatu metoda yang lebih umum untuk mendapatkan defleksi pada suatu titik yang sembarang pada batang yang disebabkan oleh pembebanan yang sembarang akan kita bahas dalam Pasal 15-9.

Untuk yang sekarang, kita akan mengandaikan bahwa suatu gaya luar *dikenakan secara berangsur-angsur* pada sebuah benda. Ini berarti bahwa, begitu gaya atau momen puntir dilakukan, maka efek yang sepenuhnya pada bahan akan tercapai secara berangsur-angsur dari nol. Karenanya kerja luar  $U_e$  sama dengan setengah gaya total dikalikan dengan defleksi dalam arah geraknya.

Perhatikanlah bahwa karena  $W_e = U$ , tidak seperti prosedur yang dipergunakan dalam contoh yang berikut, maka energi regangan sering dengan mudah dapat dihitung dengan menggunakan pernyataan defleksi batang yang selama ini kita turunkan dalam buku ini.

### CONTOH 15-4

Hitunglah defleksi ujung bebas sebuah batang elastis dengan luas penampang konstan  $A$  dan panjang  $L$  yang disebabkan oleh suatu gaya aksial  $P$  yang bekerja pada ujung bebas itu.

### PENYELESAIAN

Bila gaya  $P$  dengan berangsur-angsur diberikan pada batang itu, maka kerja luar  $W_e = \frac{1}{2}P\Delta$ , di mana  $\Delta$  adalah defleksi ujung batang. Pernyataan energi regangan dalam  $U$  dari batang diperoleh dalam Contoh 15-1 dan karena  $\sigma_1 = P/A$ , maka

$$U = \frac{\sigma_1^2}{2E}AL = \frac{P^2L}{2AE}$$

Kemudian, dari  $W_e = U$

$$\frac{P\Delta}{2} = \frac{P^2L}{2AE} \quad \text{dan} \quad \Delta = \frac{PL}{AE}$$

yang sama dengan Persamaan 2-4.

† Dalam pengerjaan, sebagian energi hilang menjadi gesekan antara daun-daun pegas.

**CONTOH 15-5**

Hitunglah perputaran ujung sebuah poros melingkar yang elastis yang berkenaan dengan ujung yang terpasang tetap bila suatu momen puntir  $T$  bekerja pada ujung bebas.

**PENYELESAIAN**

Bila momen puntir  $T$  dengan berangsur-angsur diberikan kepada poros, maka kerja luar  $W_e = \frac{1}{2} T\phi$ , di mana  $\phi$  merupakan perputaran sudut ujung bebas dalam radian. Pernyataan energi regangan dalam  $U$  dari poros melingkar dapat diperoleh dalam Contoh 15-3. Hubungan ini dapat ditulis dalam bentuk yang lebih baik dengan memperhatikan bahwa  $\tau_{\max} = Tc/I_p$ , volume batang adalah  $\pi c^2 L$ , dan  $I_p = \pi c^4/2$ . Jadi

$$U = \frac{\tau_{\max}^2}{2G} \left( \frac{1}{2} \text{vol} \right) = \frac{T^2 c^2}{2I_p^2 G} \frac{1}{2} \pi c^2 L = \frac{T^2 L}{2I_p G}$$

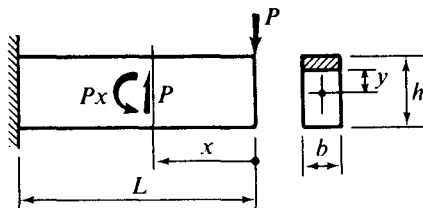
Jadi, dari  $W_e = U$ ,

$$\frac{T\phi}{2} = \frac{T^2 L}{2I_p G} \quad \text{dan} \quad \phi = \frac{LT}{I_p G}$$

yang sama dengan Persamaan 3-9.

**CONTOH 15-6**

Hitunglah defleksi maksimum yang disebabkan oleh suatu gaya  $P$  yang bekerja pada ujung sebuah kantilever yang mempunyai penampang sikuempat. Gambar 15-11. Tinjaulah efek deformasi lentur dan geser.



Gambar 15-11

**PENYELESAIAN**

Bila gaya  $P$  dengan berangsur-angsur diberikan kepada balok, maka kerja luar  $W_e = \frac{1}{2} P\Delta$ , di mana  $\Delta$  adalah defleksi total ujung balok. Energi regangan dalam terdiri dari dua bagian. Satu bagian disebabkan oleh tegangan lentur, sedang bagian yang lain disebabkan oleh tegangan geser. Menurut Pasal 15-5, regangan energi ini dapat disuperposisikan secara langsung.

Energi regangan lentur murni diperoleh dari Persamaan 15-2,  $U = \int M^2 dx/(2EI)$ , dengan memperhatikan bahwa  $M = -Px$ . Energi regangan geser didapat dari Persamaan 15-3b,  $dU_{\text{geser}} = [\tau^2/(2G)] dV$ . Dalam kejadian tertentu, gaya geser pada setiap irisan adalah sama dengan gaya terpakai  $P$ , sedang tegangan geser  $\tau$ , yang menurut Contoh 6-3, didistribusikan secara parabolis, sebagai

$$\tau = [P/(2I)][(h/2)^2 - y^2].$$



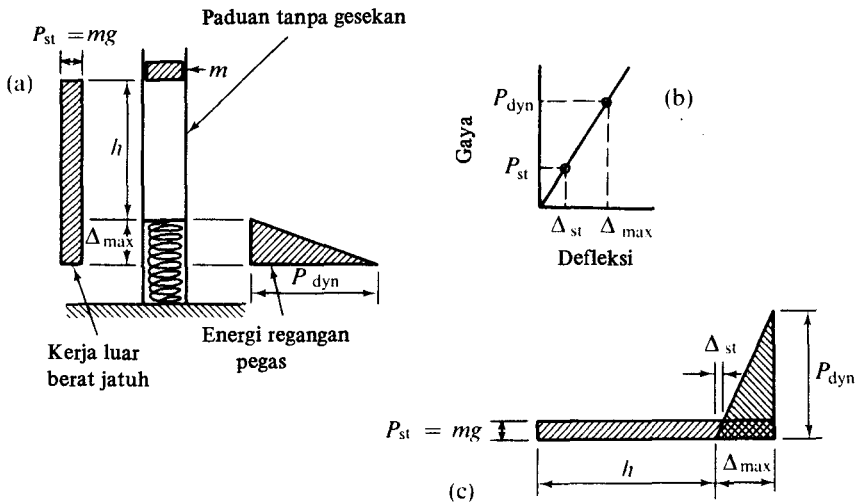


**\*15-8 BEBAN TUMBUK**

Sebuah massa jatuh bebas atau benda bergerak, yang menabrak sebuah struktur memberikan apa yang dinamakan beban atau gaya *dinamik* atau *tumbuk* (dynamic or impact load or force). Pemecahan soal-soal gaya yang demikian dapat ditelaah agak mudah berdasarkan pengandaian yang berikut :

1. Bahan bersifat elastis dan tidak ada energi yang hilang pada titik tumbukan atau pada tumpuan yang disebabkan oleh deformasi tak elastis lokal bahan.
2. Inersia sebuah sistem yang melawan suatu tumbukan dapat diabaikan.
3. Defleksi suatu sistem berbanding langsung dengan besar gaya terpakai baik gaya terpakai dinamis maupun statis.

Lalu berdasarkan azas kekekalan energi, selanjutnya dapat dianggap bahwa *sesaat* benda bergerak itu berhenti, maka energi kinetiknya berubah sempurna menjadi energi regangan dalam dari sistem yang memberikan perlawanan. Pada saat ini, terjadilah defleksi maksimum dari sistem perlawanan dan getaran (vibrasi) mulai terlihat. Tetapi berhubungan dalam buku ini yang diperhatikan terutama hanyalah tegangan dan defleksi maksimum, maka pokok masalah yang terakhir tidak akan kita lanjutkan.



**Gambar 15-12** Sifat sistem elastis di bawah pengaruh gaya tumbuk

Sebagai contoh gaya dinamik yang bekerja pada suatu sistem yang elastis, tinjaulah sebuah massa jatuh yang menabrak sebuah pegas. Keadaan ini dilukiskan dalam Gambar 15-12(a), di mana sebuah massa  $m$  jatuh dari ketinggian  $h$  di atas panjang bebas sebuah pegas. Sistem ini menunjukkan suatu kejadian yang sangat umum karena dalam pengerjaan yang luas, setiap sistem yang elastis dapat diperlakukan sebagai sebuah pegas yang setara. Tetapan pegas  $k$  didefinisikan sebagai gaya yang dibutuhkan untuk menyimpangkan "pegas" (seperti sebuah balok atau pegas ulir yang sesungguhnya) dalam satu-satuan jarak. Dalam bentuk tetapan pegas, defleksi statis  $\Delta_{st}$  dari pegas tersebut yang disebabkan oleh  $P_{st} = mg$  adalah  $\Delta_{st} = P_{st}/k$ . Dengan cara yang sama, diperoleh pula defleksi

dinamik maksimum  $\Delta_{\max} = P_{\text{dyn}}/k$ , di mana  $P_{\text{dyn}}$  adalah gaya dinamik maksimum yang dialami oleh pegas itu. Karena itu gaya dinamik dalam bentuk gaya statis  $P_{\text{st}}$  dan defleksi pegas adalah

$$P_{\text{dyn}} = \frac{\Delta_{\max}}{\Delta_{\text{st}}} P_{\text{st}} \quad (15-5)$$

Hubungan ini terlihat dalam Gambar 15-12(b).

Pada saat pegas menyimpang pada harga maksimumnya, semua energi berat jatuh diubah menjadi energi regangan pegas. Karena itu persamaan yang menyatakan kesamaan kerja luar dengan energi regangan dalam dapat ditulis sebagai

$$P_{\text{st}}(h + \Delta_{\max}) = \frac{1}{2} P_{\text{dyn}} \Delta_{\max}$$

Penafsiran grafis dari persamaan ini diperlihatkan dalam Gambar 15-12(c). Perhatikanlah bahwa faktor setengah yang muncul didepan pernyataan energi regangan adalah karena pegas menerima beban dengan berangsur-angsur. Kemudian dari Persamaan 15-5,

$$P_{\text{st}}(h + \Delta_{\max}) = \frac{1}{2} \frac{(\Delta_{\max})^2}{\Delta_{\text{st}}} P_{\text{st}}$$

atau

$$(\Delta_{\max})^2 - 2\Delta_{\text{st}}\Delta_{\max} - 2h\Delta_{\text{st}} = 0$$

jadi

$$\Delta_{\max} = \Delta_{\text{st}} + \sqrt{(\Delta_{\text{st}})^2 + 2h\Delta_{\text{st}}}$$

atau

$$\Delta_{\max} = \Delta_{\text{st}} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{st}}}} \right) \quad (15-6)$$

dan kembali dengan menggunakan Persamaan 15-5,

$$P_{\text{dyn}} = P_{\text{st}} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{st}}}} \right) \quad (15-7)$$

Persamaan 15-6 memberikan defleksi maksimum yang terjadi dalam sebuah pegas yang ditabrak oleh sebuah massa  $m$  yang jatuh dari ketinggian  $h$ , sedang Persamaan 15-7 memberikan gaya maksimum yang dialami oleh pegas tersebut untuk keadaan yang sama. Untuk menggunakan persamaan-persamaan ini, defleksi statis  $\Delta_{\text{st}}$  yang disebabkan oleh pemakaian berangsur-angsur gaya yang diketahui  $P_{\text{st}}$  dihitung dengan rumus-rumus yang diturunkan lebih dahulu dalam buku ini.

Setelah gaya dinamik efektif didapatkan, maka gaya ini dapat digunakan dalam perhitungan-perhitungan seperti gaya statis. Efek perbesaran gaya statis bila digunakan secara dinamis dinamakan *faktor tumbuk* (impact factor) dan diberikan oleh pernyataan dalam tanda kurung yang terdapat dalam Persamaan 15-6 dan 15-7. Faktor tumbuk dalam banyak hal sangat mengherankan besarnya. Umpamanya bila suatu gaya diberikan kepada suatu sistem elastis *dengan tiba-tiba*, yaitu  $h = 0$ , ia setara dengan *dua kali* gaya yang sama bila diberikan secara berangsur-angsur. Bila  $h$  adalah besar dibandingkan dengan  $\Delta_{\text{st}}$ , maka faktor tumbuk kira-kira sama dengan  $\sqrt{2h/\Delta_{\text{st}}}$ .

Persamaan-persamaan yang serupa dapat pula diturunkan untuk hal di mana sebuah massa  $m$  bergerak secara mendatar dengan kecepatan  $v$  dan dengan tiba-tiba dihentikan oleh sebuah benda elastis. Untuk maksud ini, adalah penting untuk mengganti kerja luar

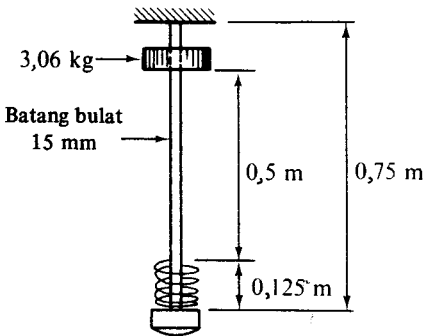
yang dilakukan oleh benda jatuh dalam penurunan di atas dengan energi kinetik sebuah benda yang bergerak. Karena itu, berhubung energi kinetik sebuah benda yang bergerak adalah  $mv^2/2$ , maka

$$P_{\text{dyn}} = m\sqrt{\frac{v^2 g}{\Delta_{\text{st}}}} \quad \text{dan} \quad \Delta_{\text{max}} = \Delta_{\text{st}}\sqrt{\frac{v^2 g}{\Delta_{\text{st}}}}$$

di mana  $\Delta_{\text{st}}$  adalah defleksi statis yang disebabkan oleh  $P_{\text{st}}$  yang kita andaikan bekerja dalam arah mendatar.

#### CONTOH 15-7

Hitunglah tegangan maksimum dalam batang baja yang terlihat dalam Gambar 15-13 yang disebabkan oleh sebuah massa 3,06 kg yang jatuh bebas sepanjang 0,5 m. Pegas ulir baja berdiameter luar 35 mm dimasukkan ke dalam sistem yang terbuat dari kawat bundar 5 mm dan mempunyai 10 lilitan putar. Ambillah  $E = 200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ , dan  $G = 80 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ . Perhatikan:  $P_{\text{st}} = 3,06g = 30 \text{ N}$ .



Gambar 15-13

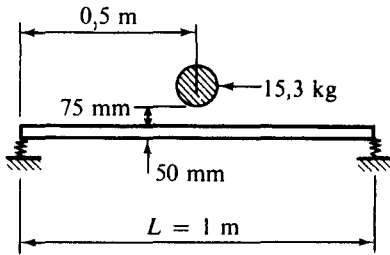
#### PENYELESAIAN

Pertama-tama kita menghitung defleksi statis sistem ini yang disebabkan oleh gaya 30 kN. Defleksi ini terdiri dari dua bagian: defleksi batang yang diberikan oleh Persamaan 2-4 dan defleksi pegas yang diberikan oleh Persamaan 7-6a. Untuk digunakan dalam Persamaan 7-6a,  $\bar{r} = 15 \text{ mm}$ . Kemudian, dari Persamaan 15-7, kita memperoleh gaya dinamik yang dialami pegas dan batang. Gaya ini digunakan sebagai gaya statis untuk mendapatkan tegangan dalam batang tersebut.

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{st}} &= \Delta_{\text{batang}} + \Delta_{\text{pegas}} = \frac{PL}{AE} + \frac{64F\bar{r}^3 N}{Gd^4} \\ &= \frac{(30)(0,75)}{(177)(10^{-6})(200)(10^9)} + \frac{(64)(30)(15 \times 10^{-3})^3(10)}{(80)(10^9)(5 \times 10^{-3})^4} = 1296 \times 10^{-6} \text{ m} \\ P_{\text{dyn}} &= P_{\text{st}} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{st}}}} \right) = 30 \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2(0,5)}{(1296) \times 10^{-6}}} \right) = 865 \text{ N} \\ \sigma_{\text{dyn}} &= \frac{P_{\text{dyn}}}{A} = \frac{865}{177 \times 10^{-6}} = 4,9 \times 10^6 \text{ Pa} = 4,9 \text{ MPa} \end{aligned}$$

**CONTOH 15-8**

Hitunglah defleksi maksimum dan tegangan lentur sesaat untuk balok baja 50 mm × 50 mm yang terlihat dalam Gambar 15-14 bila ditabrak oleh sebuah massa 15,3 kg yang jatuh dari ketinggian 75 mm di atas bagian atas balok, bila (a) balok itu berada di atas tumpuan kaku, dan (b) balok itu ditumpu pada masing-masing ujung di atas pegas. Tetapan pegas  $k$  untuk tiap pegas adalah 300.000 N/m. Ambillah  $E = 200$  GPa. *Perhatikan:*  $P_{st} = 15,3g = 150$  N.

**Gambar 15-14****PENYELESAIAN**

Defleksi dari sistem yang disebabkan oleh gaya 150 N yang bekerja statis dihitung untuk setiap kasus. Dalam kasus yang pertama, defleksi ini berasal dari balok saja; lihat Tabel 11 dari Lampiran. Dalam kasus yang kedua, defleksi statis balok tersebut dipengaruhi pula oleh pelendutan pegas-pegas yang masing-masing menerima gaya sebesar 75 N. Faktor-faktor tumbukan dari Persamaan 15-6 dan 15-7 lalu dihitung. Akhirnya untuk mendapatkan jawaban, defleksi statis dan tegangan dikalikan dengan faktor tumbukan.

*Kasus (a):*

$$\Delta_{st} = \frac{PL^3}{48EI} = \frac{(150)(1)^3}{(48)(200)(10^9)(50 \times 10^{-3})^4/12} = 30 \times 10^{-6} \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \text{faktor tumbukan} &= 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}} \\ &= 1 + \sqrt{1 + \frac{2(75 \times 10^{-3})}{30 \times 10^{-6}}} = 71,7 \end{aligned}$$

*Kasus (b):*

$$\Delta_{st} = \Delta_{\text{balok}} + \Delta_{\text{pegas}} = 30 \times 10^{-6} + \frac{75}{300 \times 10^3} = 280 \times 10^{-6} \text{ m}$$

$$\text{faktor tumbukan} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2(75 \times 10^{-3})}{280 \times 10^{-6}}} = 24,2$$

Untuk kasus mana pun, tegangan lentur maksimum dalam balok yang disebabkan oleh pemakaian  $P$  statis adalah

$$(\sigma_{\max})_{st} = \frac{M}{S} = \frac{PL}{4S} = \frac{(150)(1)}{(4)(50 \times 10^{-3})^3/6} = 1,8 \times 10^6 \text{ Pa} = 1,8 \text{ MPa}$$

Dengan mengalikan defleksi statis dan tegangan dengan faktor-faktor tumbukan yang bersangkutan kita memperoleh jawaban.

|                                       | Statis       |             | Dinamis      |             |
|---------------------------------------|--------------|-------------|--------------|-------------|
|                                       | Dengan pegas | Tanpa pegas | Dengan pegas | Tanpa pegas |
| $\Delta_{\max}, \text{m} \times 10^6$ | 280          | 30          | 6780         | 2150        |
| $\sigma_{\max}, \text{MPa}$           | 1,8          | 1,8         | 43,6         | 129         |

Dari tabel ini jelas terlihat bahwa defleksi dan tegangan yang besar disebabkan oleh beban terpakai dinamis. Tegangan untuk keadaan tanpa pegas adalah istimewa besarnya; tetapi ini tidaklah berlebihan bila dihubungkan dengan fleksibilitas dari balok. Hasil-hasil untuk beban dinamis tersebut di atas mungkin agak tinggi, karena dalam kedua kasus perbandingan  $h/\Delta_{st}$  adalah besar, dan dalam hal yang seperti itu, persamaan yang digunakan hanyalah kira-kira benar.

### \*15-9 METODA KERJA SEMU UNTUK DEFLEKSI

Metoda untuk mendapatkan defleksi langsung dengan menyamakan kerja luar dengan kerja dalam, seperti dibahas dalam Pasal 15-7, mempunyai kerugian karena biasanya yang kita peroleh itu hanyalah defleksi yang disebabkan oleh satu gaya saja. Pengertian mengenai kekekalan energi memungkinkan kita untuk menemukan metoda yang dapat mengamati kesukaran ini. Metoda kerja semu merupakan salah satu teknik dan akan dibahas dalam sisa bab ini.

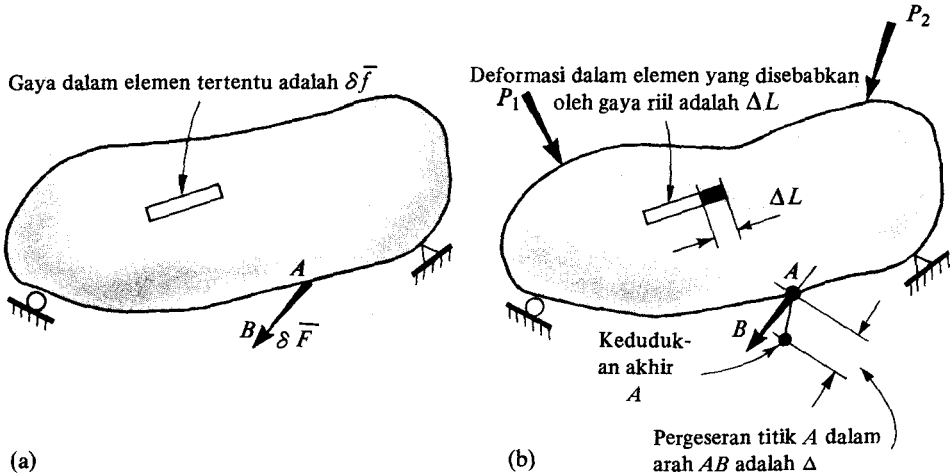
Kita mungkin membayangkan bahwa suatu sistem mekanis yang nyata atau suatu sistem struktur yang berada dalam keseimbangan statis dapat kita pindahkan dengan sembarang asal sesuai dengan syarat-syarat batas atau kendala-kendala. Selama proses ini gaya riil yang bekerja pada sistem tersebut bergerak melalui pergeseran khayal atau semu. Selain itu, terhadap gaya khayal atau semu dalam keseimbangan dengan sistem yang diketahui, dapat kita berikan pergeseran yang riil dan diterima secara kinematis. Dalam tiap kasus kita dapat merumuskan kerja khayal atau semu yang dilakukan. Pembahasan di sini akan dibatasi kepada tinjauan gaya semu yang mengalami pergeseran riil.

Untuk gaya dan pergeseran yang terjadi dengan cara yang di atas, azas kekekalan energi tetap berlaku, sedang perubahan kerja luar semu haruslah sama dengan perubahan kerja luar semu dalam elemen-elemen sebuah benda, yaitu,

$$\delta W_e = \delta W_{ei} \quad (15-8)$$

di mana yang digunakan adalah tanda  $\delta W$  dari pada  $dW$  untuk menegaskan bahwa perubahan kerja tersebut adalah semu. Persamaan 15-8 menyatakan secara matematis azas kerja semu. Ruas kanan persamaan ini akan menjadi nol untuk sistem benda kaku, sedang untuk sistem elastis ia akan sama dengan perubahan semu energi regangan dalam  $\delta U$ . Pembahasan azas tersebut pada tanggapan elastis, tidak termasuk dalam Persamaan 15-8. Persamaan ini berlaku sama terhadap kasus-kasus yang menyangkut sifat bahan yang tidak elastis, deformasi yang disebabkan oleh suhu, pergerakan tumpuan-tumpuan, dan seterusnya. Hal ini merupakan keadaan yang benar-benar berlaku umum dari persamaan kerja semu yang membuatnya sebagai alat analisa yang sangat ampuh.

Untuk menentukan defleksi suatu titik dari sebuah benda yang disebabkan oleh deformasi yang sembarang dalam benda tersebut, maka Persamaan 15-8 dapat kita tempatkan dalam bentuk yang lebih sesuai. Umpamanya tinjaulah sebuah benda seperti yang terlihat dalam Gambar 15-15, untuk defleksi titik seperti  $A$  dalam arah  $A-B$  yang disebabkan oleh deformasi benda yang kita cari. Untuk ini, persamaan kerja semu dapat dirumuskan dengan melakukan serangkaian pemikiran yang berikut:



Gambar 15-15 Penurunan rumus defleksi dengan kerja semu

Mula-mula, berikanlah pada benda yang tidak dibebani suatu gaya khayal atau semu  $\delta \bar{F}$  yang bekerja dalam arah  $A-B$ . Gaya ini mengakibatkan terjadinya gaya dalam pada seluruh benda tersebut. Gaya dalam ini, yang ditulis sebagai  $\delta \bar{f}$ , Gambar 15-15(a), dapat diperoleh dalam sistem statis tertentu.

Berikutnya, dengan gaya semu yang tinggal pada benda, berikanlah gaya yang sesungguhnya atau nyata, Gambar 15-15(b), atau masukkanlah deformasi tertentu, seperti yang disebabkan oleh perubahan suhu. Ini mengakibatkan deformasi dalam riil  $\Delta L$ , yang dapat dihitung. Karena deformasi ini, sistem kerja semu dapat bekerja.

Kerja luar yang dilakukan oleh gaya semu  $\delta \bar{F}$  yang bergerak sejauh  $\Delta$  yang riil dalam arah gaya ini sama dengan kerja total yang dilakukan pada elemen-elemen dalam oleh gaya semu  $\delta \bar{f}$  yang bergerak sejauh jarak  $\Delta L$  masing-masing. Oleh karena itu bentuk khusus dari persamaan kerja semu menjadi\*

$$\underbrace{\delta \bar{F} \cdot \Delta}_{\text{semu}} = \sum \overbrace{\delta \bar{f} \cdot \Delta L}^{\text{riil}} \quad (15-9)$$

Karena semua gaya semu mencapai harga-harga penuh mereka sebelum deformasi riil dipaksakan, maka faktor setengah tidak ada dalam persamaan di atas. Suatu tanda pen-

\* Persamaan ini menyatakan perkalian skalar (dot) dari vektor-vektor.

jumlahan atau, lebih umum integrasi, diperlukan pada ruas kanan Persamaan 15-9 untuk menunjukkan bahwa semua kerja dalam harus tercakup.

Perhatikanlah bahwa  $\delta \bar{F}$  dan  $\delta \bar{f}$  tidak perlu berupa besaran-besaran tak berhingga kecil. Dalam Persamaan 15-9 yang penting adalah perbandingan antara kedua besaran tersebut. Karenanya dalam penggunaan adalah baik sekali memilih  $\delta \bar{F}$  sama dengan satu dan menyatakan Persamaan 15-9 sebagai

$$\underbrace{\bar{I} \cdot \Delta}_{\text{semu}} = \sum_{\text{riil}} \bar{f} \cdot \Delta L \quad (15-10)$$

di mana  $\Delta$  = defleksi riil sebuah titik dalam arah gaya satuan semu terpakai  
 $\bar{f}$  = gaya-gaya dalam yang disebabkan oleh gaya satuan semu  
 $\Delta L$  = deformasi dalam riil dari sebuah benda.

Lambang yang menandakan besaran-besaran semu diberi bergaris di atas. Deformasi riil dapat diakibatkan oleh penyebab mana pun, tetapi dengan yang elastis merupakan satu kasus yang khusus. Gaya tarik serta pertambahan panjang batang diambil sebagai positif. Suatu hasil yang positif menunjukkan bahwa defleksi terjadi dalam arah yang sama dengan gaya terpakai semu.

Dalam menentukan perputaran sudut sebuah batang kita menggunakan suatu kopel satuan daripada gaya satuan. Dalam praktek, prosedur penggunaan gaya satuan atau kopel satuan dalam hubungannya dengan kerja semua disebut sebagai *metoda beban-buatan-satuan* (unit dummy-load method).

### \*15-10 PERSAMAAN KERJA SEMU UNTUK SISTEM ELASTIS

Untuk sistem elastis linier, Persamaan 15-10 dapat dikhususkan untuk memudahkan pemecahan soal-soal. Di sini hal ini dilakukan untuk batang yang dibebani secara aksial dan melentur. Pemakaiannya akan dilukiskan dengan contoh-contoh.

#### Susunan Rangka

Suatu gaya satuan semu haruslah diberikan pada sebuah titik dalam arah defleksi yang akan ditentukan.

Bila deformasi riil adalah elastis linier dan disebabkan hanya oleh deformasi aksial, maka  $\Delta L = PL/(AE)$  dan Persamaan 15-10 menjadi

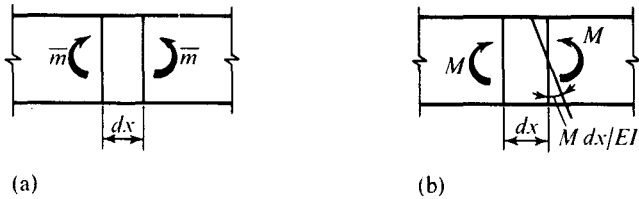
$$\bar{I} \times \Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\bar{p}_i P_i L_i}{A_i E_i} \quad (15-11)$$

di mana  $\bar{p}_i$  adalah gaya aksial dalam sebuah batang yang disebabkan oleh gaya satuan semu sedang  $P_i$  adalah gaya dalam batang yang sama yang disebabkan oleh beban riil. Penjumlahan meliputi semua batang susunan rangka.

#### Balok

Bila defleksi sebuah titik pada sebuah balok elastis ditentukan dengan metoda kerja





**Gambar 15-16.** Elemen-elemen sebuah balok (a) momen lentur semu  $\bar{m}$ , dan (b) momen lentur riil  $M$  dan perputaran irisan yang dihasilkan

semu, maka pertama-tama gaya satuan semu haruslah diberikan dalam arah defleksi yang akan dicari itu. Gaya semu ini akan mengadakan momen-momen lentur dalam pada pelbagai irisan balok yang ditulis dengan  $\bar{m}$ , seperti dalam Gambar 15-16(a). Berikutnya, sesudah gaya-gaya riil diberikan kepada balok, momen lentur  $M$  memutar "irisan-irisan bidang" balok sebesar  $M dx/(EI)$  radian (Persamaan 11-27). Jadi kerja yang dilakukan pada elemen sebuah balok oleh momen semu  $\bar{m}$  adalah  $\bar{m}M dx/(EI)$ . Dengan mengintegrasikan ini terhadap panjang balok didapat kerja luar pada elemen-elemen dalam. Jadi bentuk khusus dari Persamaan 15-10 untuk balok menjadi

$$\bar{I} \times \Delta = \int_0^L \frac{\bar{m}M dx}{EI} \quad (15-12)$$

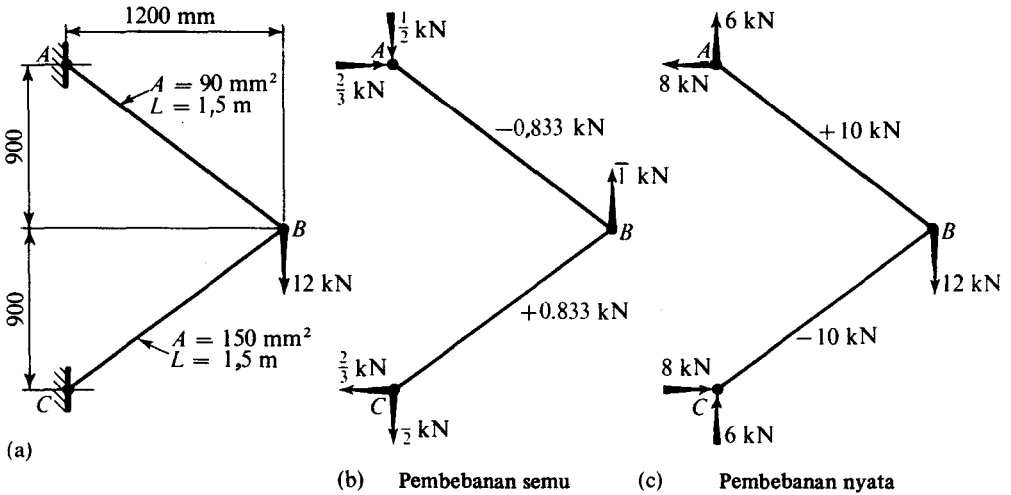
Suatu pernyataan yang serupa dapat pula digunakan untuk mendapatkan perputaran sudut irisan tertentu sebuah balok. Untuk hal ini, daripada pemakaian gaya satuan semu, suatu kopel satuan semu diberikan kepada balok itu pada irisan yang sedang diselidiki. Kopel semu ini menghasilkan momen-momen dalam  $\bar{m}$  di sepanjang balok. Lalu sesudah gaya-gaya riil diberikan, mereka mengakibatkan perputaran  $M dx/(EI)$  dari penampang. Jadi pernyataan integral yang sama dengan yang terdapat dalam Persamaan 15-12 berlaku pula disini. Kerja luar oleh kopel satuan semu didapatkan dengan mengalikan besaran ini dengan perputaran riil  $\theta$  dari balok pada kopel ini. Jadi

$$\bar{I} \times \theta = \int_0^L \frac{\bar{m}M dx}{EI} \quad (15-13)$$

Dalam Persamaan 15-12 dan 15-13,  $\bar{m}$  merupakan momen lentur yang disebabkan oleh pembebanan semu, sedang  $M$  adalah momen lentur yang disebabkan oleh beban-beban riil. Karena kedua  $\bar{m}$  dan  $M$  biasanya berubah-ubah disepanjang balok tersebut, keduanya haruslah dinyatakan oleh fungsi-fungsi yang sesuai.

#### CONTOH 15-9

Hitunglah defleksi vertikal titik  $B$  dalam susunan rangka baja bersambung pasak yang terlihat dalam Gambar 15-17(a) yang diakibatkan oleh sebab-sebab yang berikut: (a) deformasi elastis dari batang-batang, (b) perpendekan batang  $AB$  dengan 3 mm melalui suatu tekuk-putar dan (c) suhu yang turun sebesar  $60^\circ\text{C}$  yang terjadi dalam batang  $BC$ . Koefisien muai termis baja adalah 0,000012 m per meter per derajat Celcius. Abaikanlah kemungkinan penekukan menyamping dari batang tekan tersebut. Ambillah  $E = 200 \text{ GPa} = 200 \text{ kN/mm}^2$ .



Gambar 15-17

## PENYELESAIAN

Kasus (a). Suatu gaya satuan semu yang bekerja dalam arah vertikal dapat dilihat dalam Gambar 15-17(b), sedang gaya-gaya  $\bar{p}$  yang dihasilkan ditentukan dan dicatat pada diagram yang sama (periksalah ini). Kemudian gaya-gaya dalam tiap batang yang disebabkan oleh gaya riil dapat pula ditentukan serta dicatat, Gambar 15-17(c). Penyelesaian menyusul seperti Persamaan 15-11. Pekerjaan ini kita lakukan dalam bentuk tabel.

| Batang | $\bar{p}$ , kN | $P$ , kN | $L$ , mm | $A$ , mm <sup>2</sup> | $\bar{p}PL/A$ |
|--------|----------------|----------|----------|-----------------------|---------------|
| $AB$   | -0,833         | +10      | 1500     | 90                    | -139          |
| $BC$   | +0,833         | -10      | 1500     | 150                   | -83           |

Dari tabel ini  $\sum \bar{p}PL/A = -222$ . Jadi

$$\bar{I} \times \Delta = \sum \frac{\bar{p}PL}{AE} = \frac{-222}{200} = -1,11 \text{ kN} \cdot \text{mm}$$

dan

$$\Delta = -1,11 \text{ mm}$$

Tanda negatif berarti bahwa titik  $B$  berdefleksi ke bawah. Dalam hal ini, "kerja negatif" dilakukan oleh gaya semu yang bekerja ke atas apabila titik itu digeser dalam arah ke bawah. Terutama perhatikanlah satuan-satuan dan tanda-tanda semua besaran. Gaya tarik dalam batang diambil positif, demikian pula sebaliknya.

Kasus (b). Persamaan 15-10 dipergunakan untuk mendapatkan defleksi vertikal titik  $B$  yang disebabkan oleh pemendekan batang  $AB$  sebesar 3 mm. Gaya-gaya yang terbentuk dalam batang oleh gaya semu yang bekerja dalam arah defleksi yang sedang di-

cari dapat dilihat dalam Gambar 15-17(b). Kemudian, karena  $\Delta L$  adalah  $-3$  mm (pemendekan) untuk batang  $AB$  dan nol untuk batang  $BC$ , maka

$$\bar{I} \times \Delta = (-0,833)(-3) + (+0,833)(0) = +2,50 \text{ kN} \cdot \text{mm}$$

dan

$$\Delta = +2,50 \text{ mm ke atas}$$

Kasus (c). Kembali dengan menggunakan Persamaan 15-10 serta memperhatikan defleksi yang disebabkan oleh penurunan suhu,  $\Delta L = (-0,000012)(60)(1500) = -1,08$  mm dalam batang  $BC$  saja, maka

$$\bar{I} \times \Delta = (+0,833)(-1,08)$$

$$= -0,90 \text{ kN} \cdot \text{mm}$$

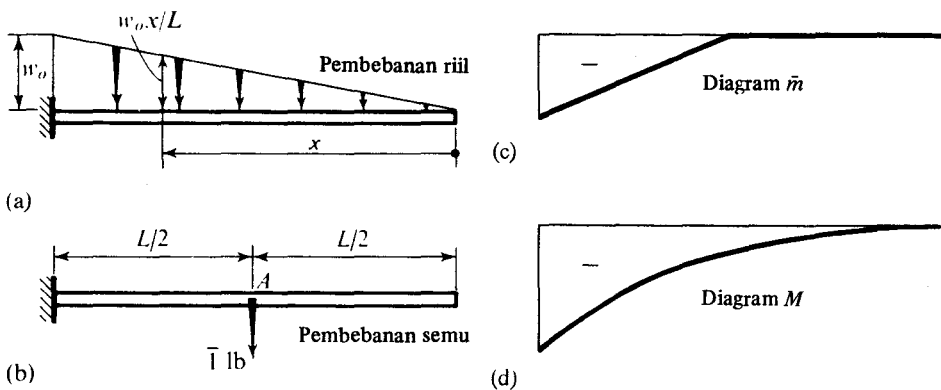
dan

$$\Delta = -0,90 \text{ mm ke bawah}$$

Dengan superposisi, defleksi total titik  $B$  yang diakibatkan oleh ketiga penyebab di atas adalah  $-1,11 + 2,50 - 0,90 = +0,49$  mm dengan arah ke atas. Untuk mendapatkan besaran ini, dalam persamaan kerja semu ketiga efek dapat ditinjau secara bersamaan.

#### CONTOH 15-10

Hitunglah defleksi pada pertengahan bentangan sebuah balok kantilever yang dibebani seperti yang terlihat dalam Gambar 15-18(a).  $EI$  dari balok itu adalah konstan.



Gambar 15-18

#### PENYELESAIAN

Gaya semu diberikan pada titik  $A$ , yang defleksinya akan kita cari, Gambar 15-18(b). Diagram  $\bar{m}$  serta diagram  $M$  berturut-turut dapat dilihat dalam Gambar 15-8(c) dan 15-8(d). Untuk fungsi-fungsi ini, diambil titik asal  $x$  yang sama yaitu pada ujung bebas kantilever itu. Setelah momen-momen ini ditentukan, maka Persamaan 13-25 digunakan untuk mendapatkan defleksi.

$$\begin{aligned}
 M &= -\frac{x}{2} \frac{w_0 x}{L} \frac{x}{3} = -\frac{w_0 x^3}{6L} & (0 \leq x \leq L) \\
 \bar{m} &= 0 & (0 \leq x \leq L/2) \\
 \bar{m} &= -1(x - L/2) & (L/2 \leq x \leq L) \\
 \bar{I} \times \Delta &= \int_0^L \frac{\bar{m} M dx}{EI} \\
 &= \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} (0) \left( -\frac{w_0 x^3}{6L} \right) dx \\
 &\quad + \frac{1}{EI} \int_{L/2}^L \left( -x + \frac{L}{2} \right) \left( -\frac{w_0 x^3}{6L} \right) dx \\
 &= \frac{49 w_0 L^4}{3,480 EI} \text{ N} \cdot \text{m}
 \end{aligned}$$

Defleksi titik  $A$  secara numerik sama dengan besaran ini. Defleksi akibat geser telah diabaikan.

#### CONTOH 15-11

Tentukanlah defleksi arah ke bawah ujung  $C$  yang disebabkan oleh gaya terpakai sebesar 2 kN dalam struktur yang terlihat dalam Gambar 15-19(a). Abaikanlah defleksi yang disebabkan oleh geser. Ambillah  $E = 7 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ .

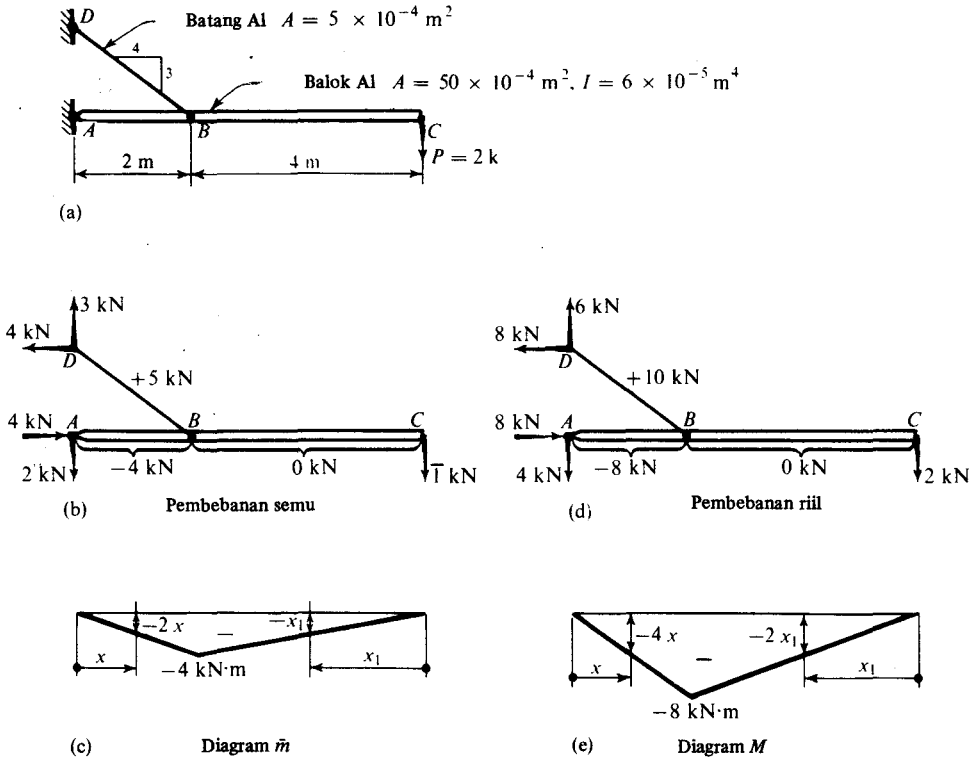
#### PENYELESAIAN

Suatu gaya semu satuan sebesar 1 kN diberikan dalam arah vertikal pada titik  $C$ . Gaya ini mengakibatkan suatu gaya aksial dalam batang  $DB$  dan sebagian  $AB$  dari balok, Gambar 15-19(b). Gaya ini menghasilkan pula momen lentur dalam balok  $AC$ , Gambar 15-19(c). Perhitungan yang serupa dibuat pula untuk gaya terpakai riil dan diperlihatkan dalam Gambar 15-9(d) dan (e). Defleksi titik  $C$  tergantung pada deformasi yang disebabkan oleh gaya aksial, dan juga lenturan, jadi persamaan kerja semu adalah

$$\bar{I} \times \Delta = \sum \frac{\bar{p} PL}{AE} + \int_0^L \frac{\bar{m} M dx}{EI}$$

suku pertama pada ruas kanan persamaan ini dihitung dalam tabel. Lalu integral kerja dalam semu yang disebabkan oleh lenturan didapatkan pula. Untuk bagian-bagian yang berbeda dari balok, kedua titik asal  $x$  digunakan untuk menulis pernyataan untuk  $\bar{m}$  dan  $M$ , pada Gambar 15-19(c) dan (e).

| Batang | $\bar{p}$ , kN | $P$ , kN | $L$ , m | $A$ , m <sup>2</sup> | $\bar{p} PL/A$ |
|--------|----------------|----------|---------|----------------------|----------------|
| $DB$   | +5             | +10      | 2,5     | $5 \times 10^{-4}$   | +250 000       |
| $AB$   | -4             | -8       | 2,0     | $50 \times 10^{-4}$  | +12 800        |



Gambar 15-19

Dari tabel,

$$\sum \bar{p}PL/A = +262\,800,$$

atau

$$\sum pPL/(AE) = 3,75 \times 10^{-3} \text{ kN} \cdot \text{m}$$

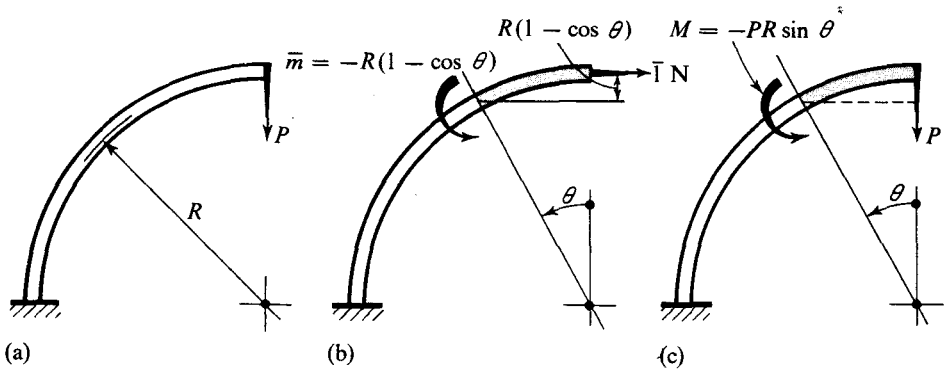
$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{\bar{m}M}{EI} dx &= \int_0^2 \frac{(-2x)(-4x)}{EI} dx + \int_0^4 \frac{(-x_1)(-2x_1)}{EI} dx_1 \\ &= +15,25 \times 10^{-3} \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Karena itu  $1 \times \Delta = (3,75 + 15,25)10^{-3} = 19 \times 10^{-3} \text{ kN} \cdot \text{m}$  dan titik C berdefleksi  $19 \times 10^{-3} \text{ m} = 19 \text{ mm}$  ke bawah.

Perhatikanlah bahwa kerja yang disebabkan oleh kedua jenis tindakan disuperposisikan. Perhatikan pula bahwa titik-titik asal sistem koordinat untuk momen dapat dipilih sebaiknya, tetapi, titik asal yang sama tersebut haruslah digunakan untuk  $\bar{m}$  dan  $M$  yang saling bersangkutan.

**CONTOH 15-12**

Hitunglah defleksi mendatar, yang disebabkan oleh gaya terpusat  $P$ , dari ujung batang melengkung yang terlihat dalam Gambar 15-20(a). Kekakuan lentur batang  $EI$  adalah konstan. Abaikanlah pengaruh geser pada defleksi.



Gambar 15-20

**PENYELESAIAN**

Bila jari-jari lengkungan sebuah batang adalah besar dibandingkan dengan ukuran penampang (Pasal 5-11), maka rumus-rumus defleksi balok yang biasa dapat digunakan dengan menggantikan  $dx$  dengan  $ds$ . Dalam hal ini,  $ds = R d\theta$ .

Dengan menggunakan suatu gaya semu mendatar pada ujung dalam arah defleksi yang dikehendaki, Gambar 15-20(b), kita melihat bahwa  $\bar{m} = -R(1 - \cos \theta)$ . Dengan cara yang sama untuk beban riil, dari Persamaan 15-20(c),  $M = -PR \sin \theta$ . Karena itu

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{I}} \times \Delta &= \int_0^L \frac{\bar{m}M ds}{EI} \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{-R(1 - \cos \theta)(-PR \sin \theta)R d\theta}{EI} = +\frac{PR^3}{2EI} \text{ N}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

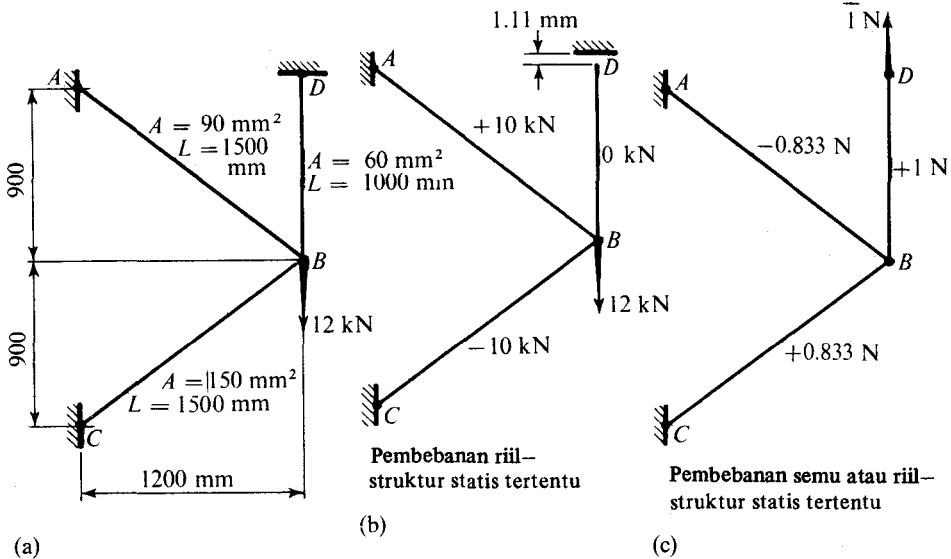
Defleksi pada ujung sebelah kanan secara numerik sama dengan pernyataan ini.

**\*15-11 PERSOALAN STATIS TAK TENTU**

Persoalan statis tak tentu dapat dipecahkan dengan bantuan metoda kerja semu. Untuk sistem elastis linier, metoda gaya yang dibicarakan dalam Pasal 12-5 dapat digunakan dengan keuntungan tertentu. Dengan menggunakan pendekatan ini metoda kerja semu hanya memberikan cara menentukan defleksi struktur yang dapat dipermudah menjadi statis tertentu. Banyak kekacauan dapat dielakkan bila ini diingat dengan jelas.

**CONTOH 15-13**

Hitunglah gaya-gaya yang terdapat dalam batang-batang yang disambung-pasak dari



Gambar 15-21

struktur baja yang terlihat dalam Gambar 15-21(a) bila suatu gaya 12 kN diberikan pada B.

#### PENYELESAIAN

Struktur tersebut dapat diubah menjadi statis tertentu dengan memotong batang  $DB$  pada  $D$ . Lalu gaya-gaya yang bekerja dalam batang-batang itu dapat dilihat dalam Gambar 15-21(b). Dalam struktur statis tertentu ini, harus didapatkan gerakan dari titik  $D$ . Hal ini dapat dilakukan dengan memberi gaya semu vertikal pada titik  $D$ , Gambar 15-21(c), serta dengan menggunakan metoda kerja semu. Tetapi, berhubungan bentuk  $\bar{p}PL/(AE)$  untuk batang  $BD$  adalah nol, maka gerakan vertikal titik  $D$  adalah sama dengan titik  $B$ . Dalam Contoh 15-9 besaran yang terakhir diperoleh sebesar 1,11 mm arah ke bawah yang dapat dilihat pula dalam Gambar 15-21(b).

Gerakan titik  $D$ , yang terlihat dalam Gambar 15-21(b), menentang syarat-syarat soal ini, sedang suatu gaya haruslah diberikan untuk membawanya kembali ke keadaan semula. Hal ini menurut Persamaan 12-11, dapat dinyatakan sebagai

$$\Delta_D = f_{DD} X_D + \Delta_{DP} = 0$$

di mana gap (rongga antara)  $\Delta_{DP} = -1,11 \text{ mm}$ .

Untuk menentukan  $f_{DD}$ , suatu gaya riil 1 N diberikan pada titik  $D$  dan metoda kerja semu digunakan untuk mendapatkan defleksi yang disebabkan oleh gaya ini. Gaya yang terjadi dalam struktur tertentu disebabkan oleh gaya-gaya semu dan riil adalah sama secara numerik, lihatlah Gambar 15-21(c). Untuk membedakan antara keduanya, gaya yang disebabkan oleh gaya semu ditulis dengan  $p$ , sedang yang oleh gaya riil dengan  $P$ . Penyelesaian lalu dilakukan dalam bentuk tabel.

| Batang | $\bar{p}$ , N | $p$ , N | $L$ , mm | $A$ , mm <sup>2</sup> | $\bar{p}pL/A$ |
|--------|---------------|---------|----------|-----------------------|---------------|
| $AB$   | -0,833        | -0,833  | 1500     | 90                    | +11,56        |
| $BC$   | +0,833        | +0,833  | 1500     | 150                   | +6,94         |
| $BD$   | +1,000        | +1,000  | 1000     | 60                    | +16,67        |

Dari tabel,  $\sum \bar{p}pL/A = +35,17$ . Oleh karena itu

$$\bar{1} \times \Delta = \sum \frac{\bar{p}pL}{AE} = \frac{+35,17}{200 \times 10^3} = 0,000176 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$f_{DD} = 0,000176 \text{ mm} \quad \text{dan} \quad 0,000176 X_D - 1,11 = 0$$

Untuk menutup selah sebesar 1,11 mm maka gaya riil 1 N di  $D$  haruslah diperbesar  $X_D = (1,11)/(0,000176) = 6310$  kali. Karena itu gaya sesungguhnya dalam batang  $DB$  adalah 6310 N. Gaya pada kedua batang yang lain lalu dapat ditentukan dari statika atau dengan superposisi gaya-gaya yang terlihat dalam Gambar 15-21(b) dengan  $X_D$  kali gaya-gaya  $p$  yang terlihat dalam Gambar 15-21(c). Dengan tiap metoda, gaya dalam batang  $AB$  diperoleh sebesar +4740 N (tarik) dan dalam  $BC$  -4740 N (tekan).

Dalam suatu kasus yang diketahui, untuk membuat kepastian bahwa penelaahan elastis (seperti yang terdapat dalam contoh di atas) berlaku, tegangan maksimum haruslah ditentukan lebih dahulu. Supaya jawaban menjadi benar, hal ini haruslah dilakukan dengan menggunakan bahan yang berada dalam batas elastis linier.

#### SOAL-SOAL UNTUK DISELESAIKAN

15-1. Berapakah modulus lenteng sebuah paduan aluminium bila batas proporsionalnya pada suhu 20°C adalah 190 MPa sedang  $E = 70$  GPa?

15-2. Sebuah batang baja berdiameter 40 mm yang panjangnya 1 m mendapatkan suatu beban energi aksial sebesar 4 N·m yang mengakibatkan terjadinya tegangan tarik dalam batang. (a) Tentukanlah tegangan tarik maksimum,  $E = 200.000 \text{ MN/m}^2$ . (b) Bila batang yang sama dibubut sampai diameternya menjadi 20 mm pada seperdua batang di bagian tengah yaitu untuk suatu jarak 0,5 m, apakah tegangan maksimum bertambah atau berkurang dan berapakah banyaknya? *Jawab:* (b) 90,3 MN/m<sup>2</sup>.

15-3. Sebuah batang paduan-baja bujursangkar 50 mm yang panjangnya 1 m merupakan satu

bagian sebuah mesin dan harus menahan beban energi aksial sebesar 100 N·m. Berapakah seharusnya batas proporsional baja tersebut agar dapat menahan dengan aman beban energi secara elastis dengan faktor keamanan 4?  $E = 200 \text{ GPa}$ . *Jawab:* 253 MPa.

15-4. Buktikanlah bahwa dalam sebuah batang yang dibebani secara aksial, bila suatu tegangan awal  $\sigma_i$  berubah sebesar  $\sigma_c$  menjadi tegangan akhir  $\sigma_f = \sigma_i + \sigma_c$ , maka perubahan energi regangan elastis per satuan volume bahan menjadi  $(\sigma_i^2 + 2\sigma_i\sigma_c)/(2E)$ . Tafsirlah hasil ini pada diagram yang serupa dengan Gambar 15-1(b).

15-5. Buktikanlah bahwa energi regangan elastis yang disebabkan oleh lenturan untuk balok berpenampang sikuempat yang dibebani se-



cara merata sederhana adalah  $(\sigma_{\max}^2/2E)(\frac{8}{45}AL)$  di mana  $\sigma_{\max}$  adalah tegangan lentur maksimum,  $A$  adalah luas penampang sedang  $L$  merupakan panjang balok.

15-6. Buktikanlah bahwa  $(U)_{\text{lentur}} = (\sigma_{\max}^2/2E)(\text{vol}/9)$  untuk sebuah kantilever berpenampang sikuempat yang mendukung suatu beban terpusat  $P$  pada ujungnya.

15-7. Buktikanlah bahwa  $(U)_{\text{lentur}} = (\sigma_{\max}^2/2E)(\text{vol}/3)$  untuk sebuah kantilever dengan kekuatan konstan yang mempunyai profil parabolik (Gambar 10-18d) yang mendukung beban terpusat  $P$  pada ujungnya.

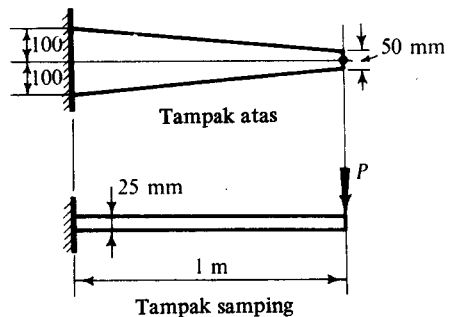
15-8. Tentukanlah jumlah maksimum energi regangan yang dapat diserap oleh sebuah pegas ulir di bawah pengaruh sebuah beban tarik bila pegas mempunyai diameter luar 220 mm dan terbuat dari kawat baja berdiameter 20 mm. Ada 10 lilitan aktif dan tegangan geser ijin adalah 550 MPa. Abaikanlah koreksi untuk konsentrasi tegangan dan efek geseran langsung.  $G = 84 \text{ GPa}$ .

15-9. Tinjaulah sebuah kantilever baja yang kecil yang berpenampang sikuempat dengan kedalaman 50 mm  $\times$  150 mm ( $E = 200 \text{ GPa}$  dan  $G = 80 \text{ GPa}$ ) dengan suatu gaya terpusat  $P$  yang bekerja pada ujung. Dengan mengabaikan berat balok tersebut, (a) tentukanlah defleksi yang disebabkan oleh lenturan, dan yang disebabkan oleh geser, bila  $L = 150 \text{ mm}$  dan  $P = 15 \text{ kN}$ ; (b) berapakah harusnya besar  $L$  sehingga defleksi yang disebabkan oleh lenturan sama dengan yang disebabkan oleh geser? (Petunjuk: Lihat Contoh 15-6).

15-10. Sebuah balok sederhana yang berpenampang sikuempat dan mempunyai bentangan  $L$  dibebani dengan gaya terpusat  $P$  pada tengah-tengah bentangan. Dengan mengabaikan berat dari balok dan menyamakan energi dalam dengan energi luar, (a) tentukanlah defleksi maksimum yang disebabkan oleh lenturan; (b) tentukanlah defleksi maksimum yang disebabkan oleh deformasi geser. Jawab: (a)  $PL^3/(48EI)$ .

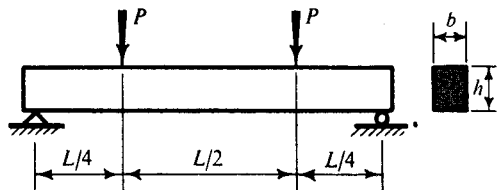
15-11. Dengan menggunakan metoda energi, tentukanlah defleksi vertikal ujung bebas sebuah balok kantilever yang terlihat dalam gambar yang disebabkan oleh pemakaian suatu gaya  $P = 500 \text{ N}$ . Perhatikan saja efek-efek len-

turan yaitu abaikanlah deformasi geser. Ambil  $E = 200 \text{ GPa}$ .



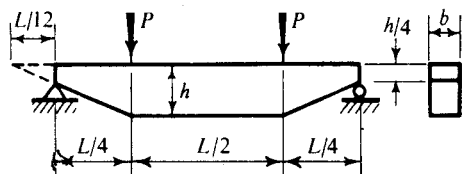
GAMBAR SOAL 15 – 11

15-12. (a) Dalam bentuk-bentuk  $P$ ,  $L$ , dan  $EI$ , hitunglah besarnya energi regangan elastis yang disimpan dalam balok yang terlihat dalam gambar, yang disebabkan oleh beban terpakai. (b) Dengan menyamakan kerja yang dilakukan oleh gaya luar dengan perubahan energi regangan elastis, tentukanlah defleksi pada beban-beban. (Petunjuk: Disebabkan oleh simetri, defleksi pada kedua beban adalah sama). Jawab: (b)  $PL^3/(48EI)$ .



GAMBAR SOAL 15 – 12

15-13. Untuk balok yang terlihat dalam gambar, dengan menggunakan suatu metoda energi, tentukanlah defleksi balok pada titik-titik tangkap beban-beban tersebut. Momen inersia penampang pada parohan tengah balok tersebut adalah  $I_0$ . Jawab:  $0,029 PL^3/(EI_0)$ .



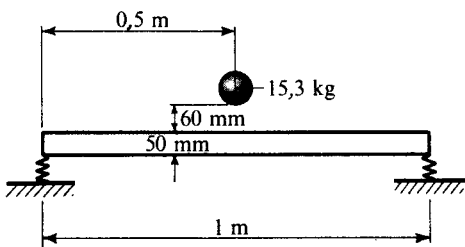
GAMBAR SOAL 15 – 13

15-14. Bila massa 3,06 kg dalam Contoh 15-7 jatuh bebas sejauh 0,5 m ketika pegas digerakkan kembali, berapakah tegangan maksimum yang akan terjadi dalam batang?

15-15. Tentukanlah defleksi maksimum sesaat sebuah pegas ulir yang disebabkan oleh sebuah massa 50 kg yang dijatuhkan melalui jarak bebas sejauh 200 mm. Pegas tersebut mempunyai diameter luar 400 mm serta terbuat dari kawat baja berdiameter 48 mm. Terdapat 12 lilitan aktif. Abaikanlah defleksi yang disebabkan oleh geseran langsung dan inersia pegas.  $G = 846 \text{ Pa}$ .

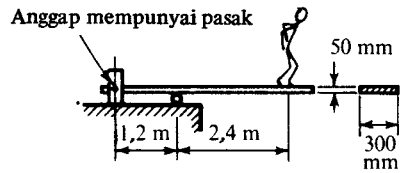
15-16. Sebuah kantilever dari kayu bulat 200 mm yang panjangnya 4 m ditempatkan dalam kedudukan yang mendatar. Bila ujungnya ditabrak oleh sebuah massa 80 kg yang jatuh dari suatu ketinggian 150 mm, berapakah jadinya defleksi sesaat maksimum? Abaikanlah inersia balok tersebut.  $E = 8 \text{ GPa}$ .

15-17. Hitunglah defleksi maksimum sesaat dan tegangan lentur untuk balok baja bujur-sangkar yang terlihat dalam gambar ketika ditabrak oleh sebuah massa 15,3 kg yang jatuh dari suatu ketinggian 60 mm di atas bagian atas dari balok, bila (a) balok terletak di atas tumpuan-tumpuan kaku, dan (b) balok mendapat tumpuan pada masing-masing ujung di atas pegas. Tetapan  $k$  untuk tiap pegas adalah 300 kN/m. Jawab: (a) 116 MPa.



GAMBAR SOAL 15 - 17

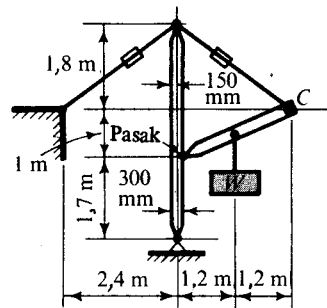
15-18. Seseorang dengan berat 80 kg melompat di atas papan loncat dari ketinggian 0,6 m. Bila papan tersebut mempunyai ukuran-ukuran seperti yang terlihat dalam gambar, berapa tegangan lentur maksimum? Ambillah  $E = 10 \text{ GPa}$ . Gunakanlah sembarang metoda untuk menentukan karakteristik lenturan papan tersebut.



GAMBAR SOAL 15 - 18

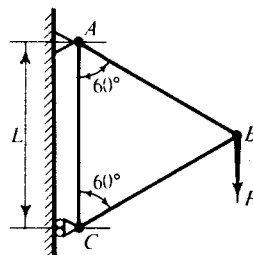
15-19. Dalam Contoh 15-9 tentukanlah gerakan mendatar titik  $B$  untuk ketiga kasus yang disebutkan satu persatu.

15-20. Untuk susunan tiang dan lengan (kapal) yang terlihat dalam gambar, (a) tentukanlah gerak vertikal beban  $W$  yang disebabkan oleh perpanjangan batang  $AB$  sejauh 10 mm. (b) Berapa seharusnya batang  $BC$  diperpendek untuk membawa beban  $W$  ke kedudukannya semula?



GAMBAR SOAL 15 - 20

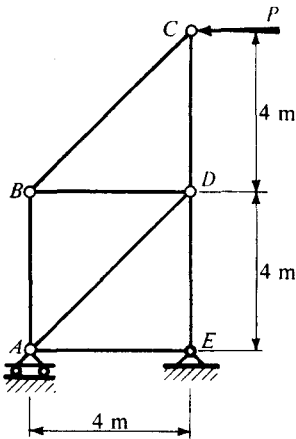
15-21. Sebuah sistem tiga buah batang yang disambung melalui pasak, masing-masing mempunyai luas penampang  $A$ , dibebani seperti yang terlihat dalam gambar. (a) Tentukanlah pergeseran-pergeseran vertikal dan horizontal sambungan  $B$  yang disebabkan oleh beban  $P$ .



GAMBAR SOAL 15 - 21

(b) Bila dengan cara tekukan putar (turn-buckle) panjang batang  $AC$  menjadi bertambah pendek 10 mm, berapakah pergerakan dari sambungan  $B$  tersebut? *Jawab:* (a)  $-9PL/(4AE)$ ,  $-\sqrt{3}PL/(12AE)$ .

15-22. Dengan menggunakan metoda kerja semu, tentukanlah pergeseran-pergeseran vertikal dan horisontal dari sambungan  $C$  untuk susunan rangka yang terlihat dalam gambar yang disebabkan oleh suatu gaya  $P = 10$  kN. Untuk mudahnya anggaplah  $AE = 1$  untuk semua batang.

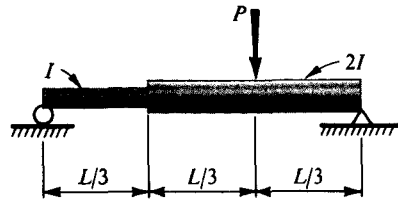


GAMBAR SOAL 15 – 22

15-23. Dengan menggunakan metoda kerja semu, tentukanlah defleksi maksimum untuk sebuah balok sederhana yang dibebani secara merata yang mempunyai  $EI$  yang konstan, dalam bentuk-bentuk  $w$ ,  $L$ , dan  $EI$ . *Jawab:*  $5wL^4/(384EI)$ .

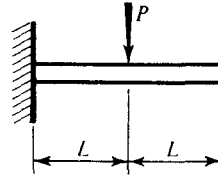
15-24. Dengan menggunakan metoda kerja semu, tentukanlah defleksi maksimum sebuah balok sederhana dengan bentangan  $L$  yang disebabkan oleh dua beban  $P$  yang sama yang bekerja pada titik yang ketiga.  $EI$  adalah konstan. *Jawab:*  $23 PL^3/(648EI)$ .

15-25. Dengan menggunakan metoda kerja semu, tentukanlah defleksi titik tangkap gaya  $P$  pada balok yang penampangnya bervariasi seperti yang terlihat dalam gambar. *Jawab:*  $13PL^3/(1.458EI)$ .



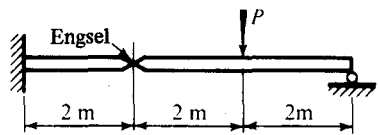
GAMBAR SOAL 15 – 25

15-26. Untuk balok yang diperlihatkan dalam gambar, dengan menggunakan metoda kerja semu, tentukanlah (a) defleksi tengah-tengah balok dan (b) defleksi ujung dari balok. Tinjau saja deformasi lentur.  $EI$  konstan. *Jawab:* (a)  $PL^3/(3EI)$ , (b)  $5PL^3/(6EI)$ .



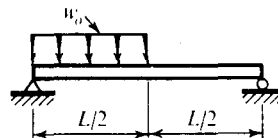
GAMBAR SOAL 15 – 26

15-27. Dengan menggunakan metoda kerja semu, tentukanlah defleksi titik tangkap gaya  $P$ . Kekakuan lentur  $EI$  adalah konstan diseluruh panjang. Perhatikanlah hanya deformasi lentur.



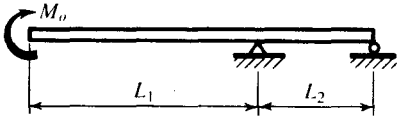
GAMBAR SOAL 15 – 27

15-28. Dengan menggunakan metoda kerja semu, tentukanlah defleksi pada titik tengah balok yang dibebani seperti yang terlihat dalam gambar.  $EI$  adalah konstan. *Jawab:*  $5w_0L^4/(768EI)$ .



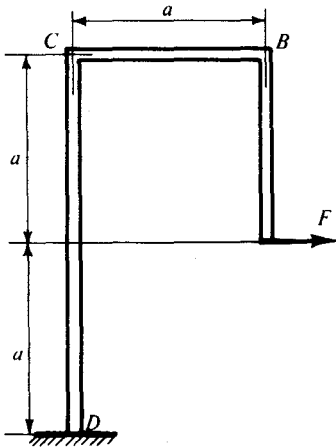
GAMBAR SOAL 15 – 28

15-29. Sebuah balok ujung tergantung (overhang) dibebani dengan sebuah kopel  $M_0$  pada ujung seperti yang terlihat dalam gambar. Dengan menggunakan metoda kerja semu, tentukanlah defleksi dan rotasi ujung yang tergantung yang disebabkan oleh  $M_0$ . Jawab:  $M_0 L_1 (3L_1 + 2L_2) / (6EI)$ ,  $M_0 [L_1 + \frac{1}{3} L_2] / (EI)$ .



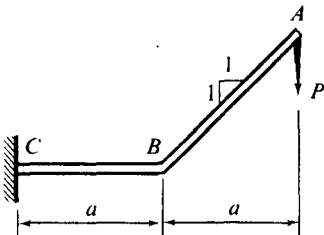
GAMBAR SOAL 15 – 29

15-30. Dengan menggunakan metoda kerja semu, tentukanlah defleksi horizontal dari titik A yang disebabkan oleh gaya  $F$  yang bekerja pada kerangka seperti yang terlihat dalam gambar. Tinjau hanya defleksi yang disebabkan oleh lenturan.  $EI$  adalah konstan. Jawab:  $2Fa^3 / (EI)$ .



GAMBAR SOAL 15 – 30

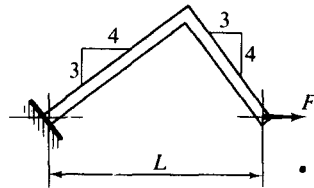
15-31. Sebuah batang elastis planar dibebani seperti yang terlihat dalam gambar. Tentukan-



GAMBAR SOAL 15 – 31

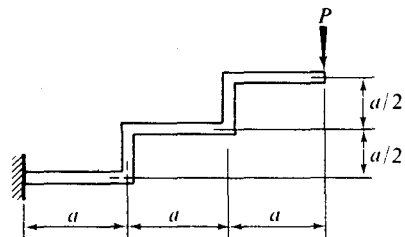
lah (a) defleksi horizontal ujung  $A$  dan (b) rotasi pada titik-titik  $A$  dan  $B$  yang disebabkan oleh gaya  $P$ . Tinjau hanya deformasi lentur saja.  $EI$  adalah konstan. Jawab: (a)  $(\frac{3}{2} + \sqrt{2/3}) [Pa^3 / (EI)]$ .

15-32. Sebuah batang berbentuk L dibebani dengan gaya mendatar  $F$  seperti yang terlihat dalam gambar. Tentukanlah defleksi-defleksi horizontal dan vertikal dari ujung yang disebabkan oleh  $F$ . Tinjau hanya efek lenturan saja.  $EI$  adalah konstan. Jawab:  $v_y = 0,145 FL^3 / (EI)$ .



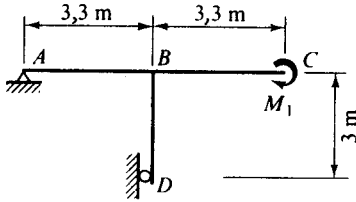
GAMBAR SOAL 15 – 32

15-33. Sebuah batang bengkok sebidang dengan  $EI$  yang konstan mempunyai ukuran-ukuran yang terlihat dalam gambar. Dapatkanlah defleksi vertikal dari ujung batang yang disebabkan oleh pemakaian gaya  $P$ . Tinjau hanya defleksi lentur saja. Berilah ulasan mengenai metoda kerja semu dibandingkan dengan yang berdasarkan pada pemecahan persamaan diferensial seperti yang dibahas dalam Bab 11.



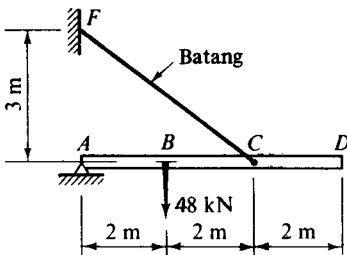
GAMBAR SOAL 15 – 33

15-34. Tentukanlah defleksi vertikal titik  $D$  dan kemiringan pada titik  $A$  yang disebabkan oleh momen terpakai  $M_1 = 1200 \text{ kN m}$  pada ujung  $C$ .  $EI$  adalah konstan untuk semua batang. Tinjau hanya deformasi lentur saja.



GAMBAR SOAL 15 – 34

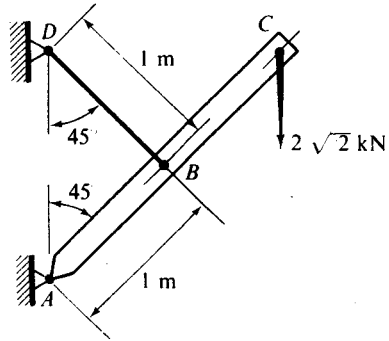
15-35. Untuk sistem struktur planar yang terlihat dalam gambar, yang terbuat dari aluminium, tentukanlah defleksi vertikal titik  $D$  yang disebabkan oleh tegangan lentur dan tegangan (aksial) langsung. Tinjau hanya efek beban terpakai dari 48 kN. Gunakanlah metoda kerja semu. Untuk batang tersebut  $A = 500 \text{ mm}^2$ ; untuk balok  $A = 4000 \text{ mm}^2$  dan  $I = 20 \times 10^6 \text{ mm}^4$ . Ambillah  $E = 70 \text{ GPa}$ . Jawab: 52,9 mm



GAMBAR SOAL 15 – 35

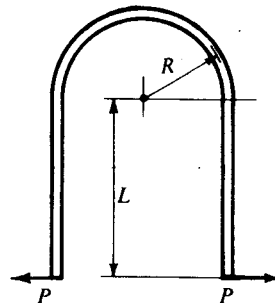
15-36. Dalam soal yang lalu diterangkan bahwa akibat beban terpakai sebesar 48 kN maka ujung  $D$  bergerak sejauh 52,9 mm ke atas. Bila, tanpa menghilangkan beban ini, diperlukan mengembalikan titik  $D$  ke kedudukannya yang semula untuk membuat sebuah hubungan, berapakah perubahan panjang batang  $CF$  yang diperlukan? Perubahan panjang ini dapat dipenuhi dengan cara memberikan peregang kawat.

15-37. Sebuah batang baja yang miring yang panjangnya 2 m yang mempunyai penampang dari 4000  $\text{mm}^2$  dan momen lembam  $I$  dari  $8,53 \times 10^6 \text{ mm}^4$  mendapat tumpuan seperti yang terlihat dalam gambar. Gantungan baja miring  $DB$  mempunyai luas penampang 600  $\text{mm}^2$ . Tentukanlah defleksi titik  $C$  arah ke bawah yang disebabkan oleh pemakaian beban vertikal sebesar  $2\sqrt{2} \text{ kN}$ . Ambillah  $E = 200.000 \text{ MPa}$ .



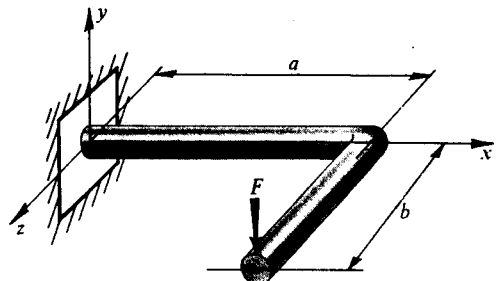
GAMBAR SOAL 15 – 37

15-38. Sebuah batang berbentuk-U dengan  $EI$  yang konstan mempunyai ukuran-ukuran yang terlihat dalam gambar. Tentukanlah defleksi gaya-gaya terpakai yang menjauhi sesamanya. Tinjau hanya efek-efek lenturan. (Petunjuk: Ambillah keuntungan dari simetri). Jawab:  $(2PL^3/3 + PL^2R\pi + PR^3\pi/2 + 4PLR^2)/(EI)$ .



GAMBAR SOAL 15 – 38

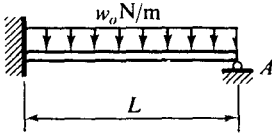
15-39. Sebuah batang yang bengkok yang mempunyai penampang melingkar terpasang te-



GAMBAR SOAL 15 – 39

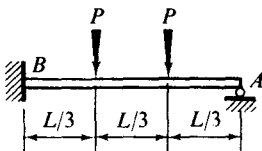
tap pada sebuah ujungnya sedang ujung yang lain dibebani dengan gaya  $F$  seperti yang terlihat dalam gambar. Gaya  $F$  bekerja tegak lurus pada bidang batang bengkok tersebut. Tentukanlah (a) perpindahan (translasi) ujung bebas sepanjang sumbu-sumbu koordinat, dan (b) rotasi ujung bebas terhadap sumbu yang sama. Tetapan-tetapan  $E$ ,  $G$ ,  $I$  dan  $I_p$  diketahui.

15-40. Untuk balok yang terlihat dalam gambar, dengan menggunakan metoda kerja semu, tentukanlah gaya reaksi pada titik  $A$ , dengan memperlakukan reaksi ini sebagai gaya lebih. Jawab:  $\frac{3}{8} wL$ .



GAMBAR SOAL 15 – 40

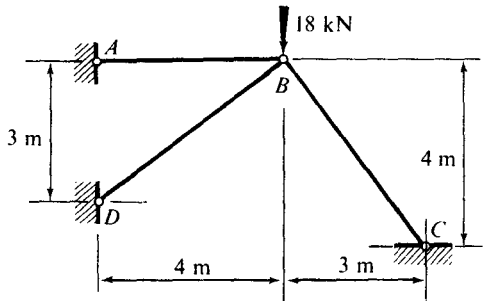
15-41. Untuk balok yang diperlihatkan dalam gambar, dengan menggunakan metoda kerja semu, (a) tentukanlah gaya reaksi pada titik  $A$ , dengan memperlakukannya sebagai gaya lebih. (b) Tentukanlah momen pada titik  $B$ , dengan memperlakukannya sebagai gaya lebih. Jawab: (a)  $\frac{2}{3}P$ , (b)  $-\frac{1}{3}PL$ .



GAMBAR SOAL 15 – 41

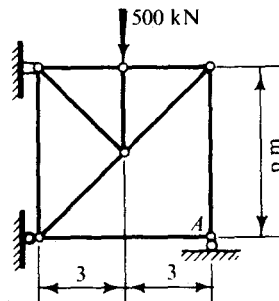
15-42. Sebuah kerangka planar dengan engsel-engsel pada titik-titik  $A$ ,  $B$ ,  $C$  dan  $D$  mempunyai ukuran-ukuran yang terlihat dalam gambar.

bar. Dengan metoda kerja semu, tentukanlah gaya-gaya yang terbentuk dalam batang-batang  $AB$ ,  $DB$ , dan  $CB$  yang disebabkan oleh pemakaian gaya  $18 \text{ kN}$ . Ambillah harga-harga  $L/A$  sebagai berikut: 1 untuk  $AB$ , 2 untuk  $DB$  dan 3 untuk  $CB$ . Abaikanlah penekukan pada batang. Tinjaulah batang  $BC$  sebagai gaya lebih. Jawab:  $+2,57 \text{ kN}$  untuk  $BA$ ,  $-12,86 \text{ kN}$  untuk  $BC$  dan  $BD$ .



GAMBAR SOAL 15 – 42

15-43. Tentukanlah reaksi pada titik  $A$ , dengan memperlakukannya sebagai gaya lebih, untuk susunan rangka yang dibebani seperti yang terlihat dalam gambar. Bahan susunan rangka itu adalah elastis linier. Harga  $L/A$  untuk semua batang adalah  $0,05 \text{ mm}^{-1}$ .



GAMBAR SOAL 15 – 43

# \*16 Silinder Dinding Tebal

## 16.1 PENDAHULUAN

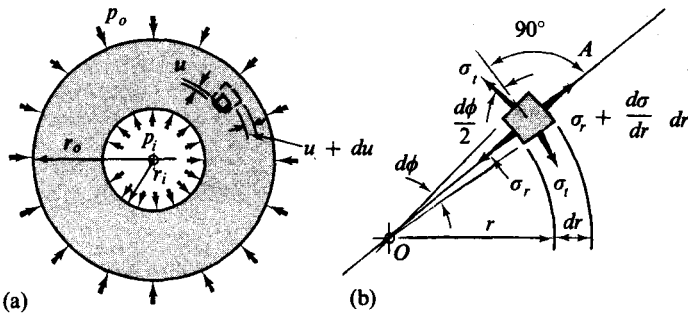
Karakteristik metoda mekanika bahan dalam menurunkan rumus-rumus analisis tegangan tergantung pada asumsi-asumsi mengenai deformasi. Dalam puntiran batang melingkar, kita membuat asumsi bahwa regangan geser berubah secara linier dari sumbu, sedang dalam lenturan, diandaikan bahwa irisan bidang melalui balok akan tetap berupa bidang datar. Tetapi dalam masalah-masalah yang lebih rumit, biasanya tidaklah mungkin untuk membuat asumsi-asumsi semacam itu. Karena itu analisis kita mulai dengan pertimbangan-pertimbangan dari suatu elemen kecil tak berhingga yang umum; kita postulasikan hukum Hooke dan penyelesaiannya dimisalkan akan diperoleh setelah tegangan yang bekerja pada setiap elemen dan deformasinya diketahui. Pada tapal batas sebuah benda, keseimbangan dari gaya-gaya yang diketahui atau pergeseran yang telah ditentukan haruslah dipenuhi oleh elemen-elemen yang bersangkutan. Ini disebut teknik *teori matematis elastisitas*. Karena itu ada baiknya dalam bab terakhir buku ini, kita menyelesaikan suatu soal teknis yang berhubungan dengan metoda-metoda ini, berupa persoalan silinder berdinding tebal di bawah tekanan. Secara matematis hal ini merupakan persoalan sederhana, akan tetapi jawabannya akan menunjukkan karakteristik metoda yang digunakan dalam elastisitas.

Sifat tak-elastis dari silinder berdinding tebal di bawah tekanan dalam akan dibahas pula dengan singkat pada akhir bab ini. Kedua keadaan elastis-plastis dan plastis penuh akan dicoba pula, dengan menggunakan teori geser maksimum Tresca (Pasal 9-8) sebagai kriteria luluh untuk bahan plastis ideal.

## 16-2 PEMECAHAN PERSOALAN UMUM

Tinjaulah sebuah silinder panjang dengan ujung-ujung yang tertahan secara aksial yang penampangnya mempunyai ukuran-ukuran yang terlihat dalam Gambar 16-1(a).\*

\*Masalah ini dipecahkan oleh Lamé, seorang insinyur Perancis, pada tahun 1833 dan kadang-kadang diacu sebagai masalah Lamé.



Gambar 16-1 Silinder berdinding tebal

Radius dalam silinder ini adalah  $r_i$ ; sedang radius luar adalah  $r_o$ . Ambillah tekanan dalam silinder tersebut  $p_i$ ; sedang tekanan luar  $p_o$ . Yang akan kita cari adalah tegangan-tegangan dalam dinding silinder yang disebabkan oleh tekanan-tekanan ini.

Masalah ini paling baik dipecahkan dengan menggunakan koordinat-koordinat silinder. Karena silinder tersebut panjang, setiap cincin dengan tebal satuan diukur tegaklurus pada bidang kertas mendapat tegangan yang sama. Sebuah elemen kecil tak berhingga tertentu dari ketebalan satuan didefinisikan oleh dua radius,  $r$  dan  $r + dr$  serta sebuah sudut  $d\phi$ , seperti yang terlihat dalam Gambar 16-1(b).

Bila tegangan *radial* normal yang bekerja pada elemen kecil tak berhingga pada jarak  $r$  dari pusat silinder adalah  $\sigma_r$ , maka tegangan yang berubah ini pada jarak  $r + dr$  dari pusat silinder akan menjadi  $\sigma_r + (d\sigma_r/dr)dr$ . (Lihat kembali keadaan yang serupa dalam balok di mana, pada jarak  $dx$  sepanjang balok,  $M$  berubah dengan  $(dM/dx)dx$ ). Kedua tegangan *singgung* normal yang bekerja pada dua permukaan elemen yang lain adalah  $\sigma_t$ . Tegangan-tegangan ini, serupa dengan tegangan-tegangan keliling (hoop stresses) dalam silinder yang tipis, adalah sama. Selain itu, berhubung dari keadaan simetri setiap elemen pada jarak radial yang sama dari pusat haruslah mendapat tegangan yang sama, maka pada elemen itu tidak ditemui tegangan geser. Selanjutnya, tegangan-tegangan aksial  $\sigma_z$  pada kedua permukaan elemen adalah sama dan berlawanan arah dan tegaklurus pada bidang kertas.

Setelah merumuskan hakekat tegangan-tegangan yang bekerja pada sebuah elemen yang kecil tak berhingga, maka penyelesaian mengenai karakteristik elastisitas akan meneruskan pola pemikiran yang berikut.

### Keseimbangan Statik

Elemen yang kita pilih haruslah berada dalam keseimbangan statik. Untuk menyatakan ini secara matematis diperlukan evaluasi gaya yang bekerja pada elemen ini. Gaya ini diperoleh dengan mengalikan tegangan dengan luas di mana tegangan ini bekerja. Luas di mana  $\sigma_r$  bekerja adalah  $(1)(r d\phi)$ ; sedang luas di mana  $\sigma_r + d\sigma_r$  bekerja adalah  $(1)(r + dr)d\phi$ ; dan masing-masing luas di mana  $\sigma_t$  bekerja adalah  $(1) dr$ . Berat elemen itu sendiri



kita abaikan. Karena sudut antara kedua sisi elemen adalah  $d\phi$ , maka kedua tegangan singgung menjadi miring sebesar  $\frac{1}{2} d\phi$  terhadap garis yang tegaklurus pada  $OA$ . Kemudian dengan menjumlahkan gaya-gaya menurut garis radial,  $\Sigma F_r = 0$ , maka

$$\sigma_r r d\phi + 2\sigma_t dr \left(\frac{d\phi}{2}\right) - \left(\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr} dr\right)(r + dr) d\phi = 0$$

Dengan menyederhanakan dan mengabaikan ketidak-berhinggaan kecil yang berderajat lebih tinggi maka persamaan menjadi

$$\sigma_t - \sigma_r - r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0 \quad \text{atau} \quad \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0 \quad (16-1)$$

Satu persamaan ini mempunyai dua tegangan yang tidak diketahui,  $\sigma_t$  dan  $\sigma_r$ . Langkah-langkah perantara diperlukan untuk menyatakan persamaan ini dalam bentuk satu yang tidak diketahui hingga dapat kita pecahkan. Ini dilakukan dengan menyertakan ke dalam soal tersebut deformasi geometris serta sifat-sifat dari bahan.

### Kesesuaian Geometri

Deformasi sebuah elemen digambarkan oleh regangan-regangannya dalam arah-arah radial dan tangensial (singgung). Bila  $u$  menyatakan *pergeseran radial* (radial displacement) atau *gerakan radial* (radial movement) dari permukaan silinder yang berjari-jari  $r$ , Gambar 16-1(a), maka  $u + (du/dr)dr$  merupakan pergeseran atau gerakan radial permukaan yang berdekatan dengan radius  $r + dr$ . Jadi regangan  $\epsilon_r$  sebuah elemen dalam arah radial adalah

$$\epsilon_r = \frac{\left(u + \frac{du}{dr} dr\right) - u}{dr} = \frac{du}{dr} \quad (16-2)$$

Regangan  $\epsilon_t$  dalam arah menyinggung diperoleh dengan mengurangi keliling permukaan silindris yang berdeformasi yang radiusnya adalah  $r + u$  dengan keliling permukaan silinder tanpa regangan yang radiusnya adalah  $r$  serta kemudian dibagi dengan keliling yang terakhir. Jadi

$$\epsilon_t = \frac{2\pi(r + u) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{u}{r} \quad (16-3)$$

Karena tegangan yang bekerja pada elemen itu adalah tegangan-tegangan utama,\* maka Persamaan 16-2 dan 16-3 memberikan regangan-regangan utama yang dinyatakan dalam bentuk *satu* variabel  $u$  yang tidak diketahui.

### Sifat-sifat Bahan

Hukum Hooke umum yang menghubungkan regangan (strain) dan tegangan (stress) diberikan oleh Persamaan 2-6 dan dapat kita nyatakan kembali di sini dalam bentuk yang berikut

$$\epsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_t - \nu\sigma_z) \quad (16-4a)$$

\* Karena sebuah elemen silindris kecil tak berhingga mencakup suatu sudut yang kecil tak berhingga pula antara dua sisinya, ia dapat diperlakukan sebagai elemen dalam sistem koordinat Cartesian.

$$\epsilon_t = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_r + \sigma_t - \nu\sigma_z) \quad (16-4b)$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_r - \nu\sigma_t + \sigma_z) \quad (16-4c)$$

Tetapi dalam keadaan silinder yang berdinding tebal dengan deformasi aksial yang tertahan, soal tersebut merupakan masalah *regangan bidang*, yaitu  $\epsilon_z = 0$ . Persamaan yang terakhir lantas menjadi suatu hubungan tegangan aksial sebagai

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_t) \quad (16-5)$$

Dengan mengikuti hasil ini ke dalam Persamaan 16-4a dan b dan memecahkan mereka secara simultan kita memperoleh ungkapan untuk tegangan-tegangan  $\sigma_r$  dan  $\sigma_t$  dalam bentuk regangan-regangan utama:

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\epsilon_r + \nu\epsilon_t] \quad (16-6a)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[\nu\epsilon_r + (1-\nu)\epsilon_t] \quad (16-6b)$$

Persamaan-persamaan ini membawa syarat regangan bidang ke dalam masalah bahan elastis.

### Pembentukan Persamaan Diferensial

Sekarang persamaan keseimbangan, Persamaan 16-1, dapat dinyatakan dalam bentuk satu variabel  $u$ . Jadi, kita eliminasi regangan-regangan  $\epsilon_r$  dan  $\epsilon_t$  dari Persamaan 16-6a dan 16-6b dengan menyatakan mereka dalam bentuk-bentuk pergeseran  $u$ , seperti yang diberikan oleh Persamaan 16-2 dan 16-3; lalu tegangan-tegangan radial dan tangensial adalah

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1-\nu) \frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right] \quad (16-7)$$

dan

$$\sigma_t = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ \nu \frac{du}{dr} + (1-\nu) \frac{u}{r} \right]$$

dan dengan mensubstitusikan harga-harga ini ke dalam Persamaan 16-1 dan menyederhanakannya, persamaan diferensial yang dimaksud diperoleh,

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0 \quad (16-8)$$

### Pemecahan Persamaan Diferensial

Seperti dapat diturunkan dengan substitusi, jawab umum Persamaan 16-8 yang memberikan pergeseran radial  $u$  pada titik yang sembarang pada silinder, adalah

$$u = A_1 r + A_2 / r \quad (16-9)$$

di mana tetapan (konstanta)  $A_1$  dan  $A_2$  harus ditentukan dari syarat-syarat *batas* benda.

Sayang sekali, untuk menentukan tetapan  $A_1$  dan  $A_2$ , pergeseran  $u$  tidak diketahui baik pada perbatasan sebelah dalam maupun sebelah luar dari dinding silinder. Tetapi tekanan yang diketahui sama dengan tegangan radial yang bekerja pada elemen-elemen itu untuk radius yang bersangkutan. Jadi

$$\sigma_r(r_i) = -p_i \quad \text{dan} \quad \sigma_r(r_o) = -p_o \quad (16-10)$$

di mana tanda minus digunakan untuk menunjukkan tegangan tekan (compressive stress). Selain itu karena  $u$  diberikan oleh Persamaan 16-9 sedang  $du/dr = A_1 - A_2/r^2$  dapat disubstitusikan ke dalam ungkapan  $\sigma_r$  yang diberikan oleh Persamaan 16-7, maka syarat-syarat batas yang diberikan oleh Persamaan 16-10 menjadi

$$\begin{aligned} \sigma_r(r_i) = -p_i &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ A_1 - (1-2\nu) \frac{A_2}{r_i^2} \right] \\ \sigma_r(r_o) = -p_o &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ A_1 - (1-2\nu) \frac{A_2}{r_o^2} \right] \end{aligned} \quad (16-11)$$

Dengan memecahkan persamaan-persamaan ini secara berturut-turut untuk  $A_1$  dan  $A_2$  menghasilkan

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} \frac{p_i r_i^2 - p_o r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} \\ A_2 &= \frac{1+\nu}{E} \frac{(p_i - p_o) r_i^2 r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} \end{aligned} \quad (16-12)$$

*Tetapan-tetapan ini, bila digunakan dalam Persamaan 16-9, memberikan penentuan pergeseran radial dari titik sembarang pada silinder elastis yang mendapat tekanan tertentu. Jadi pergeseran batas-batas sebelah dalam dan luar dari silinder dapat dihitung.*

Bila Persamaan 16-9 beserta penurunannya (bersama dengan tetapan-tetapan yang diberikan oleh Persamaan 16-12) disubstitusikan ke dalam Persamaan 16-7 dan hasilnya disederhanakan, maka persamaan-persamaan umum untuk tegangan radial dan tegangan tangensial pada suatu titik sembarang dari sebuah silinder elastis dapat kita peroleh, yaitu

$$\sigma_r = C_1 - \frac{C_2}{r^2} \quad \text{dan} \quad \sigma_t = C_1 + \frac{C_2}{r^2} \quad (16-13)$$

di mana 
$$C_1 = \frac{p_i r_i^2 - p_o r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} \quad \text{dan} \quad C_2 = \frac{(p_i - p_o) r_i^2 r_o^2}{r_o^2 - r_i^2}$$

Perhatikanlah bahwa  $(\sigma_r + \sigma_t)$  adalah konstan diseluruh daerah penampang silinder. Ini berarti bahwa tegangan aksial  $\sigma_z$  seperti diberikan oleh Persamaan 16-5 adalah juga konstan diseluruh daerah penampang silinder berdinding tebal.

### Catatan mengenai Masalah Piring Tipis

Hubungan tegangan-regangan yang digunakan di atas untuk sebuah silinder dinding tebal

adalah berhubungan dengan syarat *regangan bidang*. Dilain pihak, bila yang ditinjau adalah sebuah piring tipis berbentuk gelang, maka yang berlaku adalah syarat *tegangan bidang* (yakni  $\sigma_z = 0$  dan  $\epsilon_z = -\nu(\sigma_x + \sigma_y)/E$ ). Maka hubungan tegangan-regangan seperti yang diberikan oleh Persamaan 8-20 haruslah dipergunakan dalam proses pemecahan Persamaan 16-16a dan b. Tetapi, persamaan diferensial yang diperoleh masih sama dengan Persamaan 16-8, sedang tegangan radial dan tegangan tangensial identik pula dengan yang untuk silinder dinding tebal yang diberikan oleh Persamaan 16-13. Perbedaanannya hanyalah bahwa suatu tetapan yang berbeda  $A_1$  haruslah digunakan dalam Persamaan 16-9 untuk menentukan pergeseran radial  $u$ . Tetapi  $A_2$  masih tetap sama dengan yang di dalam Persamaan 16-12, sedangkan  $A_1$  menjadi

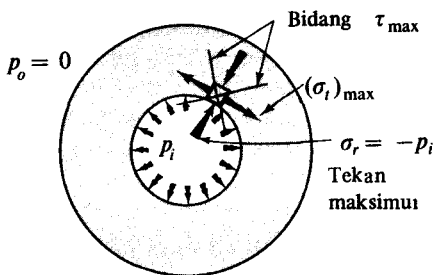
$$A_1 = \frac{1 - \nu}{E} \frac{p_i r_i^2 - p_o r_o^2}{r_o^2 - r_i^2}$$

### 16-3 KASUS KHUSUS

Hanya tekanan dalam saja, yaitu  $p_i \neq 0$  dan  $p_o = 0$ . Untuk kasus ini, Persamaan-persamaan 16-13 menjadi sederhana

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{p_i r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} \left( 1 - \frac{r_o^2}{r^2} \right) \\ \sigma_t &= \frac{p_i r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} \left( 1 + \frac{r_o^2}{r^2} \right)\end{aligned}\quad (16-13a)$$

Oleh karena  $r_o^2/r^2 \geq 1$ ,  $\sigma_r$  selalu merupakan tegangan tekan dan menjadi maksimum pada  $r = r_i$ . Demikian pula,  $\sigma_t$  selalu merupakan tegangan tarik dan maksimumnya terjadi pada  $r = r_i$ .



Gambar 16-2 Sebuah elemen di mana terjadi  $\tau_{\max}$

Untuk bahan-bahan seperti baja lunak yang gagal dalam geser ketimbang dalam tarik langsung, maka teori kegagalan geser maksimum (Pasal 9-8) harus digunakan dalam desain. Hanya untuk tekanan dalam, tegangan geser maksimum terjadi pada permukaan sebelah dalam silinder, Gambar 16-2. Pada permukaan ini, tegangan tarik  $\sigma_t$  dan tegangan tekan  $\sigma_r$  mencapai harga-harga maksimum masing-masing. Selanjutnya dari Persamaan 16-5 dapat disimpulkan bahwa tegangan aksial  $\sigma_z$  merupakan tegangan antara yang utama untuk  $0 < \nu \leq 0,5$ . Dengan mensubstitusikan tegangan-tegangan utama maksimum dan minimum ke dalam Persamaan 8-8 dan dengan menggunakan Persamaan 9-4

( $\tau_{\max} = \sigma_{yp}/2$ ), kita peroleh

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{(\sigma_t)_{\max} - (\sigma_r)_{\max}}{2} = \frac{p_i r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} = \frac{\sigma_{yp}}{2} \quad (16-13b)$$

dan

$$p_{yp} = \sigma_{yp}(r_o^2 - r_i^2)/(2 r_o^2) \quad (16-13c)$$

Hanya untuk tekanan luar saja, yaitu  $p_i = 0$  dan  $p_o \neq 0$ . Untuk kasus ini, Persamaan-persamaan 16-13 menjadi sederhana

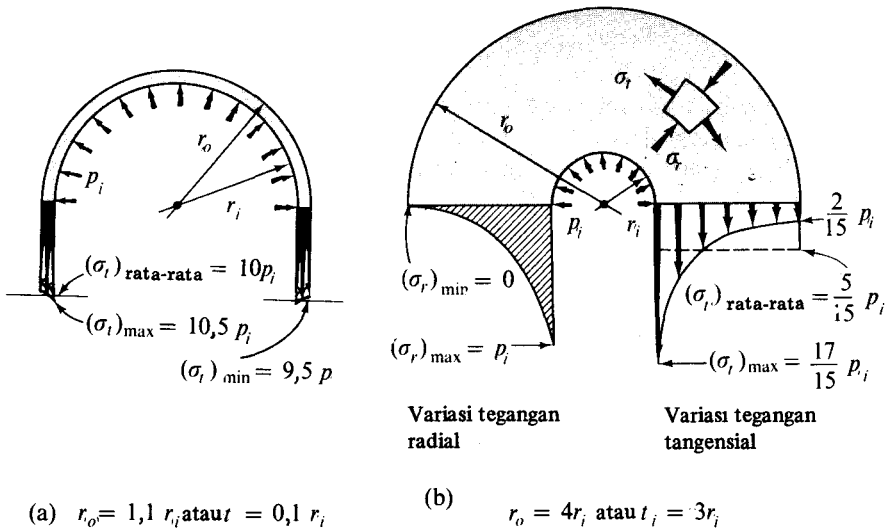
$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{p_o r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} \left(1 - \frac{r_i^2}{r^2}\right) \\ \sigma_t &= -\frac{p_o r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} \left(1 + \frac{r_i^2}{r^2}\right) \end{aligned} \quad (16-13d)$$

Karena  $r_i^2/r^2 \leq 1$ , kedua tegangan selalu merupakan tekan. Tegangan tekan maksimum adalah  $\sigma_t$  dan terjadi pada  $r = r_i$ .

Persamaan-persamaan 16-3d tidak boleh digunakan untuk silinder yang berdinding sangat tipis. Penekukan dinding dapat terjadi dan rumus-rumus kekuatan dapat memberikan hasil-hasil yang menyesatkan.

#### CONTOH 16-1

Buatlah suatu perbandingan antara distribusi tegangan tangensial yang disebabkan oleh tekanan dalam  $p_i$  seperti yang diberikan oleh rumus eksak dari bab ini dengan distribusi yang diberikan oleh rumus aproksimasi untuk silinder berdinding tipis dalam Bab 9 bila (a)  $r_o = 1,1 r_i$  dan bila (b)  $r_o = 4r_i$ , Gambar 16-3.



Gambar 16-3

## PENYELESAIAN

*Kasus (a).* Dengan menggunakan Persamaan 16-13b untuk  $\sigma_t$ ,

$$(\sigma_t)_{r=r_i} = (\sigma_t)_{\max} = \frac{p_i r_i^2}{(1,1r_i)^2 - r_i^2} \left[ 1 + \frac{(1,1r_i)^2}{r_i^2} \right] = 10,5p_i$$

$$(\sigma_t)_{r=r_o} = (\sigma_t)_{\min} = \frac{p_i r_i^2}{(1,1r_i)^2 - r_i^2} \left[ 1 + \left( \frac{1,1r_i}{1,1r_i} \right)^2 \right] = 9,5p_i$$

sementara, berhubung tebal dinding  $t = 0,1r_i$ , maka tegangan "keliling" rata-rata yang diberikan oleh Persamaan 9-2 adalah

$$(\sigma_t)_{\text{rata-rata}} = \frac{p_i r_i}{t} = \frac{p_i r_i}{0,1r_i} = 10p_i$$

Hasil-hasil ini diperlihatkan dalam Gambar 16-3(a). Terutama perhatikan bahwa dalam menggunakan Persamaan 9-2 tidak terdapat kesalahan yang besar.

*Kasus (b).* Dengan menggunakan Persamaan 16-13a untuk  $\sigma_t$ , tegangan-tegangan tangensial eksak diperoleh seperti di atas. Ini adalah

$$(\sigma_t)_{r=r_i} = (\sigma_t)_{\max} = \frac{p_i r_i^2}{(4r_i)^2 - r_i^2} \left[ 1 + \frac{(4r_i)^2}{r_i^2} \right] = \frac{17}{15}p_i$$

$$(\sigma_t)_{r=r_o} = (\sigma_t)_{\min} = \frac{p_i r_i^2}{(4r_i)^2 - r_i^2} \left[ 1 + \left( \frac{4r_i}{4r_i} \right)^2 \right] = \frac{2}{15}p_i$$

Harga-harga tegangan tangensial yang dihitung untuk beberapa titik antara diplot pada Gambar 16-3(b). Suatu variasi tegangan tangensial yang menyolok dapat diamati dari gambar ini. Tegangan tangensial rata-rata yang diberikan oleh Persamaan 9-2 dengan menggunakan  $t = 3r_i$  adalah

$$(\sigma_t)_{\text{rata-rata}} = \frac{p_i r_i}{t} = \frac{5}{15}p_i = \frac{1}{3}p_i$$

Tegangan ini sama sekali belum mendekati tegangan maksimum yang sebenarnya.

Tegangan-tegangan radial juga dihitung dengan menggunakan Persamaan 16-13(a) untuk  $\sigma_r$  dan hasil-hasilnya dapat dilihat dalam daerah yang bergaris-garis dalam Gambar 16-3(b).

Adalah menarik untuk diperhatikan bahwa tegangan tangensial maksimum tidak akan lebih kecil dari  $p_i$ , bagaimana pun tebalnya silinder yang dibuat untuk menahan tekanan dalam.\* Hal ini dalam praktek memerlukan teknik-teknik khusus untuk mengurangi tegangan maksimum. Umpamanya dalam pabrik pembuatan senjata, daripada menggunakan sebuah silinder tunggal, sebuah silinder yang lain diciutkan menjadi lebih kecil yang menjadikan *tegangan tekan* awal terdapat pada silinder sebelah dalam sedang tegangan tarik awal terdapat pada silinder sebelah luar. Dalam operasi, tegangan tekan di dalam silinder sebelah dalam dibebaskan dahulu, dan kemudian barulah silinder ini mulai bekerja dalam tarik. Dengan cara demikian diperoleh daerah tekanan kerja yang lebih besar.

\* Lihat Soal 16-3.

#### 16-4 SIFAT SILINDER DINDING TEBAL PLASTIS IDEAL

Dalam pasal yang lalu telah ditinjau kasus silinder dinding tebal yang hanya berada di bawah tekanan dalam saja dan Persamaan 16-13(c) diturunkan untuk permulaan peluluhan pada permukaan sebelah dalam dari silinder menurut kriteria geser maksimum Persamaan 8-8. Dengan meningkatnya tekanan dalam, peluluhan merembes menuju permukaan luar, dan status elastis-plastis berlaku dalam silinder dengan radius batas  $c$  di mana di luarnya masih tetap dalam keadaan elastis. Bila tekanan terus dinaikkan, radius  $c$  bertambah besar sampai akhirnya seluruh penampang menjadi plastis penuh pada beban runtuh ultimat.

Dalam pembahasan yang berikut, kriteria geser maksimum untuk bahan plastis ideal, Persamaan 8-8

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_{yp}}{2}$$

akan dipergunakan dengan tegangan-tegangan utama maksimum dan minimum yang masing-masing adalah  $\sigma_t$  dan  $\sigma_r$ . Ini berdasarkan pada pengandaian bahwa  $\sigma_z$ , tegangan aksial merupakan tegangan utama antara. Suatu pemeriksaan Persamaan 16-5 dan 16-13a menunjukkan bahwa ini adalah betul dalam daerah elastis, asal saja  $0 < \nu < 0,5$ ; sedang dalam daerah plastis ini hanya berlaku bila perbandingan antara radius-radius luar dan dalam  $r_o/r_i$  lebih kecil dari suatu harga tertentu.\* Untuk  $\nu = 0,3$  perbandingan ini dapat ditetapkan menjadi 5,75; jadi jawaban yang akan diperoleh dalam pasal ini hanya akan berlaku selama  $r_o < 5,75 r_i$  (dengan  $\nu = 0,3$ ). Tugas mendapatkan distribusi tegangan menjadi lebih rumit bila syarat ini tidak dipenuhi dan berada di luar jangkauan buku ini.

#### Sifat Plastis Silinder Dinding Tebal

Persamaan-persamaan keseimbangan statik berlaku tanpa memperhatikan apakah status yang ditinjau elastis atau plastis. Jadi, Persamaan 16-1 berlaku, tetapi harus dilengkapi dengan syarat luluh.

*Keseimbangan statik* (Persamaan 16-1):

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0$$

*Syarat luluh* (Persamaan 8-8):

$$\frac{\sigma_t - \sigma_r}{2} = \frac{\sigma_{yp}}{2}$$

Dengan menggabungkan kedua persamaan ini, persamaan diferensial dasar menjadi

$$\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{\sigma_{yp}}{r} = 0 \quad \text{atau} \quad d\sigma_r = \frac{\sigma_{yp}}{r} dr \quad (16-14)$$

\* Lihat W.T. Koiter, "On partially plastic thick-walled tubes," *Bièzeno Anniversary Volume on Applied Mechanics*, Haarlem, Holland: 1953, hal. 233 - 251.

yp = yield point = titik luluh = titik leleh

Jawab persamaan-persamaan ini dapat ditulis sebagai

$$\sigma_r = \sigma_{yp} \ln r + C \quad (16-15)$$

Untuk sebuah silinder dengan radius dalam  $a$  dan radius luar  $b$ , maka syarat batas (tekanan luar nol) dapat dinyatakan sebagai

$$\sigma_r(b) = 0 = \sigma_{yp} \ln b + C \quad (16-16)$$

Jadi, tetapan integrasi  $C$  diberikan sebagai

$$C = -\sigma_{yp} \ln b$$

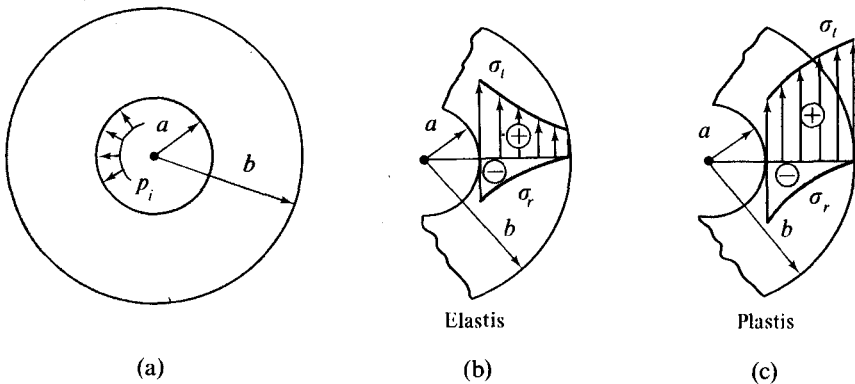
Tegangan-tegangan radial dan tangensial lalu dapat diperoleh dengan menggunakan Persamaan 16-15 dan 8-8. Jadi

$$\sigma_r = \sigma_{yp}(\ln r - \ln b) = \sigma_{yp} \ln r/b \quad (16-17a)$$

$$\sigma_t = \sigma_{yp} + \sigma_r = \sigma_{yp}(1 + \ln r/b) \quad (16-17b)$$

Distribusi tegangan yang diberikan oleh Persamaan 16-17a dan b diperlihatkan dalam Gambar 16-4(c), sedang Gambar 16-4(b) memperlihatkan distribusi tegangan elastis. Karena status plastis penuh menyatakan keruntuhan ultimat dari silinder dinding tebal, maka tekanan dalam ultimat, dengan menggunakan Persamaan 16-17a, diberikan sebagai

$$p_{ult} = \sigma_r(a) = \sigma_{yp} \ln a/b \quad (16-18)$$



Gambar 16-4

### Sifat Elastis-Plastis Silinder Dinding Tebal

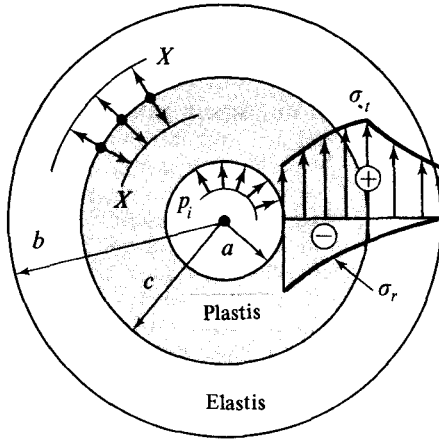
Untuk harga  $p_i$  yang sembarang yang berada antara harga-harga luluh dan ultimat yang masing-masing diberikan oleh Persamaan 16-13c dan Persamaan 16-18, yaitu  $p_{yp} < p_i$

$yp$  = yield point = titik luluh = titik leleh



$< p_{ult}$ , maka penampang silinder yang terdapat antara radius dalam  $a$  dan radius antara  $c$  merupakan plastis penuh, sedang antara  $c$  dan radius luar  $b$  berada dalam daerah elastis, Gambar 16-5. Pada permukaan batas elastis-plastis, syarat luluh (yield condition) baru saja dipenuhi dan tegangan radial bersangkutan  $X$  dapat dihitung dengan menggunakan Persamaan 16-13c dengan  $r_i = c$  dan  $r_o = b$ , jadi

$$X = \frac{\sigma_{yp}}{2} \frac{b^2 - c^2}{b^2} \quad (16-19)$$



Gambar 16-5

Tegangan ini menjadi syarat batas yang digunakan dalam hubungan dengan Persamaan 16-15 untuk suatu segmen plastis penuh dengan radius dalam  $a$  dan radius luar  $c$ . Jadi

$$\sigma_r(c) = -X = -\frac{\sigma_{yp}}{2} \frac{b^2 - c^2}{b^2} = \sigma_{yp} \ln c + C \quad (16-20)$$

dan

$$C = -\frac{\sigma_{yp}}{2} \frac{b^2 - c^2}{b^2} - \sigma_{yp} \ln c \quad (16-21)$$

Dengan mengganti harga  $C$  ini ke dalam Persamaan 16-15, tegangan radial dalam daerah plastis diperoleh sebagai

$$\sigma_r = \sigma_{yp} \ln \frac{r}{c} - \frac{\sigma_{yp}}{2} \frac{b^2 - c^2}{b^2} \quad (16-22a)$$

dan dengan menggunakan Persamaan 8-8, tegangan tangensial dalam zona plastis menjadi

$$\sigma_t = \sigma_{yp} + \sigma_r = \sigma_{yp} \left( 1 + \ln \frac{r}{c} \right) - \frac{\sigma_{yp}}{2} \frac{b^2 - c^2}{b^2} \quad (16-22b)$$

Tekanan dalam  $p_i$  pada mana zona plastis meluas dari  $a$  ke  $c$  dapat kita peroleh, dengan menggunakan Persamaan 16-22a, hanya sebagai  $p_i = \sigma_r(a)$ . Persamaan 16-13a dengan  $r_i = c$  dan  $r_o = b$ , memberikan hubungan-hubungan yang diperlukan untuk menghitung distribusi tegangan dalam zona elastis.

## SOAL-SOAL UNTUK DISELESAIKAN

16-1. Turunkanlah jawaban Persamaan 16-8.

16-2. Buktikanlah bahwa perbandingan tegangan tangensial maksimum terhadap tegangan tangensial rata-rata untuk silinder dinding tebal yang hanya mengalami tekanan dalam adalah  $(1 + \beta^2)/(1 + \beta)$  di mana  $\beta = r_o/r_i$ .

16-3. Buktikanlah bahwa dalam sebuah silinder yang hanya mengalami tekanan dalam, tegangan tangensial maksimum tidaklah lebih kecil dari  $p_i$ , tidak tergantung pada besarnya diameter luar silinder itu. (*Petunjuk*: ambil  $r_o \rightarrow \infty$ ).

16-4. Sebuah silinder baja paduan mempunyai diameter dalam 160 mm (160 mm I.D.) dan diameter luar 320 mm (320 mm O.D.). Bila silinder tersebut mengalami tekanan dalam dari  $p_i = 150$  MPa ( $p_o = 0$ ), (a) tentukanlah distribusi tegangan radial dan tangensial dan perlihatkanlah hasil-hasil tersebut dalam sebuah plot. (b) Tentukanlah tegangan geser maksimum (utama), (c) Tentukanlah perubahan diameter luar dan diameter dalam.  $E = 200$  GPa,  $\nu = 0,3$ .

16-5. Sebuah silinder baja paduan mempunyai diameter dalam 0,15 m (0,15 m I.D.) dan diameter luar 0,45 m (0,45 m O.D.). Bila silinder tersebut mengalami suatu tekanan dalam dari  $p_i = 160$  MPa (dan  $p_o = 0$ ): (a) tentukanlah distribusi tegangan radial dan tangensial dan perlihatkanlah hasil-hasil tersebut pada sebuah plot, (b) tentukanlah tegangan geser maksimum (utama), dan (c) tentukanlah perubahan diameter luar dan diameter dalam. Gunakanlah  $E = 200 \times 10^3$  MPa dan  $\nu = 0,3$ .

16-6. Kerjakanlah kembali Soal 16-5 dengan  $p_i = 0$  dan  $p_o = 80$  MPa.

16-7. Kerjakanlah kembali Soal 16-5 dengan  $p_i = 160$  MPa dan  $p_o = 80$  MPa.

16-8. Pisahkan tersendiri setengah silinder dalam Soal 16-7 dengan membuat suatu bidang datar yang melalui sumbu silinder. Kemudian dengan mengintegrasikan tegangan-tegangan tangensial pada luas-luas yang bersangkutan, buktikanlah bahwa benda bebas yang dipisahkan tersendiri itu berada dalam keseimbangan.

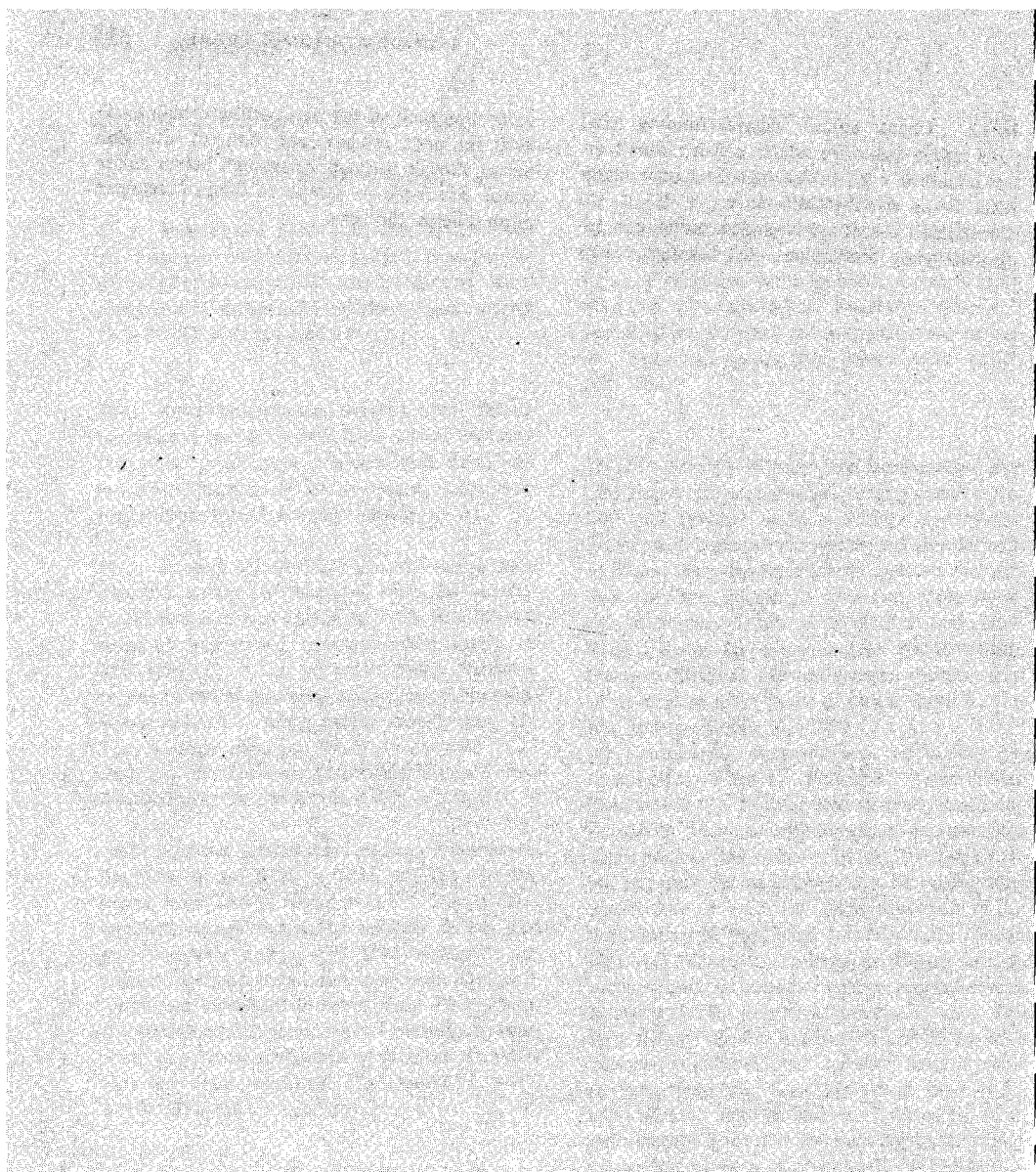
16-9. Disainlah sebuah silinder dinding tebal yang mempunyai diameter dalam 100 mm untuk suatu tekanan dalam sebesar 50 MPa agar mendapatkan (a) suatu faktor keamanan sebesar 2 terhadap suatu peluluhan dalam silinder, dan (b) suatu faktor keamanan sebesar 3 terhadap keruntuhan ultimat (ultimate collapse). Tegangan luluh baja dalam tarik adalah 250 MPa.

16-10. Sebuah silinder baja berdiameter luar 400 mm yang mempunyai lubang berdiameter 240 mm (yang dengan sendirinya merupakan diameter dalamnya) menyelubungi silinder baja yang lain yang diameter luarnya adalah 240 mm dan diameter dalamnya 140 mm. Pada mulanya diameter dalam dari silinder luar lebih kecil 0,3 mm dari diameter luar silinder dalam. Susunan tersebut didapat dengan memanaskan silinder yang lebih besar di dalam minyak. Untuk kedua silinder  $E = 200$  GPa dan  $\nu = 0,3$ . (a) Tentukanlah tekanan pada perbatasan antara kedua silinder. (*Petunjuk*: penambahan elastis diameter silinder luar dengan pengurangan elastis diameter silinder dalam memberikan celah awal antara kedua silinder). (b) Tentukanlah tegangan-tegangan tangensial dan radial yang disebabkan oleh tekanan yang diperoleh di (a). Perlihatkanlah hasil-hasil tersebut pada sebuah plot. (c) Tentukanlah tekanan dalam kepada mana silinder gabungan tersebut mengalaminya tanpa melebihi tegangan tangensial dari 140 MPa dalam silinder dalam. (*Petunjuk*: sesudah disusun, silinder-silinder tersebut bekerja sebagai satu kesatuan. Tegangan tekan awal di dalam silinder sebelah dalam dibebaskan lebih dahulu). (d) Superposisikanlah tegangan-tegangan tangensial yang diperoleh di (b) dengan tegangan-tegangan tangensial yang dihasilkan dari tekanan dalam yang diperoleh di (c). Perlihatkanlah hasil-hasil tersebut pada sebuah plot.

16-11. Buatlah persamaan diferensial untuk piring tipis yang berputar dengan suatu kecepatan sudut  $\omega$  rad per detik. Berat satuan bahan tersebut adalah  $\gamma$ . (*Petunjuk*: tinjaulah sebuah elemen seperti dalam Gambar 16-1(b) dan tambahkanlah suatu faktor kelembaman). *Jawab*: tambahkan suatu suku  $(1 - \nu^2) \gamma \omega^2 r / gE$  kepada Persamaan 16-8.

**16-12.** Untuk sebuah silinder dinding tebal yang radius dalamnya adalah  $a$  dan radius luarnya adalah  $b = 2a$ , (a) hitunglah tekanan dalam pada batas elastis-plastis pada  $r = 1,5 a$ , (b) tentukanlah distribusi tegangan radial dan tangensial yang disebabkan oleh tekanan dalam

yang diperoleh di (a) dan perlihatkanlah hasil-hasil itu pada sebuah plot, dan (c) hitunglah beban runtuh ultimat. Anggaplah beban dalam status elastis-plastis sempurna dengan tegangan luluh sebesar 250 MPa.



# Lampiran

## Tabel-tabel

1. Sifat Fisis Tertentu dari dan Tegangan Ijin untuk Beberapa Bahan Teknik.
2. Sifat Luas yang Dapat Dimanfaatkan.
3. Balok Baja Standar Amerika Bentuk S, Sifat untuk Disain.
4. Balok Baja Flens Lebar Amerika, Bentuk W, Sifat untuk Disain.
5. Kanal Baja Standar Amerika, Sifat untuk Disain.
6. Siku Baja dengan Kaki Sama, Sifat untuk Disain
7. Siku Baja dengan Kaki Tak Sama, Sifat untuk Disain.
8. Pipa Baja Standar.
9. Modul Irisan Plastis Terhadap Sumbu  $X-X$ .
10. Ukuran Kayu Standar Amerika, Sifat untuk Disain.
11. Defleksi dan Kemiringan Kurva Elastis untuk Balok dengan Pelbagai Pembebanan.
12. Aksi Ujung Jepit Balok Prismatic.

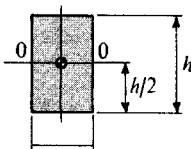
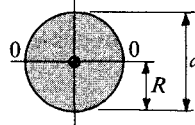
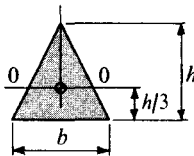
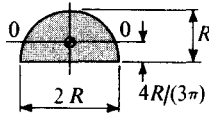
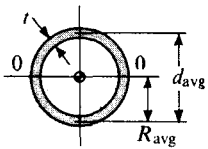
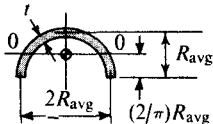
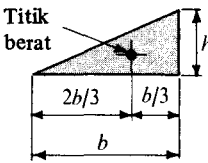
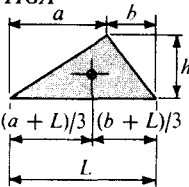
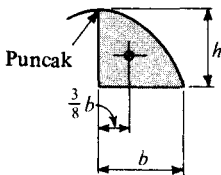
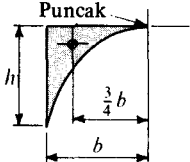
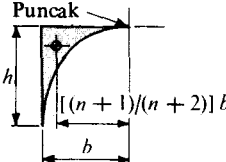
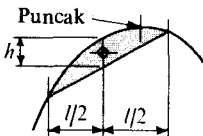
*Pemberitahuan:* Data Tabel-tabel 3 sampai dengan 9 didasarkan kepada *Manual Konstruksi Baja AISC* terbitan yang ketujuh, dan diubah ke dalam satuan SI menyusul tatanama dan dimensi yang dipublikasikan dalam *ASTM Standar A6-76*. Harga-harga yang terdaftar bukanlah merupakan konversi yang eksak, tetapi harga-harga yang dibulatkan dan dirasionalisasikan yang lebih mendekati praktek disain. Publikasi tabel-tabel ini dibuat dengan izin Institut Konstruksi Baja Amerika (AISC) sedang kolom-kolom tertentu dalam tabel-tabel dicetak kembali dengan izin Hak Cipta Masyarakat Pengujian dan Bahan-bahan Amerika (American Society for Testing and Materials).

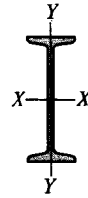
Tabel 1 SIFAT FISIS TERTENTU DARI DAN TEGANGAN IJIN UNTUK BEBERAPA BAHAN TEKNIK<sup>a</sup>

| Bahan  | Masa Satuan<br>$\times 10^3$<br>kg/m <sup>3</sup> | Kekuatan Ultimat,<br>MPa |                     |                  | Tegangan Luluh, <sup>g</sup><br>MPa |       | Tegangan Ijin, <sup>i</sup><br>MPa |                    | Modulus Elastis<br>GPa |       | Koef. Muai<br>Termis<br>$\times 10^{-6}$<br>per °C |
|--|---|--------------------------|---------------------|------------------|-------------------------------------|-------|------------------------------------|--------------------|------------------------|-------|--|
|  |   | Tarik                    | Desak. <sup>c</sup> | Geser            | Tarik. <sup>h</sup>                 | Geser | Tarik atau<br>Desak.               | Geser              | Tarik atau<br>Desak    | Geser |  |
| Paduan aluminium { 2014-T6<br>(ekstrusi) 6061-T6 | 2,77  | 414                      | ...                 | 241              | 365                                 | 214   |                                    |                    | 75                     | 27,6  | 23,2   |
|  |   | 262                      | ...                 | 207              | 241                                 | 138   |                                    |                    | 70                     | 25,6  | 23,4   |
| Besi cor { Abu-abu                               | 7,64  | 210                      | 825                 | ...              | ...                                 | ...   |                                    |                    | 90                     | 41    | 10,4   |
|  |   | 370                      | ...                 | 330              | 250                                 | 165   |                                    |                    | 170                    | 83    | 12,1   |
| Beton <sup>b</sup> { Rasio air-semen 0,70        | 2,41  | ...                      | 20                  | ...              | ...                                 | ...   | -9,31 <sup>j</sup>                 | 0,455              | 20                     | ...   | 10,8   |
|  |   | ...                      | 35                  | ...              | ...                                 | ...   | -15,5 <sup>j</sup>                 | 0,592              | 35                     | ...   | ...  |
| Paduan magnesium, AM100A                         | 1,80  | 275                      | ...                 | 145              | 150                                 | ...   |                                    |                    | 45                     | 17    | 25,2   |
|  |   | 450                      | ...                 | 330              | 250                                 | 165   | ±165                               | 100                |                        |       |  |
| Baja { Karbon 0,2% (rol panas)                   | 7,83  | 690                      | ...                 | 550              | 415                                 | 250   |                                    |                    | 200                    | 83    | 11,7   |
|  |   | 825                      | ...                 | 690              | 515                                 | 310   |                                    |                    |                        |       |  |
|  |   | 1380                     | ...                 | 1035             | 1035                                | 620   |                                    |                    |                        |       |  |
| Kayu { Cemara (pantai)                           | 0,50  | ...                      | 51 <sup>d</sup>     | 7.6 <sup>f</sup> | ...                                 | ...   | ±13,1 <sup>k</sup>                 | 0,825 <sup>f</sup> | 12,1                   | ...   | ...  |
|  | 0,58  | ...                      | 58 <sup>d</sup>     | 10 <sup>f</sup>  | ...                                 | ...   | ±15,5 <sup>k</sup>                 | 0,930 <sup>f</sup> | 12,1                   | ...   | ...  |

<sup>a</sup> Sifat-sifat mekanis logam tidak saja tergantung pada komposisi, tetapi juga perlakuan panas, kerja pendinginan mula, dan seterusnya. Data untuk kayu adalah untuk spesimen 500 mm × 50 mm bersih pada kandungan air 12 persen. Harga yang sebenarnya bervariasi. Di mana harga-harga SI tidak tersedia, konversi lunak harga-harga yang sekarang diterima dalam industri digunakan untuk membuat tabel ini. <sup>b</sup> Perbandingan berat air-semen untuk beton dengan bungkah 75 sampai 100 mm. Harga-harga adalah untuk beton usia 28 hari. <sup>c</sup> Hanya untuk blok pendek saja. Kekuatan desak ultimat tidak pasti untuk bahan-bahan liat; dapat dianggap sama pula keadaannya dengan tarikan. <sup>d</sup> Desakan sejajar dengan urat pada blok pendek. Desakan tegaklurus pada urat, masing-masing pada batas proporsional 6,56 MPa dan 8,20 MPa. Harga-harga merupakan konversi lunak dari *Wood Handbook*, Departemen Pertanian A.S. <sup>e</sup> Gagal pada tarikan diagonal. <sup>f</sup> Sejajar dengan urat. <sup>g</sup> Untuk kebanyakan bahan, 0,2 persen diperseimbangi. <sup>h</sup> Untuk bahan-bahan liat kekuatan luluh desak dapat dianggap sama. <sup>i</sup> Hanya untuk beban statik saja. Tegangan yang sangat rendah dibutuhkan dalam disain mesin karena sifat-sifat fatig dan pembebanan dinamis. <sup>j</sup> Tegangan tarik tidak ada dalam beton. <sup>k</sup> Hanya pada lenturan saja. Tegangan kayu untuk mutu yang terpilih dan tebal.

Tabel 2 SIFAT LUAS YANG DAPAT DIMANFAATKAN

| LUAS DAN MOMEN LEMBAM LUAS TERHADAP SUMBU TITIK BERAT   |  |  |
|---|--|--|
| <b>SEGIEMPAT</b><br> $A = bh$ $I_o = bh^3/12$                                    | <b>LINGKARAN</b><br> $A = \pi R^2$ $I_o = I_p/2 = \pi R^4/4$                          |  |
| <b>SEGITIGA</b><br> $A = bh/2$ $I_o = bh^3/36$                                   | <b>SETENGAH LINGKARAN</b><br> $A = \pi R^2/2$ $I_o = 0.110R^4$                        |  |
| <b>TABUNG TIPIS</b><br> $A = 2\pi R_{avg}t$ $I_o = I_p/2 \approx \pi R_{avg}^3t$ | <b>SETENGAH TABUNG TIPIS</b><br> $A = \pi R_{avg}t$ $I_o \approx 0.095\pi R_{avg}^3t$ |  |
| LUAS DAN TITIK BERAT LUAS   |  |  |
| <b>SEGITIGA</b><br>Titik berat<br> $A = bh/2$                                  | <b>SEGITIGA</b><br> $A = hL/2$  | <b>PARABOLA</b><br>Puncak<br> $A = \frac{2}{3}bh$   |
| <b>PARABOLA: y = -ax^2</b><br>Puncak<br> $A = bh/3$                            | <b>PARABOLA</b><br>Puncak<br> $A = bh/(n+1)$  | <b>PARABOLA</b><br>Puncak<br> <p>Luas segmen parabola adalah <math>A = \frac{2}{3}hl</math></p> |

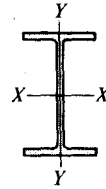


**Tabel 3** BALOK BAJA STANDAR AMERIKA, BENTUK S,  
SIFAT UNTUK DISAIN

| Penandaan*          | Luas            | Kedalaman | Flens |       | Tebal Web | Sumbu X-X                        |                                  |      | Sumbu Y-Y                        |                                  |      |
|---------------------|-----------------|-----------|-------|-------|-----------|----------------------------------|----------------------------------|------|----------------------------------|----------------------------------|------|
|                     |                 |           | Lebar | Tebal |           | $I$                              | $\frac{I}{c}$                    | $r$  | $I$                              | $\frac{I}{c}$                    | $r$  |
|                     | mm <sup>2</sup> | d, mm     | mm    | mm    |           | $\times 10^6$<br>mm <sup>4</sup> | $\times 10^3$<br>mm <sup>3</sup> | mm   | $\times 10^6$<br>mm <sup>4</sup> | $\times 10^3$<br>mm <sup>3</sup> | mm   |
| S 610 $\times$ 179  | 22 770          | 610       | 204   | 28,0  | 20,3      | 1260                             | 4140                             | 235  | 35,0                             | 343                              | 39,2 |
| $\times$ 157,6      | 20 060          | 610       | 200   | 28,0  | 15,9      | 1180                             | 3860                             | 242  | 32,5                             | 325                              | 40,3 |
| $\times$ 149        | 18 970          | 610       | 184   | 22,1  | 19,0      | 995                              | 3260                             | 229  | 19,9                             | 216                              | 32,4 |
| $\times$ 134        | 17 100          | 610       | 181   | 22,1  | 15,8      | 937                              | 3070                             | 234  | 18,7                             | 207                              | 33,1 |
| $\times$ 118,9      | 15 160          | 610       | 178   | 22,1  | 12,7      | 878                              | 2880                             | 241  | 17,6                             | 198                              | 34,1 |
| S 510 $\times$ 141  | 18 000          | 508       | 183   | 23,3  | 20,3      | 670                              | 2640                             | 193  | 20,7                             | 226                              | 33,9 |
| $\times$ 127        | 16 130          | 508       | 179   | 23,3  | 16,6      | 633                              | 2490                             | 198  | 19,2                             | 215                              | 34,5 |
| $\times$ 112        | 14 260          | 508       | 162   | 20,1  | 16,3      | 533                              | 2100                             | 193  | 12,3                             | 152                              | 29,4 |
| $\times$ 97,3       | 12 390          | 508       | 159   | 20,1  | 12,7      | 491                              | 1930                             | 199  | 11,4                             | 144                              | 30,3 |
| S 460 $\times$ 104  | 13 290          | 457       | 159   | 17,6  | 18,1      | 385                              | 1690                             | 170  | 10,0                             | 126                              | 27,5 |
| $\times$ 81,4       | 10 390          | 457       | 152   | 17,6  | 11,7      | 335                              | 1460                             | 179  | 8,66                             | 114                              | 28,9 |
| S 380 $\times$ 74   | 9 480           | 381       | 143   | 15,8  | 14,0      | 202                              | 1060                             | 146  | 6,53                             | 91,2                             | 26,3 |
| $\times$ 64         | 8 130           | 381       | 140   | 15,8  | 10,4      | 186                              | 977                              | 151  | 5,99                             | 85,8                             | 27,2 |
| S 310 $\times$ 74   | 9 480           | 305       | 139   | 16,8  | 17,4      | 127                              | 833                              | 116  | 6,53                             | 94,0                             | 26,3 |
| $\times$ 60,7       | 7 740           | 305       | 133   | 16,8  | 11,7      | 113                              | 743                              | 121  | 5,66                             | 84,9                             | 27,0 |
| $\times$ 52         | 6 640           | 305       | 129   | 13,8  | 10,9      | 95,3                             | 625                              | 120  | 4,11                             | 63,7                             | 24,9 |
| $\times$ 47,3       | 6 032           | 305       | 127   | 13,8  | 8,9       | 90,7                             | 595                              | 123  | 3,90                             | 61,4                             | 25,4 |
| S 250 $\times$ 52   | 6 640           | 254       | 126   | 12,5  | 15,1      | 61,2                             | 482                              | 96,0 | 3,48                             | 55,4                             | 22,9 |
| $\times$ 37,8       | 4 806           | 254       | 118   | 12,5  | 7,9       | 51,6                             | 406                              | 104  | 2,83                             | 47,7                             | 24,2 |
| S 200 $\times$ 34   | 4 368           | 203       | 106   | 10,8  | 11,2      | 27,0                             | 266                              | 78,6 | 1,79                             | 33,9                             | 20,3 |
| $\times$ 27,4       | 3 484           | 203       | 102   | 10,8  | 6,9       | 24,0                             | 236                              | 82,9 | 1,55                             | 30,6                             | 21,1 |
| S 180 $\times$ 30   | 3 794           | 178       | 97    | 10,0  | 11,4      | 17,7                             | 199                              | 68,2 | 1,32                             | 26,9                             | 18,7 |
| $\times$ 22,8       | 2 890           | 178       | 92    | 10,0  | 6,4       | 15,3                             | 172                              | 72,5 | 1,10                             | 23,6                             | 19,5 |
| S 150 $\times$ 25,7 | 3 271           | 152       | 90    | 9,1   | 11,8      | 11,0                             | 144                              | 57,9 | 0,961                            | 21,2                             | 17,1 |
| $\times$ 18,6       | 2 362           | 152       | 84    | 9,1   | 5,8       | 9,20                             | 121                              | 62,3 | 0,758                            | 17,9                             | 17,9 |
| S 130 $\times$ 22,0 | 2 800           | 127       | 83    | 8,3   | 12,5      | 6,33                             | 99,6                             | 47,5 | 0,695                            | 16,7                             | 15,8 |
| $\times$ 15         | 1 884           | 127       | 76    | 8,3   | 5,3       | 5,12                             | 80,6                             | 52,0 | 0,508                            | 13,3                             | 16,4 |
| S 100 $\times$ 14,1 | 1 800           | 102       | 70    | 7,4   | 8,3       | 2,83                             | 55,6                             | 39,6 | 0,376                            | 10,6                             | 14,5 |
| $\times$ 11,5       | 1 452           | 102       | 67    | 7,4   | 4,8       | 2,53                             | 49,8                             | 41,7 | 0,318                            | 9,40                             | 14,8 |
| S 75 $\times$ 11,2  | 1 426           | 76        | 63    | 6,6   | 8,9       | 1,22                             | 32,0                             | 29,2 | 0,244                            | 7,66                             | 13,1 |
| $\times$ 8,5        | 1 077           | 76        | 59    | 6,6   | 4,3       | 1,05                             | 27,5                             | 31,2 | 0,189                            | 6,40                             | 13,3 |

\* Balok Bentuk-I Standar Amerika dipandang sebagai bentuk-S dan ditulis dengan huruf S yang disusul dengan kedalaman dalam milimeter dan massa adalah kilogram per meter linier. Umpamanya, S 610  $\times$  179 berarti ini adalah bentuk S dengan kedalaman 610 mm dan massa 179 kg/m. Harga-harga ini merupakan konversi kira-kira dari yang terdapat dalam tabel-tabel AISC ke dalam satuan SI.





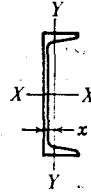
**Tabel 4** BALOK BAJA FLENS LEBAR AMERIKA, BENTUK W, SIFAT UNTUK DISAIN

| Penandaan   | Luas            | Kedalaman | Flens |       | Tebal Badan | Sumbu X-X                        |                                  |     | Sumbu Y-Y                        |                                  |      |
|-------------|-----------------|-----------|-------|-------|-------------|----------------------------------|----------------------------------|-----|----------------------------------|----------------------------------|------|
|             |                 |           | Lebar | Tebal |             | $I$                              | $\frac{I}{c}$                    | $r$ | $I$                              | $\frac{I}{c}$                    | $r$  |
|             | mm <sup>2</sup> | d, mm     | mm    | mm    | mm          | $\times 10^6$<br>mm <sup>4</sup> | $\times 10^3$<br>mm <sup>3</sup> | mm  | $\times 10^6$<br>mm <sup>4</sup> | $\times 10^3$<br>mm <sup>3</sup> | mm   |
| W 920 × 342 | 43 680          | 911       | 418   | 32,0  | 19,3        | 6240                             | 13 700                           | 378 | 391                              | 1870                             | 94,6 |
| × 223       | 28 520          | 910       | 304   | 23,9  | 15,9        | 3760                             | 8 260                            | 363 | 112                              | 739                              | 62,8 |
| W 840 × 298 | 38 000          | 838       | 400   | 29,2  | 18,2        | 4620                             | 11 000                           | 349 | 312                              | 1560                             | 90,6 |
| × 193       | 24 710          | 841       | 292   | 21,7  | 14,7        | 2790                             | 6 640                            | 336 | 90,7                             | 621                              | 60,6 |
| W 760 × 256 | 32 710          | 759       | 381   | 27,1  | 16,6        | 3290                             | 8 680                            | 317 | 249                              | 1310                             | 87,2 |
| × 161       | 20 520          | 757       | 266   | 19,3  | 13,9        | 1860                             | 4 910                            | 301 | 60,8                             | 456                              | 54,4 |
| W 690 × 216 | 27 550          | 683       | 355   | 24,8  | 15,2        | 2260                             | 6 620                            | 286 | 184                              | 1040                             | 81,8 |
| × 140       | 17 870          | 684       | 254   | 19,0  | 12,4        | 1360                             | 3 980                            | 276 | 51,6                             | 407                              | 53,7 |
| W 610 × 193 | 24 710          | 616       | 356   | 22,9  | 14,4        | 1670                             | 5 430                            | 260 | 172                              | 965                              | 83,3 |
| × 149       | 19 030          | 610       | 305   | 19,7  | 11,9        | 1250                             | 4 100                            | 256 | 92,8                             | 609                              | 69,8 |
| × 113       | 14 450          | 607       | 228   | 17,3  | 11,2        | 874                              | 2 880                            | 246 | 34,4                             | 301                              | 48,8 |
| W 530 × 167 | 21 290          | 533       | 330   | 22,0  | 13,4        | 1090                             | 4 090                            | 226 | 132                              | 799                              | 78,7 |
| × 122       | 15 610          | 530       | 228   | 20,2  | 12,7        | 733                              | 2 770                            | 217 | 39,8                             | 350                              | 50,5 |
| × 92        | 11 810          | 533       | 209   | 15,6  | 10,2        | 554                              | 2 080                            | 217 | 23,9                             | 229                              | 45,0 |
| × 82        | 10 450          | 528       | 209   | 13,3  | 9,5         | 475                              | 1 800                            | 213 | 20,1                             | 193                              | 43,9 |
| W 460 × 143 | 18 190          | 461       | 298   | 21,1  | 13,0        | 699                              | 3 030                            | 196 | 93,7                             | 628                              | 71,7 |
| × 95        | 12 190          | 454       | 221   | 17,4  | 10,2        | 437                              | 1 930                            | 189 | 31,6                             | 285                              | 50,9 |
| × 82        | 10 450          | 460       | 191   | 16,0  | 9,9         | 371                              | 1 610                            | 188 | 18,7                             | 196                              | 42,3 |
| × 74        | 9 480           | 457       | 191   | 14,5  | 9,1         | 334                              | 1 460                            | 188 | 16,7                             | 176                              | 42,0 |
| × 67        | 8 520           | 454       | 190   | 12,7  | 8,5         | 294                              | 1 300                            | 186 | 14,5                             | 153                              | 41,2 |
| × 52        | 6 640           | 450       | 152   | 10,9  | 7,6         | 214                              | 949                              | 179 | 6,45                             | 84,7                             | 31,2 |
| W 410 × 143 | 18 190          | 415       | 293   | 22,2  | 13,6        | 566                              | 2 730                            | 176 | 93,2                             | 637                              | 71,6 |
| × 131       | 16 710          | 410       | 292   | 20,2  | 12,8        | 508                              | 2 470                            | 174 | 84,1                             | 576                              | 70,9 |
| × 80        | 11 030          | 403       | 215   | 16,4  | 10,3        | 311                              | 1 550                            | 168 | 27,2                             | 253                              | 49,6 |
| × 74        | 9 480           | 413       | 180   | 16,0  | 9,7         | 273                              | 1 330                            | 170 | 15,4                             | 172                              | 40,4 |
| × 54        | 6 840           | 403       | 178   | 10,9  | 7,6         | 186                              | 924                              | 165 | 10,2                             | 114                              | 38,5 |
| × 39        | 4 950           | 398       | 140   | 8,8   | 6,4         | 125                              | 628                              | 159 | 3,99                             | 57,2                             | 28,4 |
| W 360 × 476 | 60 710          | 427       | 424   | 53,2  | 48,0        | 1720                             | 8 070                            | 168 | 683                              | 3220                             | 106  |
| × 202       | 25 580          | 375       | 374   | 27,0  | 16,8        | 662                              | 3 530                            | 160 | 236                              | 1260                             | 95,7 |
| × 130       | 16 520          | 356       | 268   | 17,5  | 10,7        | 403                              | 2 260                            | 156 | 146                              | 791                              | 93,9 |
| × 125       | 15 940          | 360       | 305   | 19,8  | 11,5        | 386                              | 2 140                            | 156 | 93,7                             | 613                              | 76,7 |
| × 116       | 14 770          | 357       | 305   | 18,2  | 10,9        | 354                              | 1 980                            | 155 | 86,2                             | 565                              | 76,4 |

\* Balok baja bentuk-I atau H flens lebar Amerika dipandang sebagai bentuk-W dan ditulis dengan huruf W disusul dengan kedalaman *nominal* dalam milimeter dan massa dalam kilogram per meter linier dari yang bersangkutan. Umpamanya, W 530 × 167 berarti bahwa ini adalah bentuk-W yang kedalamannya adalah 530 mm dan massanya 167 kg/m. Harga-harga ini merupakan konversi kira-kira dari yang terdapat dalam tabel-tabel AISC ke dalam satuan SI.

Tabel 4 (Sambungan)

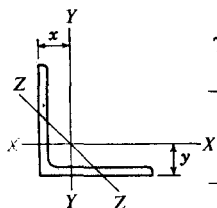
| Penandaan   | Luas            | Kedalaman | Flens |       | Tebal Badan | Sumbu X-X                        |                                  |      | Sumbu Y-Y                        |                                  |      |
|-------------|-----------------|-----------|-------|-------|-------------|----------------------------------|----------------------------------|------|----------------------------------|----------------------------------|------|
|             |                 |           | Lebar | Tebal |             | $I$                              | $\frac{I}{c}$                    | $r$  | $I$                              | $\frac{I}{c}$                    | $r$  |
|             | mm <sup>2</sup> | d, mm     | mm    | mm    | mm          | $\times 10^6$<br>mm <sup>4</sup> | $\times 10^3$<br>mm <sup>3</sup> | mm   | $\times 10^6$<br>mm <sup>4</sup> | $\times 10^3$<br>mm <sup>3</sup> | mm   |
| W 360 × 110 | 14 060          | 360       | 256   | 19,9  | 11,4        | 332                              | 1840                             | 154  | 55,4                             | 433                              | 62,7 |
| × 101       | 12 900          | 357       | 255   | 18,2  | 10,6        | 301                              | 1690                             | 153  | 50,4                             | 395                              | 62,5 |
| × 91        | 11 550          | 353       | 254   | 16,3  | 9,6         | 267                              | 1510                             | 152  | 44,5                             | 351                              | 62,1 |
| × 79        | 10 060          | 354       | 205   | 16,7  | 9,4         | 226                              | 1270                             | 150  | 23,9                             | 234                              | 48,8 |
| × 64        | 8 130           | 347       | 203   | 13,4  | 7,8         | 179                              | 1030                             | 148  | 18,8                             | 185                              | 48,1 |
| × 57        | 7 230           | 359       | 172   | 13,0  | 8,0         | 161                              | 896                              | 149  | 11,1                             | 129                              | 39,1 |
| × 51        | 6 450           | 356       | 171   | 11,5  | 7,3         | 142                              | 796                              | 148  | 9,70                             | 113                              | 38,8 |
| × 45        | 5 700           | 352       | 171   | 9,7   | 6,9         | 121                              | 686                              | 146  | 8,12                             | 94,9                             | 37,8 |
| W 310 × 126 | 16 130          | 317       | 307   | 20,2  | 12,6        | 301                              | 1900                             | 137  | 97,8                             | 636                              | 77,9 |
| × 97        | 12 320          | 308       | 305   | 15,4  | 9,9         | 222                              | 1440                             | 134  | 72,8                             | 478                              | 76,9 |
| × 79        | 10 060          | 306       | 254   | 14,6  | 8,8         | 177                              | 1160                             | 133  | 40,0                             | 315                              | 63,0 |
| × 60        | 7 610           | 303       | 203   | 13,1  | 7,5         | 129                              | 851                              | 130  | 18,4                             | 181                              | 49,1 |
| × 54        | 6 840           | 311       | 167   | 13,7  | 7,7         | 117                              | 752                              | 131  | 10,6                             | 127                              | 39,4 |
| × 46        | 5 890           | 307       | 166   | 11,8  | 6,7         | 99,5                             | 648                              | 130  | 8,99                             | 108                              | 39,1 |
| × 40        | 5 129           | 304       | 165   | 10,2  | 6,0         | 84,9                             | 559                              | 129  | 7,62                             | 92,3                             | 38,5 |
| W 250 × 167 | 21 230          | 289       | 265   | 31,7  | 19,2        | 299                              | 2070                             | 119  | 97,8                             | 740                              | 67,9 |
| × 149       | 18 970          | 282       | 263   | 28,4  | 17,4        | 260                              | 1840                             | 117  | 86,2                             | 656                              | 67,4 |
| × 132       | 16 900          | 276       | 261   | 25,3  | 15,6        | 226                              | 1630                             | 116  | 75,3                             | 577                              | 66,8 |
| × 115       | 14 640          | 270       | 259   | 22,0  | 13,6        | 190                              | 1410                             | 114  | 63,7                             | 492                              | 65,9 |
| × 89        | 11 420          | 260       | 256   | 17,3  | 10,5        | 143                              | 1100                             | 112  | 48,3                             | 377                              | 65,3 |
| × 73        | 9 290           | 254       | 254   | 14,2  | 8,6         | 114                              | 895                              | 110  | 38,7                             | 305                              | 64,5 |
| × 67        | 8 520           | 257       | 204   | 15,7  | 8,9         | 104                              | 806                              | 110  | 22,1                             | 217                              | 51,0 |
| × 58        | 7 420           | 252       | 203   | 13,4  | 8,1         | 87,4                             | 692                              | 109  | 18,7                             | 184                              | 50,2 |
| × 49        | 6 265           | 248       | 202   | 11,0  | 7,4         | 71,2                             | 575                              | 107  | 15,2                             | 150                              | 49,2 |
| × 43        | 5 510           | 260       | 147   | 12,7  | 7,3         | 65,8                             | 507                              | 109  | 6,78                             | 92,1                             | 35,1 |
| × 31        | 4 000           | 251       | 146   | 8,6   | 6,1         | 44,5                             | 354                              | 106  | 4,50                             | 61,6                             | 33,5 |
| W 200 × 100 | 12 710          | 229       | 210   | 23,7  | 14,6        | 113                              | 991                              | 94,4 | 36,9                             | 350                              | 53,9 |
| × 86        | 11 030          | 222       | 209   | 20,5  | 13,0        | 94,5                             | 850                              | 92,5 | 31,2                             | 299                              | 53,2 |
| × 71        | 9 100           | 216       | 206   | 17,3  | 10,3        | 76,6                             | 709                              | 91,8 | 25,3                             | 246                              | 52,8 |
| × 60        | 7 610           | 210       | 205   | 14,2  | 9,3         | 60,8                             | 580                              | 89,3 | 20,4                             | 199                              | 51,8 |
| × 52        | 6 640           | 206       | 204   | 12,5  | 8,0         | 52,4                             | 509                              | 88,8 | 17,7                             | 174                              | 51,6 |
| × 46        | 5 884           | 203       | 203   | 11,0  | 7,3         | 45,8                             | 451                              | 88,2 | 15,4                             | 152                              | 51,2 |
| × 42        | 5 310           | 205       | 166   | 11,8  | 7,2         | 40,7                             | 398                              | 87,6 | 8,99                             | 108                              | 41,1 |
| × 36        | 4 555           | 201       | 165   | 10,1  | 6,2         | 34,3                             | 341                              | 86,8 | 7,58                             | 91,8                             | 40,8 |
| × 30        | 3 800           | 207       | 134   | 9,6   | 6,3         | 28,9                             | 279                              | 87,2 | 3,84                             | 57,4                             | 31,8 |
| × 25        | 3 232           | 203       | 133   | 7,8   | 5,8         | 23,6                             | 232                              | 85,4 | 3,10                             | 46,4                             | 31,0 |



**Tabel 5 KANAL BAJA STANDAR AMERIKA,  
SIFAT UNTUK DISAIN**

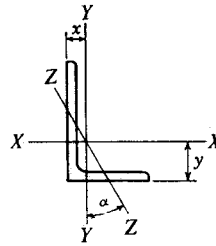
| Penandaan*   | Kedala-<br>man<br><br>Luas |                    | Flens |       | Tebal<br>Web | Sumbu X-X                        |                                  |      | Sumbu Y-Y                        |                                  |      |      |
|--------------|----------------------------|--------------------|-------|-------|--------------|----------------------------------|----------------------------------|------|----------------------------------|----------------------------------|------|------|
|              |                            |                    | Lebar | Tebal |              | $I$                              | $\frac{I}{c}$                    | $r$  | $I$                              | $\frac{I}{c}$                    | $r$  | $x$  |
|              | mm <sup>2</sup>            | d, mm <sup>2</sup> | mm    | mm    | mm           | $\times 10^6$<br>mm <sup>4</sup> | $\times 10^3$<br>mm <sup>3</sup> | mm   | $\times 10^6$<br>mm <sup>4</sup> | $\times 10^3$<br>mm <sup>3</sup> | mm   | mm   |
| C 380 × 74   | 9480                       | 381                | 94    | 16,5  | 18,2         | 168                              | 883                              | 133  | 4,58                             | 97,0                             | 22,0 | 20,3 |
| × 60         | 7610                       | 381                | 89    | 16,5  | 13,2         | 145                              | 763                              | 138  | 3,84                             | 85,9                             | 22,5 | 19,8 |
| × 50,4       | 6426                       | 381                | 86    | 16,5  | 10,2         | 131                              | 688                              | 143  | 3,38                             | 78,4                             | 23,0 | 20,0 |
| C 310 × 45   | 5690                       | 305                | 80    | 12,7  | 13,0         | 67,4                             | 442                              | 109  | 2,14                             | 53,1                             | 19,4 | 17,1 |
| × 37         | 4742                       | 305                | 77    | 12,7  | 9,8          | 59,9                             | 393                              | 112  | 1,86                             | 48,1                             | 19,8 | 17,1 |
| × 30,8       | 3929                       | 305                | 74    | 12,7  | 7,2          | 53,7                             | 352                              | 117  | 1,61                             | 43,2                             | 20,3 | 17,7 |
| C 250 × 45   | 5690                       | 254                | 76    | 11,1  | 17,1         | 42,9                             | 338                              | 86,8 | 1,64                             | 42,6                             | 17,0 | 16,5 |
| × 37         | 4742                       | 254                | 73    | 11,1  | 13,4         | 38,0                             | 299                              | 89,5 | 1,40                             | 38,2                             | 17,2 | 15,7 |
| × 30         | 3794                       | 254                | 69    | 11,1  | 9,6          | 32,8                             | 259                              | 93,0 | 1,17                             | 33,6                             | 17,6 | 15,4 |
| × 22,8       | 2897                       | 254                | 65    | 11,1  | 6,1          | 28,1                             | 221                              | 98,4 | 0,949                            | 28,7                             | 18,1 | 16,1 |
| C 230 × 30   | 3794                       | 229                | 67    | 10,5  | 11,4         | 25,3                             | 222                              | 81,7 | 1,01                             | 30,0                             | 16,3 | 14,8 |
| × 22         | 2845                       | 229                | 63    | 10,5  | 7,2          | 21,2                             | 186                              | 86,4 | 0,803                            | 25,5                             | 16,8 | 14,9 |
| × 19,9       | 2542                       | 229                | 61    | 10,5  | 5,9          | 19,9                             | 174                              | 88,6 | 0,733                            | 23,7                             | 17,0 | 15,3 |
| C 200 × 27,9 | 3555                       | 203                | 64    | 9,9   | 12,4         | 18,3                             | 180                              | 71,8 | 0,824                            | 25,7                             | 15,2 | 14,4 |
| × 20,5       | 2606                       | 203                | 59    | 9,9   | 7,7          | 15,0                             | 148                              | 75,9 | 0,637                            | 21,4                             | 15,6 | 14,0 |
| × 17,1       | 2181                       | 203                | 57    | 9,9   | 5,6          | 13,6                             | 134                              | 78,9 | 0,549                            | 19,1                             | 15,9 | 14,5 |
| C 180 × 22,0 | 2794                       | 178                | 58    | 9,3   | 10,6         | 11,3                             | 127                              | 63,7 | 0,574                            | 19,7                             | 14,3 | 13,5 |
| × 18,2       | 2323                       | 178                | 55    | 9,3   | 8,0          | 10,1                             | 113                              | 65,9 | 0,487                            | 17,5                             | 14,5 | 13,3 |
| × 14,6       | 1852                       | 178                | 53    | 9,3   | 5,3          | 8,87                             | 99,7                             | 69,2 | 0,403                            | 15,2                             | 14,8 | 13,7 |
| C 150 × 19,3 | 2471                       | 152                | 54    | 8,7   | 11,1         | 7,24                             | 95,0                             | 54,1 | 0,437                            | 16,0                             | 13,3 | 13,1 |
| × 15,6       | 1994                       | 152                | 51    | 8,7   | 8,0          | 6,33                             | 83,0                             | 56,3 | 0,360                            | 13,9                             | 13,4 | 12,7 |
| × 12,2       | 1548                       | 152                | 48    | 8,7   | 5,1          | 5,45                             | 71,6                             | 59,3 | 0,288                            | 11,8                             | 13,6 | 13,0 |
| C 130 × 13,4 | 1703                       | 127                | 47    | 8,1   | 8,3          | 3,70                             | 58,3                             | 46,6 | 0,263                            | 11,0                             | 12,4 | 12,1 |
| × 10,0       | 1271                       | 127                | 44    | 8,1   | 4,8          | 3,12                             | 49,1                             | 49,5 | 0,199                            | 8,95                             | 12,5 | 12,3 |
| C 100 × 10,8 | 1374                       | 102                | 43    | 7,5   | 8,2          | 1,91                             | 37,6                             | 37,3 | 0,180                            | 8,23                             | 11,4 | 11,7 |
| × 8,0        | 1026                       | 102                | 40    | 7,5   | 4,7          | 1,60                             | 31,5                             | 39,5 | 0,133                            | 6,60                             | 11,4 | 11,6 |
| C 75 × 8,9   | 1135                       | 76                 | 40    | 6,9   | 9,0          | 0,862                            | 22,6                             | 27,5 | 0,127                            | 6,26                             | 10,6 | 11,6 |
| × 7,4        | 948                        | 76                 | 37    | 6,9   | 6,6          | 0,770                            | 20,2                             | 28,5 | 0,103                            | 5,40                             | 10,4 | 11,1 |
| × 6,1        | 781                        | 76                 | 35    | 6,9   | 4,3          | 0,691                            | 18,1                             | 29,8 | 0,082                            | 4,58                             | 10,2 | 11,1 |

\* Kanal Baja Standar Amerika ditulis dengan huruf C disusul oleh kedalamannya dalam milimeter, dengan massa dalam kilogram per meter linier dibelakangnya. Umpamanya C 380 × 74 berarti bahwa kanal ini kedalamannya 380 mm dan massanya 74 kg/m. Harga-harga ini merupakan konversi rata-rata dari yang terdapat dalam Tabel AISC ke dalam satuan SI.



**Tabel 6 SIKU BAJA DENGAN KAKI SAMA,**  
SIFAT UNTUK DISAIN \*Daftar ini disingkat.

| Ukuran dan<br>Tebal | Massa per<br>Meter | Luas            | Sumbu-sumbu X-X dan Y-Y          |                                  |      |              | Axis Z-Z |
|---------------------|--------------------|-----------------|----------------------------------|----------------------------------|------|--------------|----------|
|                     |                    |                 | $I$                              | $\frac{I}{c}$                    | $r$  | $x$ atau $y$ | $r$      |
| mm                  | kg                 | mm <sup>2</sup> | $\times 10^6$<br>mm <sup>4</sup> | $\times 10^3$<br>mm <sup>3</sup> | mm   | mm           | mm       |
| L 203 × 203 × 28,6  | 84,7               | 10 770          | 40,8                             | 287                              | 61,5 | 61,2         | 39,6     |
| × 25,4              | 75,9               | 9 680           | 37,0                             | 259                              | 61,9 | 60,2         | 39,6     |
| × 22,2              | 67,0               | 8 520           | 33,1                             | 230                              | 62,4 | 58,9         | 39,9     |
| × 19,0              | 57,9               | 7 360           | 29,0                             | 200                              | 62,8 | 57,9         | 40,1     |
| × 15,9              | 48,7               | 6 200           | 24,7                             | 169                              | 63,1 | 56,6         | 40,1     |
| × 14,3              | 44,0               | 5 600           | 22,5                             | 153                              | 63,4 | 56,1         | 40,4     |
| × 12,7              | 39,3               | 5 000           | 20,2                             | 137                              | 63,6 | 55,6         | 40,4     |
| L 152 × 152 × 25,4  | 55,7               | 7 100           | 14,8                             | 141                              | 45,6 | 47,2         | 29,7     |
| × 22,2              | 49,3               | 6 277           | 13,3                             | 125                              | 46,0 | 46,2         | 29,7     |
| × 19,0              | 42,7               | 5 445           | 11,7                             | 110                              | 46,4 | 45,2         | 29,7     |
| × 15,9              | 36,0               | 4 587           | 10,1                             | 92,9                             | 46,9 | 43,9         | 30,0     |
| × 14,3              | 32,6               | 4 148           | 9,20                             | 84,4                             | 47,1 | 43,4         | 30,0     |
| × 12,7              | 29,2               | 3 710           | 8,28                             | 75,5                             | 47,3 | 42,7         | 30,0     |
| × 11,1              | 25,6               | 3 265           | 7,37                             | 66,8                             | 47,5 | 42,2         | 30,2     |
| × 9,5               | 22,2               | 2 813           | 6,41                             | 57,9                             | 47,7 | 41,7         | 30,6     |
| × 7,9               | 18,5               | 2 355           | 5,41                             | 48,6                             | 47,9 | 41,1         | 30,5     |
| L 127 × 127 × 22,2  | 40,5               | 5 148           | 7,41                             | 85,0                             | 37,9 | 39,9         | 24,7     |
| × 19,0              | 35,1               | 4 477           | 6,53                             | 73,9                             | 38,2 | 38,6         | 24,8     |
| × 15,9              | 29,8               | 3 781           | 5,66                             | 63,3                             | 38,7 | 37,6         | 24,8     |
| × 12,7              | 24,1               | 3 065           | 4,70                             | 51,9                             | 39,2 | 36,3         | 25,0     |
| × 11,1              | 21,3               | 2 697           | 4,16                             | 45,6                             | 39,3 | 35,8         | 25,0     |
| × 9,5               | 18,3               | 2 329           | 3,64                             | 39,7                             | 39,5 | 35,3         | 25,1     |
| × 7,9               | 15,3               | 1 955           | 3,09                             | 33,5                             | 39,7 | 34,8         | 25,2     |
| L 102 × 102 × 19,0  | 27,5               | 3 510           | 3,19                             | 46,0                             | 30,2 | 32,3         | 19,8     |
| × 15,9              | 23,4               | 2 974           | 2,77                             | 39,4                             | 30,5 | 31,2         | 19,8     |
| × 12,7              | 19,0               | 2 419           | 2,31                             | 32,3                             | 30,9 | 30,0         | 19,9     |
| × 11,1              | 16,8               | 2 135           | 2,07                             | 28,7                             | 31,1 | 29,5         | 19,9     |
| × 9,5               | 14,6               | 1 845           | 1,81                             | 25,0                             | 31,4 | 29,0         | 20,0     |
| × 7,9               | 12,2               | 1 548           | 1,54                             | 21,1                             | 31,6 | 28,4         | 20,1     |
| × 6,4               | 9,8                | 1 252           | 1,27                             | 17,1                             | 31,8 | 27,7         | 20,2     |
| L 89 × 89 × 12,7    | 16,5               | 2 097           | 1,52                             | 24,4                             | 26,9 | 26,9         | 17,3     |
| × 11,1              | 14,6               | 1 852           | 1,36                             | 21,7                             | 27,1 | 26,4         | 17,4     |
| × 9,5               | 12,6               | 1 600           | 1,19                             | 18,9                             | 27,3 | 25,7         | 17,4     |
| × 7,9               | 10,7               | 1 348           | 1,02                             | 16,0                             | 27,5 | 25,1         | 17,5     |
| × 6,4               | 8,6                | 1 090           | ,837                             | 13,0                             | 27,7 | 24,6         | 17,6     |
| L 76 × 76 × 12,7    | 14,0               | 1 774           | ,924                             | 17,6                             | 22,8 | 23,7         | 14,8     |
| × 11,1              | 12,4               | 1 568           | ,828                             | 15,6                             | 23,0 | 23,1         | 14,9     |
| × 9,5               | 10,7               | 1 361           | ,733                             | 13,7                             | 23,2 | 22,6         | 14,9     |
| × 7,9               | 9,1                | 1 148           | ,629                             | 11,6                             | 23,4 | 22,1         | 15,0     |
| × 6,4               | 7,3                | 929             | ,516                             | 9,42                             | 23,6 | 21,4         | 15,0     |
| × 4,8               | 5,5                | 703             | ,400                             | 7,23                             | 23,9 | 20,8         | 15,1     |
| L 64 × 64 × 12,7    | 11,4               | 1 452           | ,512                             | 11,9                             | 18,8 | 20,5         | 12,4     |
| × 9,5               | 8,7                | 1 116           | ,410                             | 9,28                             | 19,2 | 19,4         | 12,4     |
| × 7,9               | 7,4                | 942             | ,353                             | 7,90                             | 19,4 | 18,8         | 12,4     |
| × 6,4               | 6,1                | 768             | ,293                             | 6,46                             | 19,5 | 18,2         | 12,5     |
| × 4,8               | 4,6                | 581             | ,228                             | 4,96                             | 19,8 | 17,6         | 12,6     |



**Tabel 7 SIKU BAJA DENGAN KAKI TAK SAMA,**  
SIFAT UNTUK DISAIN \*Daftar ini disingkat.

| Ukuran dan Tebal   | Massa<br>per<br>Meter | Luas | Sumbu X-X                        |                                  |      |      | Sumbu Y-Y                        |                                  |      |      | Sumbu Z-Z |               |
|--------------------|-----------------------|------|----------------------------------|----------------------------------|------|------|----------------------------------|----------------------------------|------|------|-----------|---------------|
|                    |                       |      | $I$                              | $\frac{I}{c}$                    | $r$  | $y$  | $I$                              | $\frac{I}{c}$                    | $r$  | $x$  | $r$       | $\tan \alpha$ |
|                    |                       |      | $\times 10^6$<br>mm <sup>4</sup> | $\times 10^3$<br>mm <sup>3</sup> | mm   | mm   | $\times 10^6$<br>mm <sup>4</sup> | $\times 10^3$<br>mm <sup>3</sup> | mm   | mm   | mm        |               |
| L 203 × 152 × 25,4 | 65,5                  | 8390 | 33,6                             | 247                              | 63,3 | 67,3 | 16,1                             | 146                              | 43,9 | 41,9 | 32,5      | ,543          |
| × 19,0             | 50,1                  | 6413 | 26,4                             | 191                              | 64,1 | 65,0 | 12,8                             | 113                              | 44,6 | 39,6 | 32,8      | ,551          |
| × 12,7             | 34,1                  | 4355 | 18,4                             | 131                              | 65,1 | 62,7 | 9,03                             | 78,5                             | 45,5 | 37,3 | 33,0      | ,558          |
| L 203 × 102 × 25,4 | 55,4                  | 7100 | 29,0                             | 230                              | 63,9 | 77,5 | 4,83                             | 64,4                             | 26,1 | 26,7 | 21,5      | ,247          |
| × 19,0             | 42,5                  | 5445 | 22,9                             | 178                              | 64,8 | 74,9 | 3,90                             | 50,3                             | 26,8 | 24,2 | 21,6      | ,258          |
| × 12,7             | 29,0                  | 3710 | 16,0                             | 123                              | 65,7 | 72,6 | 2,81                             | 35,2                             | 27,5 | 21,8 | 22,0      | ,267          |
| L 152 × 102 × 19,0 | 35,0                  | 4477 | 10,2                             | 102                              | 47,7 | 52,8 | 3,61                             | 48,7                             | 28,4 | 27,4 | 21,8      | ,428          |
| × 12,7             | 24,0                  | 3065 | 7,24                             | 71,1                             | 48,6 | 50,6 | 2,61                             | 34,1                             | 29,2 | 25,1 | 22,1      | ,440          |
| L 127 × 76 × 12,7  | 19,0                  | 2419 | 3,93                             | 47,7                             | 40,3 | 44,5 | 1,07                             | 18,8                             | 21,1 | 19,1 | 16,5      | ,357          |
| × 9,5              | 14,5                  | 1845 | 3,07                             | 36,6                             | 40,8 | 43,2 | ,849                             | 14,6                             | 21,5 | 17,9 | 16,6      | ,364          |
| × 6,4              | 9,8                   | 1252 | 2,13                             | 25,1                             | 41,2 | 42,2 | ,599                             | 10,1                             | 21,9 | 16,7 | 16,8      | ,371          |
| L 102 × 89 × 12,7  | 17,6                  | 2258 | 2,21                             | 31,7                             | 31,3 | 31,8 | 1,58                             | 24,8                             | 26,4 | 25,4 | 18,3      | ,750          |
| × 9,5              | 13,5                  | 1723 | 1,74                             | 24,6                             | 31,8 | 30,7 | 1,23                             | 19,0                             | 26,7 | 24,3 | 18,5      | ,755          |
| × 6,4              | 9,2                   | 1168 | 1,21                             | 16,8                             | 32,2 | 29,5 | ,870                             | 13,2                             | 27,3 | 23,1 | 18,6      | ,759          |
| L 102 × 76 × 12,7  | 16,4                  | 2097 | 2,10                             | 31,0                             | 31,7 | 33,8 | 1,01                             | 18,6                             | 21,9 | 21,9 | 16,2      | ,543          |
| × 9,5              | 12,6                  | 1600 | 1,65                             | 23,9                             | 32,1 | 32,5 | ,799                             | 14,2                             | 22,3 | 19,9 | 16,4      | ,551          |
| × 6,4              | 8,6                   | 1090 | 1,15                             | 16,4                             | 32,5 | 31,5 | ,566                             | 9,84                             | 22,8 | 18,7 | 16,5      | ,558          |
| L 89 × 64 × 12,7   | 13,9                  | 1774 | 1,35                             | 23,1                             | 27,6 | 30,5 | ,566                             | 12,4                             | 17,9 | 17,9 | 13,6      | ,486          |
| × 11,1             | 12,3                  | 1568 | 1,21                             | 20,6                             | 27,8 | 30,0 | ,512                             | 11,1                             | 18,1 | 17,3 | 13,6      | ,491          |
| × 9,5              | 10,7                  | 1361 | 1,07                             | 17,9                             | 28,0 | 29,5 | ,454                             | 9,71                             | 18,3 | 16,8 | 13,6      | ,496          |
| × 7,9              | 9,0                   | 1148 | ,912                             | 15,2                             | 28,2 | 29,0 | ,391                             | 8,26                             | 18,4 | 16,2 | 13,7      | ,501          |
| × 6,4              | 7,3                   | 929  | ,749                             | 12,3                             | 28,4 | 28,2 | ,323                             | 6,75                             | 18,7 | 15,6 | 13,8      | ,506          |
| L 76 × 64 × 12,7   | 12,6                  | 1613 | ,866                             | 17,0                             | 23,2 | 25,4 | ,541                             | 12,2                             | 18,3 | 19,1 | 13,2      | ,667          |
| × 11,1             | 11,3                  | 1426 | ,783                             | 15,2                             | 23,4 | 24,8 | ,491                             | 10,9                             | 18,6 | 18,5 | 13,2      | ,672          |
| × 9,5              | 9,8                   | 1239 | ,691                             | 13,3                             | 23,6 | 24,3 | ,433                             | 9,50                             | 18,7 | 17,9 | 13,3      | ,676          |
| × 7,9              | 8,3                   | 1045 | ,591                             | 11,3                             | 23,8 | 23,7 | ,374                             | 8,10                             | 18,9 | 17,3 | 13,3      | ,680          |
| × 6,4              | 6,7                   | 845  | ,487                             | 9,18                             | 24,0 | 23,1 | ,309                             | 6,62                             | 19,1 | 16,8 | 13,4      | ,684          |
| × 4,8              | 5,1                   | 643  | ,378                             | 7,04                             | 24,2 | 22,6 | ,240                             | 5,08                             | 19,3 | 16,2 | 13,5      | ,688          |
| L 76 × 51 × 12,7   | 11,5                  | 1452 | ,799                             | 16,4                             | 23,5 | 27,4 | ,280                             | 7,77                             | 13,9 | 14,8 | 10,9      | ,414          |
| × 11,1             | 10,1                  | 1290 | ,720                             | 14,6                             | 23,6 | 26,9 | ,253                             | 6,94                             | 14,0 | 14,2 | 10,9      | ,421          |
| × 9,5              | 8,8                   | 1116 | ,637                             | 12,8                             | 23,9 | 26,4 | ,226                             | 6,09                             | 14,2 | 13,7 | 10,9      | ,428          |
| × 7,9              | 7,4                   | 942  | ,549                             | 10,9                             | 24,2 | 25,9 | ,196                             | 5,19                             | 14,4 | 13,1 | 11,0      | ,435          |
| × 6,4              | 6,1                   | 768  | ,454                             | 8,90                             | 24,3 | 25,2 | ,163                             | 4,26                             | 14,6 | 12,5 | 11,0      | ,440          |
| × 4,8              | 4,6                   | 582  | ,350                             | 6,80                             | 24,5 | 24,6 | ,128                             | 3,29                             | 14,8 | 11,9 | 11,2      | ,446          |
| L 64 × 51 × 9,5    | 7,9                   | 1000 | ,380                             | 8,95                             | 19,5 | 21,1 | ,214                             | 5,94                             | 14,6 | 14,8 | 10,7      | ,614          |
| × 7,9              | 6,7                   | 845  | ,328                             | 7,64                             | 19,7 | 20,5 | ,186                             | 5,07                             | 14,8 | 14,2 | 10,7      | ,620          |
| × 6,4              | 5,4                   | 684  | ,272                             | 6,26                             | 20,0 | 20,0 | ,155                             | 4,17                             | 15,0 | 13,6 | 10,8      | ,626          |
| × 4,8              | 4,2                   | 522  | ,212                             | 4,81                             | 20,1 | 19,4 | ,121                             | 3,21                             | 15,2 | 13,1 | 10,8      | ,631          |

Tabel 8 PIPA BAJA STANDAR

| Ukuran        |                |       | Sifat           |                  |                            |               |       |
|---------------|----------------|-------|-----------------|------------------|----------------------------|---------------|-------|
| Diameter Luar | Diameter Dalam | Tebal | Massa per Meter |                  | $I$                        | $A$           | $r$   |
|               |                |       | Ujung Biasa     | Sekrup & Kopling |                            |               |       |
| mm            | mm             | mm    | kg              | kg               | $\times 10^6 \text{ mm}^4$ | $\text{mm}^2$ | mm    |
| 10,3          | 6,8            | 1,73  | ,36             | ,37              | ,0004                      | 46            | 3,0   |
| 13,7          | 9,2            | 2,24  | ,63             | ,64              | ,0012                      | 81            | 3,9   |
| 17,1          | 12,5           | 2,31  | ,85             | ,85              | ,0029                      | 108           | 5,2   |
| 21,3          | 15,8           | 2,77  | 1,26            | 1,26             | ,0071                      | 161           | 6,6   |
| 26,7          | 20,9           | 2,87  | 1,68            | 1,68             | ,0154                      | 215           | 8,5   |
| 33,4          | 26,6           | 3,38  | 2,50            | 2,50             | ,0362                      | 319           | 10,7  |
| 42,2          | 35,1           | 3,56  | 3,38            | 3,39             | ,0812                      | 432           | 13,7  |
| 48,3          | 40,9           | 3,68  | 4,05            | 4,06             | ,1290                      | 515           | 15,8  |
| 60,3          | 52,5           | 3,91  | 5,43            | 5,48             | ,2772                      | 694           | 20,0  |
| 73,0          | 62,7           | 5,16  | 8,62            | 8,66             | ,6368                      | 1099          | 24,1  |
| 88,9          | 77,9           | 5,49  | 11,28           | 11,34            | 1,256                      | 1437          | 29,6  |
| 101,6         | 90,1           | 5,74  | 13,56           | 13,69            | 1,993                      | 1729          | 34,0  |
| 114,3         | 102,3          | 6,02  | 16,06           | 16,21            | 3,011                      | 2048          | 38,3  |
| 141,3         | 128,2          | 6,55  | 21,76           | 22,04            | 6,310                      | 2774          | 47,7  |
| 168,3         | 154,1          | 7,11  | 28,23           | 28,56            | 11,71                      | 3601          | 57,0  |
| 219,1         | 202,7          | 8,18  | 42,49           | 42,87            | 30,17                      | 5419          | 74,6  |
| 273,1         | 254,5          | 9,27  | 60,24           | 61,21            | 66,89                      | 7684          | 93,3  |
| 323,9         | 304,8          | 9,53  | 73,75           | 75,46            | 116,3                      | 9406          | 111,2 |

Tabel 9 MODUL IRISAN PLASTIS TERHADAP SUMBU X-X

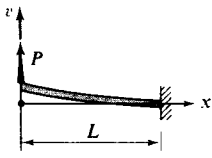
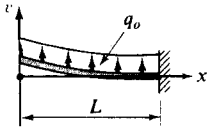
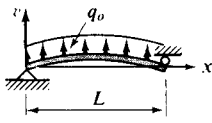
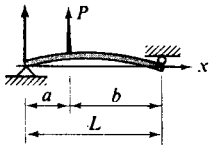
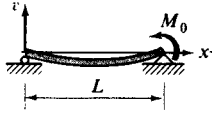
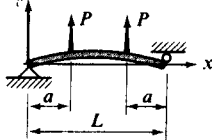
| Bentuk               | Modul Plastis Z<br>$\times 10^3 \text{ mm}^3$ | Bentuk              | Modul Plastis Z<br>$\times 10^3 \text{ mm}^3$ |
|----------------------|---|---------------------|---|
| W 920 $\times$ 342   | 15 500  | W 610 $\times$ 101  | 2880  |
| W 840 $\times$ 329   | 13 700  | W 530 $\times$ 101  | 2620  |
| W 920 $\times$ 289   | 12 600  | W 610 $\times$ 91   | 2490  |
| W 920 $\times$ 271   | 11 800  | W 610 $\times$ 82   | 2200  |
| W 920 $\times$ 253   | 10 900  | W 530 $\times$ 82   | 2060  |
| W 920 $\times$ 238   | 10 200  | W 460 $\times$ 82   | 1840  |
| W 920 $\times$ 223   | 9 520   | W 530 $\times$ 73   | 1770  |
| W 840 $\times$ 210   | 8 420   | W 530 $\times$ 65   | 1560  |
| W 920 $\times$ 201   | 8 360   | W 460 $\times$ 60   | 1280  |
| W 840 $\times$ 193   | 7 650   | W 410 $\times$ 60   | 1190  |
| W 840 $\times$ 176   | 6 800   | W 460 $\times$ 52   | 1090  |
| W 760 $\times$ 173   | 6 190   | S 310 $\times$ 74   | 1000  |
| W 760 $\times$ 161   | 5 670   | W 410 $\times$ 46   | 885   |
| W 760 $\times$ 147   | 5 130   | W 360 $\times$ 39   | 655   |
| W 690 $\times$ 140   | 4 560   | W 360 $\times$ 33   | 542   |
| W 610 $\times$ 140   | 4 150   | S 250 $\times$ 37,8 | 465   |
| W 690 $\times$ 125   | 4 000   | W 200 $\times$ 30   | 313   |
| S 610 $\times$ 134   | 3 640   | W 200 $\times$ 25   | 261   |
| S 610 $\times$ 118,9 | 3 360   | S 180 $\times$ 30   | 238   |

**Tabel 10 UKURAN KAYU STANDAR AMERIKA**  
SIFAT UNTUK DISAIN (Daftar disingkat)

| Ukuran Nominal | Ukuran Pakai Standar Amerika | Luas Irisan     | Massa per Meter | Momen Lembang                     | Modulus Irisan                    | Ukuran Nominal | Ukuran Pakai Standar Amerika | Luas Irisan     | Massa per Meter | Momen Lembang                     | Modulus Irisan                    |
|----------------|------------------------------|-----------------|-----------------|-----------------------------------|-----------------------------------|----------------|------------------------------|-----------------|-----------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| mm             | mm                           | mm <sup>2</sup> | kg              | × 10 <sup>6</sup> mm <sup>4</sup> | × 10 <sup>3</sup> mm <sup>3</sup> | mm             | mm                           | mm <sup>2</sup> | kg              | × 10 <sup>6</sup> mm <sup>4</sup> | × 10 <sup>3</sup> mm <sup>3</sup> |
| 50 × 100       | 38 × 89                      | 3 382           | 2,16            | 2,23                              | 50,2                              | 250 × 250      | 241 × 241                    | 58 080          | 37,2            | 281                               | 2 333                             |
| 150            | 140                          | 5 320           | 3,40            | 8,69                              | 124,1                             | 300            | 292                          | 70 370          | 45,0            | 500                               | 3 425                             |
| 200            | 184                          | 6 992           | 4,47            | 19,7                              | 214                               | 350            | 343                          | 82 660          | 52,9            | 810                               | 4 726                             |
| 250            | 235                          | 8 930           | 5,72            | 41,1                              | 350                               | 400            | 394                          | 94 950          | 60,8            | 1 228                             | 6 235                             |
| 300            | 286                          | 10 870          | 6,96            | 74,1                              | 518                               | 450            | 445                          | 107 200         | 68,6            | 1 770                             | 7 954                             |
| 350            | 337                          | 12 810          | 8,20            | 121                               | 719                               | 500            | 495                          | 119 300         | 76,3            | 2 436                             | 9 842                             |
| 75 × 100       | 63,5 × 89                    | 5 652           | 3,62            | 3,73                              | 83,8                              | 300 × 300      | 292 × 292                    | 85 260          | 54,6            | 606                               | 4 150                             |
| 150            | 140                          | 8 890           | 5,69            | 14,5                              | 207                               | 350            | 343                          | 100 200         | 64,1            | 982                               | 5 726                             |
| 200            | 184                          | 11 680          | 7,48            | 33,0                              | 358                               | 400            | 394                          | 115 000         | 73,6            | 1 488                             | 7 555                             |
| 250            | 235                          | 14 920          | 9,55            | 68,7                              | 584                               | 450            | 445                          | 129 900         | 83,2            | 2 144                             | 9 637                             |
| 300            | 286                          | 18 160          | 11,6            | 124                               | 866                               | 500            | 495                          | 144 500         | 92,5            | 2 951                             | 11 920                            |
| 350            | 337                          | 21 400          | 13,7            | 203                               | 1202                              | 550            | 546                          | 159 400         | 102             | 3 961                             | 14 510                            |
| 400            | 387                          | 24 570          | 15,7            | 307                               | 1585                              | 600            | 597                          | 174 300         | 112             | 5 178                             | 17 350                            |
| 100 × 100      | 89 × 89                      | 7 921           | 5,07            | 5,23                              | 117                               | 350 × 400      | 343 × 394                    | 135 100         | 86,5            | 1 748                             | 8 874                             |
| 150            | 140                          | 12 460          | 7,97            | 20,4                              | 291                               | 450            | 445                          | 152 600         | 97,7            | 2 519                             | 11 320                            |
| 200            | 184                          | 16 380          | 10,5            | 46,2                              | 502                               | 500            | 495                          | 169 800         | 109             | 3 467                             | 14 010                            |
| 250            | 235                          | 20 920          | 13,4            | 96,3                              | 819                               | 550            | 546                          | 187 300         | 120             | 4 653                             | 17 040                            |
| 300            | 286                          | 25 450          | 16,3            | 174                               | 1213                              | 600            | 597                          | 204 800         | 131             | 6 082                             | 20 370                            |
| 350            | 337                          | 29 990          | 19,2            | 284                               | 1685                              | 400 × 400      | 394 × 394                    | 155 200         | 99,4            | 2 008                             | 10 190                            |
| 400            | 387                          | 34 440          | 22,0            | 430                               | 2222                              | 450            | 445                          | 175 300         | 112             | 2 893                             | 13 000                            |
|                |                              |                 |                 |                                   |                                   | 500            | 495                          | 195 000         | 125             | 3 982                             | 16 090                            |
| 150 × 150      | 140 × 140                    | 19 600          | 12,5            | 32,0                              | 457                               | 550            | 546                          | 215 100         | 138             | 5 344                             | 19 580                            |
| 200            | 191                          | 26 740          | 17,1            | 81,3                              | 851                               | 600            | 597                          | 235 200         | 151             | 6 986                             | 23 400                            |
| 250            | 241                          | 33 740          | 21,6            | 163                               | 1355                              | 450 × 450      | 445 × 445                    | 198 000         | 127             | 3 268                             | 14 690                            |
| 300            | 292                          | 40 880          | 26,2            | 290                               | 1989                              | 500            | 495                          | 220 300         | 141             | 4 498                             | 18 170                            |
| 350            | 343                          | 48 020          | 30,7            | 471                               | 2745                              | 550            | 546                          | 243 000         | 156             | 6 036                             | 22 110                            |
| 400            | 394                          | 55 160          | 35,3            | 714                               | 3622                              | 600            | 597                          | 265 700         | 170             | 7 890                             | 26 430                            |
| 450            | 445                          | 62 300          | 39,9            | 1028                              | 4621                              |                |                              |                 |                 |                                   |                                   |
| 500            | 495                          | 69 300          | 44,4            | 1415                              | 5717                              | 500 × 500      | 495 × 495                    | 245 000         | 157             | 5 003                             | 20 210                            |
| 200 × 200      | 191 × 191                    | 36 480          | 23,3            | 111                               | 1161                              | 550            | 546                          | 270 300         | 173             | 6 714                             | 24 590                            |
| 250            | 241                          | 46 030          | 29,5            | 223                               | 1849                              | 600            | 597                          | 295 500         | 189             | 8 777                             | 29 400                            |
| 300            | 292                          | 55 770          | 35,7            | 396                               | 2714                              |                |                              |                 |                 |                                   |                                   |
| 350            | 343                          | 65 510          | 41,9            | 642                               | 3745                              |                |                              |                 |                 |                                   |                                   |
| 400            | 394                          | 75 250          | 48,2            | 974                               | 4942                              | 600 × 600      | 597 × 597                    | 356 400         | 228             | 10 590                            | 35 460                            |
| 450            | 445                          | 85 000          | 54,4            | 1403                              | 6304                              |                |                              |                 |                 |                                   |                                   |
| 500            | 495                          | 94 550          | 60,5            | 1930                              | 7800                              |                |                              |                 |                 |                                   |                                   |
| 550            | 546                          | 104 300         | 66,7            | 2591                              | 9490                              |                |                              |                 |                 |                                   |                                   |

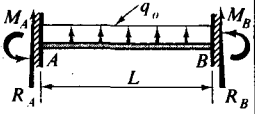
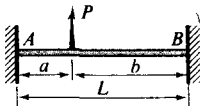
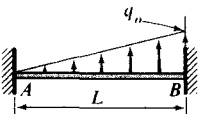
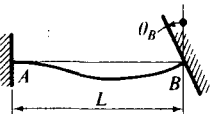
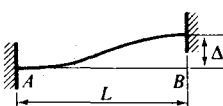
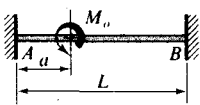
Semua sifat dan massa yang diberikan hanyalah untuk ukuran pakai saja. Massa yang diberikan di atas berdasarkan kepada massa rata-rata 640 kg per meter kubik yang diandaikan. Harga-harga di atas merupakan konversi rata-rata dari yang dihimpun oleh Asosiasi Produk Kehutanan Nasional dan dipublikasikan atas seizin mereka.

**Tabel 11** DEFLEKSI DAN KEMIRINGAN KURVA ELASTIS UNTUK BALOK DENGAN PELBAGAI PEMBEBANAN

| Pembebanan  | Persamaan Kurva Elastis   |   |
|---|---|---|
|   | Defleksi Maksimum   | Kemiringan pada Ujung   |
|    | $v = \frac{P}{6EI}(2L^3 - 3L^2x + x^3)$ $v_{\max} = v(0) = \frac{PL^3}{3EI}$  | $\theta(0) = -\frac{PL^2}{2EI}$   |
|    | $v = \frac{q_0}{24EI}(x^4 - 4L^3x + 3L^4)$ $v_{\max} = v(0) = \frac{q_0L^4}{8EI}$   | $\theta(0) = -\frac{q_0L^3}{6EI}$   |
|    | $v = \frac{q_0x}{24EI}(L^3 - 2Lx^2 + x^3)$ $v_{\max} = v(L/2) = \frac{5q_0L^4}{384EI}$  | $\theta(0) = -\theta(L) = \frac{q_0L^3}{24EI}$  |
|   | <p>Bila <math>0 \leq x \leq a</math>, maka</p> $v = \frac{Pb}{6EI}[(L^2 - b^2)x - x^3]$ <p>Bila <math>a = b = \frac{L}{2}</math>, maka</p> $v = \frac{Px}{48EI}(3L^2 - 4x^2)$ $v_{\max} = v(L/2) = \frac{PL^3}{48EI}$ | <p>Lihat Contoh 11-4.</p> $\left(0 \leq x \leq \frac{L}{2}\right)$ $\theta(0) = -\theta(L) = \frac{PL^2}{16EI}$ |
|  | $v = -\frac{M_0x}{6EI}(L^2 - x^2)$ $v_{\max} = v(L/\sqrt{3}) = -\frac{M_0L^2}{9\sqrt{3}EI}$   | $\theta(0) = -\frac{\theta(L)}{2} = -\frac{M_0L}{6EI}$  |
|  | $v_a = v(a) = \frac{Pa^2}{6EI}(3L - 4a)$ $v_{\max} = v(L/2) = \frac{Pa}{24EI}(3L^2 - 4a^2)$   | $\theta(0) = \frac{Pa}{2EI}(L - a)$   |



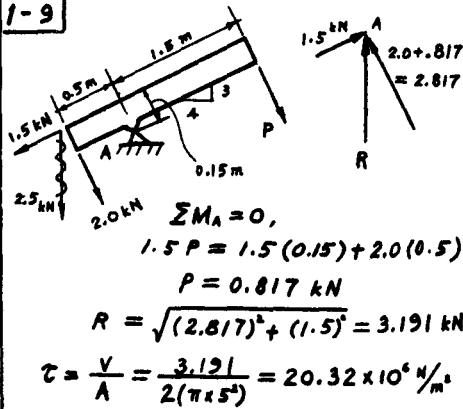
Tabel 12 AKSI UJUNG JEPIT BALOK PRISMATIK \*

| Pembebanan  | Momen*  | Reaksi*  |
|---|---|--|
|    | $M_A = -M_B = -\frac{q_0 L^2}{12}$  | $R_A = R_B = -\frac{q_0 L}{2}$   |
|    | $M_A = -\frac{Pab^2}{L^2}$ $M_B = \frac{Pba^2}{L^2}$  | $R_A = -\frac{Pb^2}{L^3}(3a + b)$ $R_B = -\frac{Pa^2}{L^3}(a + 3b)$  |
|    | $M_A = -\frac{q_0 L^2}{30}$ $M_B = \frac{q_0 L^2}{20}$  | $R_A = -\frac{3q_0 L}{20}$ $R_B = -\frac{7q_0 L}{20}$  |
|    | $M_A = \frac{2EI}{L}\theta_B$ $M_B = \frac{4EI}{L}\theta_B$   | $R_A = \frac{6EI}{L^2}\theta_B$ $R_B = -\frac{6EI}{L^2}\theta_B$   |
|  | $M_A = -\frac{6EI}{L^2}\Delta$ $M_B = -\frac{6EI}{L^2}\Delta$   | $R_A = -\frac{12EI}{L^3}\Delta$ $R_B = \frac{12EI}{L^3}\Delta$   |
|  | $M_A = M_0\left(-1 + 4\frac{a}{L} - \frac{3a^2}{L^2}\right)$ $M_B = \frac{M_0 a}{L}\left(2 - 3\frac{a}{L}\right)$ | $R_A = \frac{6M_0 a}{L^2}\left(1 - \frac{a}{L}\right)$ $R_B = -\frac{6M_0 a}{L^2}\left(1 - \frac{a}{L}\right)$ |

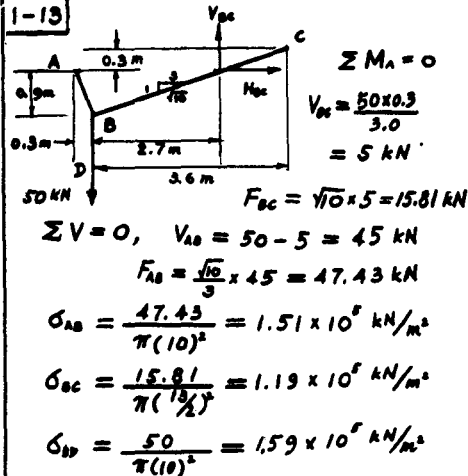
\* Untuk semua kasus yang didaftarkan, sikap positif momen ujung dan reaksi adalah sama dengan yang terlihat dalam diagram yang pertama untuk pembebanan yang terdistribusi merata. Kaidah tanda khusus yang dipergunakan di sini adalah yang diambil untuk metoda pergeseran dalam Pasal 12-6.

**Beberapa jawaban  
soal-soal  
Mekanika Teknik**

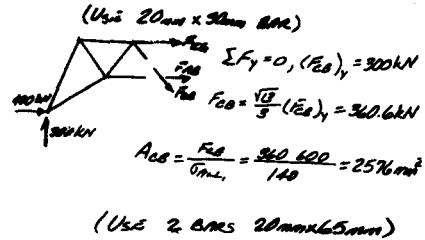
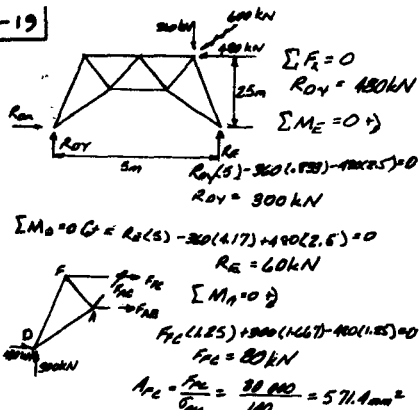
1-9



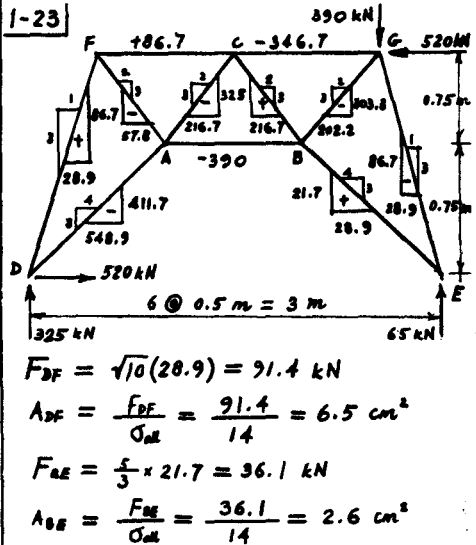
1-13



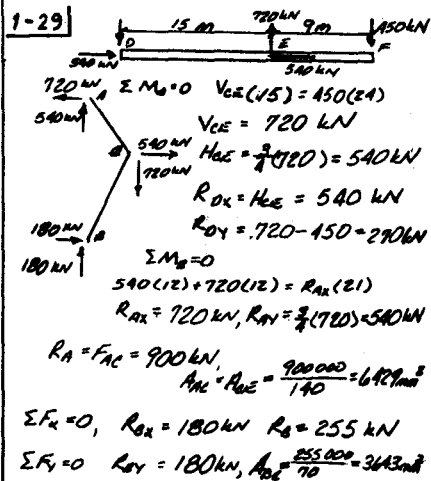
1-19



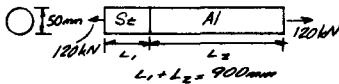
1-23



1-29



2-3



$$a) \Delta_{ST} = \Delta_{AL} \quad \frac{PL_1}{AE_{ST}} = \frac{PL_2}{AE_{AL}}, L_1 = \frac{E_{ST}}{E_{AL}} L_2$$

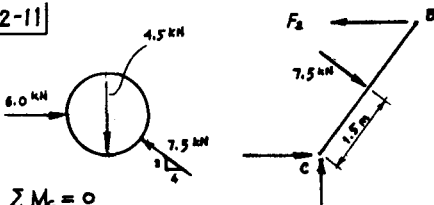
$$L_1 = \frac{200}{70} L_2 = 2.86 L_2$$

$$L_2 = \frac{900}{3.86} = 233 \text{ mm}, L_1 = 667 \text{ mm}$$

$$b) \Delta = \sum \frac{PL}{AE} = \frac{12 \times 10^5}{\pi (25)^2} \left( \frac{667}{2 \times 10^5} + \frac{233}{70 \times 10^5} \right)$$

$$\Delta = 0.407 \text{ mm}$$

2-11



$$\sum M_C = 0$$

$$7.5 \times 1.5 = F_2 \times 2.4$$

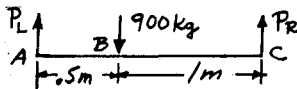
$$F_2 = 4.69 \text{ kN}$$

$$\Delta = \frac{F_2 L}{AE}$$

$$= \frac{4.69 \times 10^3 (1.8 \times 10^3)}{5 (2.1 \times 10^9)}$$

$$= 8.04 \text{ mm}$$

2-20



$$\sum M_A = 0 \quad 900 \times 9.81 \times 0.5 = 1.5 P_R$$

$$P_R = 2943 \text{ N} = 2.94 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \quad P_L = 900 \times 9.81 / 10^3 = P_R = 5.89 \text{ kN}$$

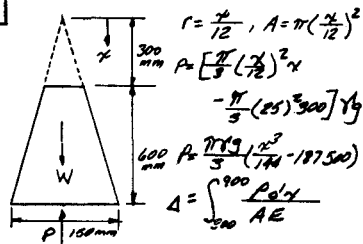
$$\Delta_L = \frac{P_L L}{AE} = \frac{5.89 \times 10^3 \times 1500}{2 \times 10^5 \times 60} = 0.736 \text{ mm}$$

$$\Delta_R = \frac{P_R L}{AE} = \frac{2.94 \times 10^3 \times 1500}{7 \times 10^4 \times 120} = 0.525 \text{ mm}$$

$$BB' = 0.736 - 0.525 = 0.211 \text{ mm}$$

$$BB' = 0.525 + \frac{2}{3} (0.736 - 0.525) = 0.666 \text{ mm}$$

2-21



$$r = \frac{r}{12}, A = \pi \left( \frac{r}{12} \right)^2$$

$$P_x = \left[ \frac{\pi}{3} \left( \frac{r}{12} \right)^2 x \right] \gamma$$

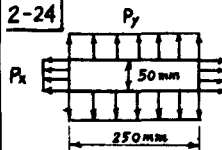
$$P_x = \frac{\pi \gamma}{3} \left( \frac{r^3}{144} - 187500 \right)$$

$$\Delta = \int_{300}^{900} \frac{P_x dx}{AE}$$

$$= \int_{300}^{900} \frac{\pi \gamma}{3} \left( \frac{r^3}{144} - 187500 \right) dx$$

$$= 1.0 \times 10^5 \frac{\gamma}{E}$$

2-24



$$(a) \sigma_x = \frac{100}{50 \times 10} = 0.2 \text{ kN/mm}^2$$

$$\sigma_y = \frac{200}{250 \times 10} = 0.08 \text{ kN/mm}^2$$

$$\sigma_z = 0$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{1}{2.0 \times 10^5} [-0.25 (0.2 + 0.08)]$$

$$= -3.50 \times 10^{-4}$$

$$\Delta L_z = -3.50 \times 10^{-4} (10) = -3.50 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

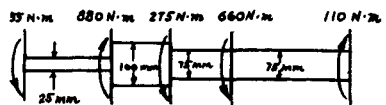
$$(b) -3.50 \times 10^{-4} = \frac{1}{E} (-0.25 \sigma_x)$$

$$\sigma_x = 3.50 \times 10^{-4} \times \frac{2.1 \times 10^5}{0.25}$$

$$= 294 \times 10^{-1} \text{ kN/mm}^2$$

$$P_x = 294 \times 10^{-1} (50 \times 10) = 147 \text{ kN}$$

3-5



$$T_1 = 55 \text{ N}\cdot\text{m}, T_2 = 825 \text{ N}\cdot\text{m}, T_3 = 550 \text{ N}\cdot\text{m}, T_4 = 110 \text{ N}\cdot\text{m}$$

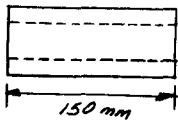
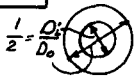
$$\tau_1 = \frac{T_1 C_1}{J_1} = \frac{55 \left( \frac{\pi}{2} \times 10^{-3} \right)}{\frac{\pi}{2} \left( \frac{\pi}{2} \times 10^{-3} \right)^4} = 1.79 \times 10^7 \text{ N/m}^2$$

$$\tau_2 = \frac{T_2 C_2}{J_2} = \frac{825 \left( \frac{\pi}{2} \times 10^{-3} \right)}{\frac{\pi}{2} \left( \frac{\pi}{2} \times 10^{-3} \right)^4} = 4.2 \times 10^6 \text{ N/m}^2$$

$$\tau_3 = \frac{T_3 C_3}{J_3} = \frac{550 \left( \frac{\pi}{2} \times 10^{-3} \right)}{\frac{\pi}{2} \left( \frac{\pi}{2} \times 10^{-3} \right)^4} = 6.64 \times 10^6 \text{ N/m}^2$$

$$\therefore \tau_{max} = \tau_1 = 1.79 \times 10^7 \text{ N/m}^2$$

3-13



$$I_p = \frac{TL}{\phi\theta} = \frac{1 \times 15}{\frac{1}{100} \left( \frac{\pi}{32} \right) (84 \times 10^9)} = 1.88 \times 10^{-8}$$

$$I_p = \frac{\pi}{2} \left( c^4 - \left( \frac{c}{2} \right)^4 \right) = 1.47 c^4$$

$$c = \left( \frac{1.88 \times 10^{-8}}{1.47} \right)^{1/4} = 0.0106 \text{ m}$$

$$D = 10.6 \times 2 = 21.2 \text{ mm}$$

3-19



$$T_1 = 50 \pi \quad T_2 = 25 \pi \quad T_3 = 40 \pi$$

$$a) \quad \tau_1 = \frac{T_1 C}{I_p} = \frac{40 \pi \times 0.05}{\frac{\pi}{32} (0.05^4 \times 0.05^4)} = 11.76 \text{ MPa}$$

$$\tau_3 = \frac{50 \pi \times 0.05}{\frac{\pi}{32} (0.05^4)} = 12.8 \text{ MPa}$$

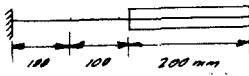
$$\therefore \tau_{\max} = \tau_3 = 12.8 \text{ MPa}$$

$$b) \quad \phi = \sum \frac{TL}{I_p G} = \frac{1}{84 \times 10^9} \left[ \frac{50 \pi (0.25)}{\frac{\pi}{32} (0.05^4)} + \frac{25 \pi (0.15)}{\frac{\pi}{32} (0.05^4)} + \frac{40 \pi (0.15)}{\frac{\pi}{32} (0.05^4 \times 0.05^4)} + \frac{25 \pi (0.15)}{\frac{\pi}{32} (0.05^4 \times 0.05^4)} \right]$$

$$= \frac{32}{84 \times 10^9} [2 \times 10^6 + 0.6 \times 10^6 + 0.6 \times 10^6 + 1.34 \times 10^6]$$

$$= 1.95 \times 10^{-3} \text{ rad} = 0.11^\circ$$

3-24



T(N)

 $\phi(\text{N})$ 

$$\phi = \int \frac{T dx}{I_p G} = \frac{-100 \times 1}{I_p G} + \int_0^{0.2} \frac{(-100 + 600x) dx}{I_p G}$$

$$= \frac{-100}{I_p G} + \frac{1}{I_p G} [-100x + 300x^2]_0^{0.2}$$

$$= \frac{1}{I_p G} [-100 - 20 + 10 + 0]$$

$$\phi(0) = 0 \therefore C = 0 \therefore \phi(\text{end}) = \frac{-20}{I_p G}$$

3-31

$$\text{Area} = \pi (5)^2 = 78.54 \text{ cm}^2$$

$$\text{Rectangle: } a = 2.5 \text{ cm, } b = 31.42 \text{ cm}$$

$$\text{Square: } s = \sqrt{78.54} = 8.86 \text{ cm}$$

$$\frac{\tau_c}{\tau_s} = \frac{TC/J}{T/d_0 s^3} = \frac{5(8.86)^3(1.208)}{(\pi/2)(5)^4} = 0.74$$

$$\frac{\tau_R}{\tau_s} = \frac{T/d_0 a b^2}{T/d_0 s^3} = \frac{(8.86)^3(1.208)}{(0.333)31.42(2.5)^2} = 2.21$$

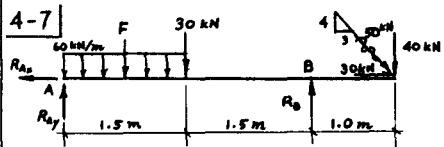
$$\tau_s : \tau_c : \tau_R = 1 : 0.74 : 2.21$$

$$\frac{\phi_c}{\phi_s} = \frac{TL/JG}{TL/\beta_s^4 G} = \frac{0.141(8.86)^4}{(\pi/2)(5)^4} = 0.886$$

$$\frac{\phi_R}{\phi_s} = \frac{\beta_s s^4}{\beta_s a^3 b} = \frac{0.141(8.86)^4}{(0.333)(2.5)^3(31.42)} = 5.32$$

$$\phi_s : \phi_c : \phi_R = 1 : 0.886 : 5.32$$

4-7



$$F = 60 \times 1.5 = 90 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 \uparrow, \quad 3R_B - 90\left(\frac{1.5}{2}\right) - 30(1.5) - 40(4) = 0$$

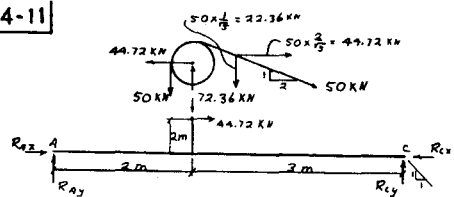
$$R_B = 90.83 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum F_x = 0, \quad R_A = 30 \text{ kN} \leftarrow$$

$$\sum F_y = 0, \quad R_A = 90 + 30 + 40 - 90.83$$

$$= 69.17 \text{ kN} \uparrow$$

4-11



$$\sum M_A = 0: \quad 5R_{cy} - 72.36(2) - 44.72(2) = 0$$

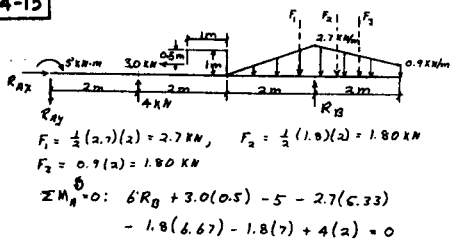
$$R_{cy} = 46.83 \text{ kN} \uparrow$$

$$R_{cx} = R_{cy} = 46.83 \text{ kN} \leftarrow$$

$$\sum F_x = 0: \quad R_{Ax} = 44.72 - 46.83 = 2.11 \text{ kN} \rightarrow$$

$$\sum F_y = 0: \quad R_{Ay} = 72.36 - 46.83 = 25.53 \text{ kN} \uparrow$$

4-13

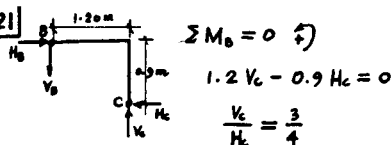


$$R_B = 5.75 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum F_y = 0: R_{Ay} = 4 + 5.75 - 2.7 - 1.8 - 1.8 = 3.45 \text{ kN} \uparrow$$

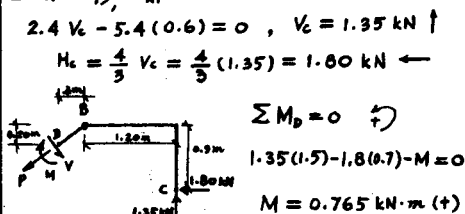
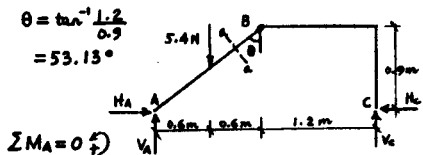
$$\sum F_x = 0: R_{Ax} = 3 \text{ kN} \rightarrow$$

4-21



$$\theta = \tan^{-1} \frac{1.2}{0.9}$$

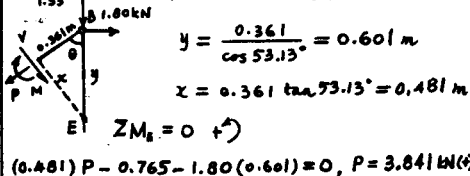
$$= 53.13^\circ$$



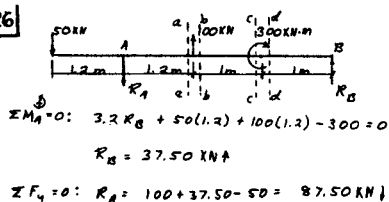
$$\sum M_C = 0 \quad \uparrow$$

$$1.35(1.2) - 1.8(0.9) - 0.765 + (36)V = 0$$

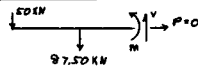
$$V = 2.122 \text{ kN} \quad (-)$$



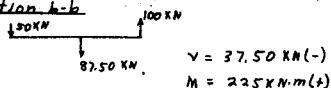
4-26



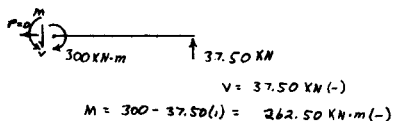
Section a-a



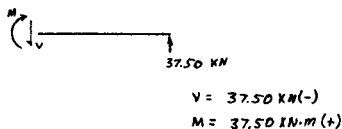
Section b-b



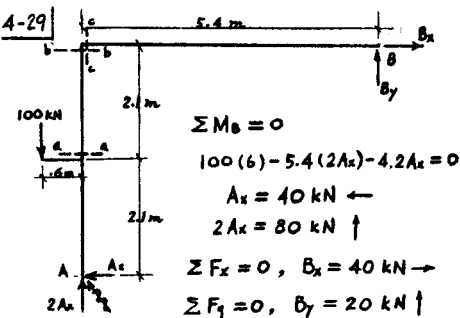
Section c-c



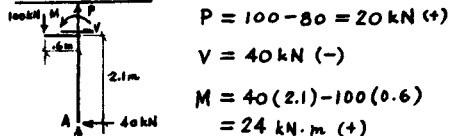
Section d-d



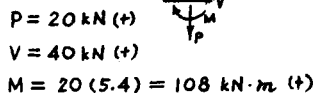
4-29



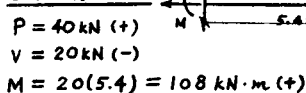
section a-a



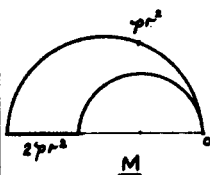
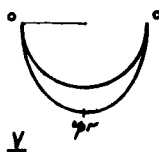
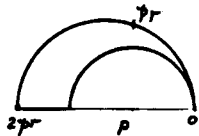
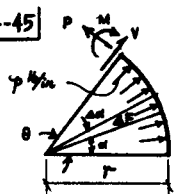
section b-b



section c-c



4-45



$$\Delta F = p r \Delta d$$

$$\Delta P = p r \Delta d \sin(\theta - d)$$

$$\Delta V = -p r \Delta d \cos(\theta - d)$$

$$\Delta M = p r^2 \Delta d \sin(\theta - d)$$

$$P = \int_0^\theta p r \sin(\theta - d) dd$$

$$P = p r (1 - \cos \theta)$$

$$V = \int_0^\theta -p r \cos(\theta - d) dd$$

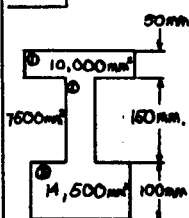
$$V = -p r \sin \theta$$

$$= p r \sin(-\theta)$$

$$M = \int_0^\theta p r^2 \sin(\theta - d) dd$$

$$M = p r^2 (1 - \cos \theta)$$

5-1



$$\bar{y} = \frac{\sum A y}{\sum A}$$

$$\sum A y = 10,000(275) + 7600(175) + 14,500(50)$$

$$= 1,787,500 \text{ mm}^3$$

$$\sum A = 10,000 + 7600 + 14,500$$

$$= 32,000 \text{ mm}^2$$

$$\bar{y} = \frac{1,787,500}{32,000} = 150 \text{ mm}$$

$$I_{NA} = \sum (I_o + A d^2) \quad I_o = \frac{1}{12} b h^3$$

$$I_{NA①} = \frac{2(.050)^3}{12} + (.01)(.125)^2$$

$$= 1.583 \times 10^{-4}$$

$$I_{NA②} = \frac{(.05)(.15)^3}{12} + (7.5 \times 10^{-3})(.025)^2$$

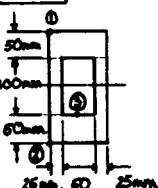
$$= 1.88 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$I_{NA③} = \frac{(.145)(.1)^3}{12} + (1.45 \times 10^{-2})(.1)^2$$

$$= 1.576 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I = 3.34 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

5-7



$$I = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} b h^3$$

$$= \frac{1}{12} [(100)(200)^3 - (50)(100)^3]$$

$$= 62,500,000 \text{ mm}^4$$

$$= 6.25 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

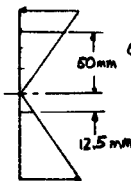
$$\sigma_x = \frac{M y}{I} = \frac{(64,000)(10^{-3})(0.1)}{(6.25 \times 10^{-6})}$$

$$= 86.4 \text{ MN/m}^2$$

$$\sigma_z = 86.4 \text{ MN/m}^2$$

$$\sigma_y = \frac{1}{2} \sigma_x = 43.2 \text{ MN/m}^2$$

5-16



$$I = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} (100)(150)^3 (10^{-10})$$

$$= 2.81 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$C = \sigma_{ave} A = \frac{M y_{ave}}{I} A$$

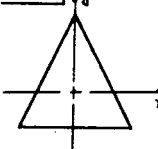
$$= \frac{(1.6 \times 10^{-3})(5 \times 10^{-2})(0.1)(.05)}{2.81 \times 10^{-5}}$$

$$= 142 \text{ N} = 142 \text{ kN}$$

$$b) T = \frac{(1.6 \times 10^{-3})(1.25 \times 10^{-2})(.05)(.025)}{2.81 \times 10^{-5}}$$

$$= 8.90 \times 10^{-5} \text{ N} = 8.90 \text{ kN}$$

5-19



$$T = \int \sigma dA$$

$$dA = x' dy = b \left( \frac{3}{2} - \frac{y}{h} \right) dy$$

$$T = \int \left( \frac{\sigma y}{I} \right) b \left( \frac{3}{2} - \frac{y}{h} \right) dy$$

$$= \frac{3 \sigma b}{h^3} \int_0^h y \left( \frac{3}{2} - \frac{y}{h} \right) dy$$

$$= \frac{3 \sigma b}{h^3} \left( \frac{3}{2} y^2 - \frac{1}{2} \frac{y^3}{h} \right) \Big|_0^h$$

$$= \frac{16 \sigma}{9 h} = \frac{16(4000)(10^{-9})}{9(.15)}$$

$$= 47.4 \text{ kN}$$

$$y_T = \frac{\int \sigma y dA}{\int \sigma dA}$$

$$\int \sigma y dA = \frac{M b}{I} \int_0^h y^2 \left( \frac{3}{2} - \frac{y}{h} \right) dy$$

$$= \frac{3 \sigma b}{h^3} \left( \frac{2}{9} y^3 - \frac{1}{4} \frac{y^4}{h} \right) \Big|_0^h$$

$$= \frac{16}{27} M$$

$$y_T = \frac{16(4000)}{27(47.4)} = 50 \text{ mm (from NA)}$$

$$C = T = 47.4 \text{ kN (from equilibrium)}$$

$$M = T (\text{lever arm})$$

$$(\text{lever arm}) = y_T + y_c = \frac{M}{T}$$

$$y_c = \frac{M}{T} - y_T = \frac{4000}{47.4 \times 10^3} - .05$$

$$= 34.4 \text{ mm from NA}$$

5-27

$R_A = 12.33 \text{ kN}$   $R_B = 15.67 \text{ kN}$   
 $\bar{y} = \frac{\sum Ay}{\sum A} = \frac{(200 \times 300)(150) - (\pi \times 75^2)(200)}{(200 \times 300) - (\pi \times 75^2)}$   
 $\bar{y} = 129.13 \text{ mm}$  ;  $I = \frac{1}{12} 200(300)^3 + (200 \times 300)(20.87)^2 - [\frac{1}{12} \pi(75)^4 + \pi(75)^2(70.87)^2]$   
 $I = 3.623 \times 10^{-6} \text{ m}^4 = 3.625 \times 10^{-4} \text{ m}^4$   
 $m_e - a = 12.33(2) - (3 \times 2) = 18.66 \text{ kN} \cdot \text{m}$   
 a)  $\sigma_{\text{max}} = \frac{M \bar{y}}{I} = \frac{(18.66)(.171)}{3.625 \times 10^{-4}} = -8802 \text{ kN/m}^2$   
 b)  $\sigma_{\text{mid}} = \frac{(18.66)(.021)}{3.625 \times 10^{-4}} = -1074 \text{ kN/m}^2$

5-38

$\frac{E_{\text{st}}}{E_{\text{Al}}} = 3$   $\frac{E_{\text{st}}}{E_{\text{Al}}} = 1.5$   
 $\bar{y} = \frac{(115)(75)(\frac{1}{2}) + (125)(225)(138) + (100)(75)(\frac{1}{2})}{(115)(75) + (125)(225) + (100)(75)}$   
 $\bar{y} = 138 \text{ mm}$   
 $I_x = \frac{(115)(.075)^3}{12} + (115)(.075)(.101)^2 + \frac{(225)(.125)^3}{12} + (.075)(.125)(.112)^2 + \frac{(100)(.075)^3}{12} + (100)(.075)(.112)^2$   
 $I_x = 2.27 \times 10^{-4} \text{ m}^4$   
 $\sigma_{\text{st}} = n \frac{M \bar{y}}{I} = \frac{(1.5)(80)(10^{-3})(.138)}{(2.27 \times 10^{-4})} = -73.0 \text{ MN/m}^2$   
 $\sigma_{\text{st}} = n \frac{M \bar{y}}{I} = \frac{(3)(80)(10^{-3})(.063)}{(2.27 \times 10^{-4})} = -66.6 \text{ MN/m}^2$   
 $\sigma_{\text{Al}} = \frac{M \bar{y}}{I} = \frac{(80)(10^{-3})(.162)}{(2.27 \times 10^{-4})} = 57.1 \text{ MN/m}^2$

5-47

$R = \frac{\int_A \frac{dA}{r}}{\int_A \frac{dA}{r^2}}$   $A = \pi c^2$   
 $\int_A \frac{dA}{r} = \int_0^{2\pi} \int_0^c \frac{2\pi c \sin \alpha}{F + c \cos \alpha} c \sin \alpha d\alpha$   
 $= \int_0^{2\pi} \frac{2\pi c^2 (1 - \cos^2 \alpha)}{F + c \cos \alpha} d\alpha$   
 $= 2 \int_0^{2\pi} \frac{c^2 - c^2 \cos^2 \alpha}{F + c \cos \alpha} + \bar{F}^2 - \bar{F}^2 d\alpha$   
 $= 2 \int_0^{2\pi} \left( \frac{c^2 - \bar{F}^2}{F + c \cos \alpha} + \bar{F} - c \cos \alpha \right) d\alpha$   
 $= 2\pi (\bar{F} - \sqrt{\bar{F}^2 - c^2})$   
 $R = \frac{\pi c^2}{2\pi (\bar{F} - \sqrt{\bar{F}^2 - c^2})} = \frac{\bar{F} + \sqrt{\bar{F}^2 - c^2}}{2}$

6-8

$\Sigma A \bar{y} = (.03)(.05) + (.15)(.015) + (.04)(.05)(.035) = 2.36 \times 10^{-3} \text{ m}^3$   
 $\Sigma A = (.12)(.03) + (.15)(.015) + (.04)(.05) = 7.18 \times 10^{-3} \text{ m}^2$   
 $\bar{y} = \frac{2.36 \times 10^{-3}}{7.18 \times 10^{-3}} = .329 \text{ m}$   
 $I = \frac{(0.03)(.1)^3}{12} + (.1)(.03)(.0171)^2 + \frac{(0.15)(.015)^3}{12} + (.15)(.015)(.002)^2 + \frac{(0.04)(.05)^3}{12} + (.05)(.04)(.002)^2$   
 $I = 5.05 \times 10^{-6} \text{ m}^4$   
 a)  $\tau = \frac{V \bar{y}}{I t} = \frac{(20)(.04)(.05)(.0021)}{(5.05 \times 10^{-6})(.05)} = 333 \text{ kN/m}^2$   
 b)  $\tau = \frac{(20)(.175)(.015)(.0254)}{(5.05 \times 10^{-6})(.05)} = 8800 \text{ kN/m}^2$   
 c)  $\tau = \tau_{\text{max}}$  for  $Q + t$  at neutral axis  
 $\tau_{\text{max}} = \frac{(20)(0.015)(.0471)(.0471/2)}{(5.05 \times 10^{-6})(.03)} = 4460 \text{ kN/m}^2$

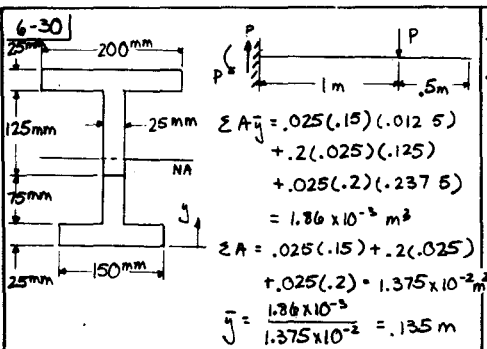
6-17

$\bar{y} = \frac{50(150)(25) + 125}{2(50)(150)} = 76 \text{ mm from top}$   
 $\tau_1 = 0$   
 $\tau_2 = \frac{240(.15)(.025)(.063)(10^{-3})}{(53.1 \times 10^{-6})(.15)} = 7.06 \text{ MN/m}^2$   
 $\tau_3 = \frac{240(.15)(.05)^2(10^{-3})}{(53.1 \times 10^{-6})(.15 \text{ or } .05)} = 11.3 \text{ or } 33.9 \text{ MN/m}^2$   
 $\tau_4 = \frac{(240)(10^{-3})(.05)(.13)(.06)}{(53.1 \times 10^{-6})(.05)} = 55.3 \text{ MN/m}^2$   
 $\tau_5 = \frac{(240)(10^{-3})(.05)(.065)(.093)}{(53.1 \times 10^{-6})(.05)} = 27.3 \text{ MN/m}^2$   
 $\tau_6 = 0$

6-27

$I = \frac{1}{12} (.2)(.3)^3 = 4.5 \times 10^{-4} \text{ m}^4$   
 $\sigma_{\text{top}} = \frac{40(1.2)(.15)}{4.5 \times 10^{-4}} = 16000 \text{ kN/m}^2$   
 $\sigma_{\text{bot}} = \frac{40(1.25)(.15)}{4.5 \times 10^{-4}} = 16700 \text{ kN/m}^2$   
 flexural forces  
 $F_{\text{top}} = \frac{1}{2} (16000)(.15)(.2) = 240 \text{ kN}$   
 $F_{\text{bot}} = \frac{1}{2} (16700)(.15)(.2) = 250 \text{ kN}$   
 $\tau_{\text{max}} = \frac{40(.15)(.2)(.075)}{4.5 \times 10^{-4}(.2)} = 1000 \text{ kN/m}^2$   
 shear force =  $(1000)(.05)(.2) = 10 \text{ kN}$   
 vert. force =  $\frac{1}{2} V = \frac{1}{2} (40) = 20 \text{ kN}$

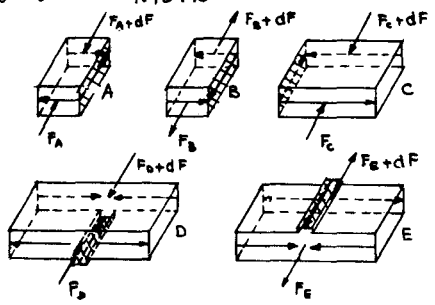




$I = \frac{1}{12}(.2)(.025)^3 + .2(.025)(.105)^2 + \frac{1}{12}(.025)(.2)^3 + .025(.2)(.01)^2 + \frac{1}{12}(.15)(.025)^3 + .15(.025)(.123)^2 = 1.30 \times 10^{-4} \text{ m}^4$   
 $P = \frac{\sigma I}{C} = \frac{(150 \times 10^3)(1.3 \times 10^{-4})}{.135} = 144 \text{ kN}$   
 $P = \frac{\tau I t}{Q} = \frac{(100 \times 10^3)(1.3 \times 10^{-4})(.025)}{.025(.15)(.123) + .025(\frac{.1^2}{2})} = 531 \text{ kN}$   
 $P = \frac{V I}{Q} = \frac{(2 \times 10^3)(1.3 \times 10^{-4})}{.025(.15)(.123) + .025(.075)(.0725)} = 435 \text{ kN}$   
 flexure controls  $\rightarrow P_{max} = 144 \text{ kN}$

6-36

$I = \frac{1}{12}[.15(.24)^3 + .14(.2)^3] = 7.95 \times 10^{-5} \text{ m}^4$   
 $g_A = g_B = \frac{VQ}{I} = \frac{100(.03)(.02)(.11)}{7.95 \times 10^{-5}} = 83.0 \text{ kN/m}$   
 $g_C = \frac{100(.07)(.02)(.11)}{7.95 \times 10^{-5}} = 194 \text{ kN/m}$   
 $g_D = g_E = \frac{100(.15)(.02)(.11)}{7.95 \times 10^{-5}} = 415 \text{ kN/m}$



7-3

$M = 15(.0617) = .776 \text{ kN}\cdot\text{m}$   
 $I = \frac{1}{36}bh^3 = \frac{1}{36}(.05)(.08)^3 = 7.11 \times 10^{-7} \text{ m}^4$   
 $\sigma_{top} = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = \frac{15(10^{-3})}{\frac{1}{2}(.05)(.08)} - \frac{.776(.0633)(10^3)}{7.11 \times 10^{-7}}$   
 $= -50.7 \text{ MN/m}^2$   
 $\sigma_{bottom} = \frac{15(10^{-3})}{\frac{1}{2}(.05)(.08)} + \frac{.776(10^{-3})(.0267)}{7.11 \times 10^{-7}}$   
 $= 36.6 \text{ MN/m}^2 < 50.7$

7-8

$\bar{y} = \frac{(210)(50 \times 25) + (150)(35)(125)}{210 \times 50 + 2 \times 150 \times 25} = 72 \text{ mm from left}$   
 $I = \frac{1}{12}(210)(50)^3 + (210)(50)(25)^2 + \frac{1}{12}(2 \times 150)(25)^3 + 2(150)(25)(125)^2$   
 $= 6.125 \times 10^7 \text{ mm}^4$   
 $M = (0.5 + 0.075)P = 0.575P$   
 $Q = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = 28 \times 10^6 = \frac{P}{0.1155} + \frac{0.575P(2075)}{61.25 \times 10^6}$   
 $712.74P = 28 \times 10^6 \quad P = 39300 \text{ N}$   
 $\sigma = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = -80 \times 10^6 = \frac{P}{0.1155} - \frac{0.575P(2075)}{61.25 \times 10^6}$   
 $-1164.81P = -80 \times 10^6 \quad P = 68700 \text{ N} > 39300 \text{ N}$

7-18

$\Sigma M_A = 0 = 2(5) - 35(3+1)$   
 $V_B = 70 \text{ kN}$   
 $H_B = 70 \frac{3}{5} = 42 \text{ kN}$   
 $V_A = 35 + 70 = 105 \text{ kN}$   
 $H_A = 35 - 28 = 7 \text{ kN}$   
 $P_1 = 70 \text{ kN}, M_1 = 56 \text{ kN}\cdot\text{m}$   
 $Q_{max} = \frac{P}{A} - \frac{M}{S}$   
 $= \frac{70}{288 \times 10^{-6}} - \frac{56}{451 \times 10^{-6}}$   
 $= -136 \text{ MPa}$   
 $\sigma_{max} = \frac{P}{A} - \frac{M}{S}$   
 $= \frac{-105}{288 \times 10^{-6}} - \frac{21}{451 \times 10^{-6}} = -64.4 \text{ MPa}$

7-22

$\sigma_A = \frac{-F_0}{A} + \frac{H_{AB}}{S} = 0$   
 $\sigma_B = \frac{-F_0}{A} - \frac{H_{AB}}{S} = -30 \times 10^3$   
 $\sigma_A - \sigma_B = \frac{2H_{AB}}{S} = 30 \times 10^3$   
 $H_{AB} = \frac{1}{2}(30 \times 10^3)(\frac{1}{6})(.1)^3$   
 $= 2.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$

$$\sigma_c = \frac{-F_1}{A} + \frac{M_{cd}}{S} = -24 \times 10^3$$

$$\sigma_b = \frac{-F_1}{A} - \frac{M_{cd}}{S} = -6 \times 10^3$$

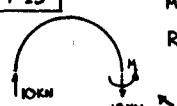
$$\frac{2M_{cd}}{S} = -18 \times 10^3 \rightarrow M_{cd} = \frac{1}{2}(18 \times 10^3) \left(\frac{1}{6}\right)(.1)^3 = 1.5 \text{ KN}\cdot\text{m}$$

$$\sigma_A \rightarrow F_1 = \frac{M_{AB} A}{S} = \frac{2.5(.1)^2}{\frac{1}{6}(.1)^3} = 150 \text{ KN}$$

$$M_{AB} = .2F_1 - M_{cd}$$

$$F_1 = \frac{M_{AB} + M_{cd}}{.2} = \frac{2.5 - 1.5}{.2} = 5 \text{ KN}$$

7-25



$$M = 10(.3 - .05) = 2.5 \text{ KN}\cdot\text{m}$$

$$R = \frac{F + \sqrt{F^2 - C^2}}{2} = \frac{126 + \sqrt{126^2 - 25^2}}{2}$$

$$= 124 \text{ mm} = .124 \text{ m}$$

max. stress for this condition

a)

$$\sigma_c = \frac{P}{A} + \frac{M(R-r_i)}{r_i A (F-R)} = \frac{10 \times 10^3}{\pi(.025)^2} + \frac{2.5(10^{-3})(.124 - .1)}{\pi(.025)^2(.125 - .124)}$$

$$= 311 \text{ MN/m}^2$$

$$\sigma_o = \frac{P}{A} + \frac{M(R-r_o)}{r_o A (F-R)} = \frac{10(10^{-3})}{\pi(.025)^2} + \frac{2.5(10^{-3})(.124 - .15)}{.15 \pi(.025)^2(.125 - .124)}$$

$$= -216 \text{ MN/m}^2 < 311$$

$$\sigma_{max} = 311 \text{ MN/m}^2$$

b)

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{comp}} = \frac{311}{216} = 1.44$$

7-32

$$\sigma_o = 0 = -\frac{P'}{A} - \frac{M_{xy}}{S_{yy}} + \frac{M_{xz}}{S_{zz}}$$

$$= -\frac{P + 75(.3)(.15)(.5)}{(.3)(.15)} - \frac{P(.15)}{2.25 \times 10^{-3}} + \frac{P(.15)}{1.125 \times 10^{-3}}$$

$$44.4P = 37.5$$

$$P = .844 \text{ KN} = 844 \text{ N}$$

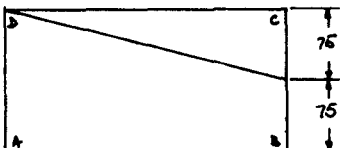
$$\sigma_A = -\frac{.844 + 1.688}{.3(.15)} - \frac{.844(.15)}{2.25 \times 10^{-3}} - \frac{.844(.15)}{1.125 \times 10^{-3}}$$

$$= -56.3 - 56.3 - 112.5$$

$$= -225 \text{ KN/m}^2$$

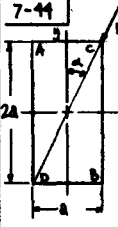
$$\sigma_B = -56.3 + 56.3 - 112.5 = -112.5 \text{ KN/m}^2$$

$$\sigma_c = -56.3 + 56.3 + 112.5 = 112.5 \text{ KN/m}^2$$



because  $\sigma_B = -\sigma_c$ , the line of zero stress passes halfway between points B and C

7-44



a)  $M_{max} = \frac{WL^2}{8} = \frac{15(4)^2}{8} = 30 \text{ KN}\cdot\text{m}$

$$\tan \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 26.6^\circ$$

$$\sigma_b = \frac{M_{xy}}{S_{yy}} + \frac{M_{xz}}{S_{zz}}$$

$$= \frac{30 \cos 26.6^\circ}{\frac{1}{6}(a)(2a)^2} + \frac{30 \sin 26.6^\circ}{\frac{1}{6}(2a)(a)^2}$$

$$= \frac{30.6}{a^3} = 10(10)^3$$

$$a = .200 \text{ m} = 200 \text{ mm}$$


b)

$$\sigma_A = \frac{-30 \cos 26.6^\circ}{\frac{1}{6}(.2)(.4)^2} + \frac{30 \sin 26.6^\circ}{\frac{1}{6}(.4)(.2)^2}$$

$$= -5030 + 5030 = 0$$

$$\sigma_b = 5030 - 5030 = 0$$

$$\sigma_c = -10 \text{ MN/m}^2$$

$$\sigma_o = 10 \text{ MN/m}^2$$


7-49

$$\Delta = \frac{F}{K_1} + \frac{F}{K_2} = \frac{F}{K} \Rightarrow K = K_1 + K_2$$

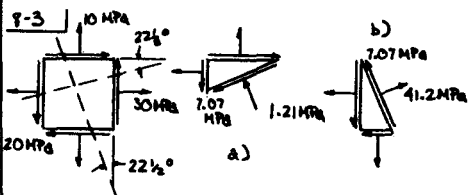
$$K = \frac{82 \times 10^3}{64} \left[ \frac{(.006)^4}{(.012)^3(12)} + \frac{(.008)^4}{(.016)^3(18)} \right] = 151 \text{ KN/m}$$

$$m_1 = \frac{2F_1}{d_1} = \frac{2(.012)}{(.006)} = 4 \rightarrow K = 1.37$$

$$m_2 = \frac{2(.016)}{.008} = 4 \rightarrow K = 1.37$$

$$F_1 = \frac{\tau_{max} \pi d^3}{16 K F} = \frac{480(10^3) \pi (.006)^3}{16(1.37)(.012)} = 1.24 \text{ KN}$$

$$F_2 = \frac{480(10^3) \pi (.008)^3}{16(1.37)(.016)} = 2.20 \text{ KN}$$



a)  $\Sigma F_N = 0$

$$N = 10 \cos^2 22.5^\circ + 30 \sin^2 22.5^\circ - 2(20) \sin 22.5^\circ \cos 22.5^\circ$$

$$= -1.21 \text{ MN} \quad \sigma_A = -1.21 \text{ MPa}$$

$\Sigma F_y = 0$

$$S = 20 \cos^2 22.5^\circ + 10 \sin^2 22.5^\circ - 30 \sin 22.5^\circ \cos 22.5^\circ - 20 \sin^2 22.5^\circ$$

$$= 7.07 \text{ MN} \quad \tau_A = 7.07 \text{ MPa}$$

b)  $\Sigma F_N = 0$

$$N = 30 \cos^2 22.5^\circ + 10 \sin^2 22.5^\circ + 2(20) \sin 22.5^\circ \cos 22.5^\circ$$

$$= 41.2 \text{ MN} \quad \sigma_B = 41.2 \text{ MPa}$$

$\Sigma F_y = 0$

$$S = 20(\cos^2 22.5^\circ - \sin^2 22.5^\circ) + (10 - 30) \sin 22.5^\circ \cos 22.5^\circ$$

$$= 7.07 \text{ MN} \quad \tau_B = 7.07 \text{ MPa}$$

8-6

$$2F_s = 0$$

$$\tau_{\theta} dA = \sigma_y \sin \theta \cos \theta dA + \tau \cos^2 \theta dA - \tau \sin^2 \theta dA + \sigma_x \cos \theta \sin \theta dA$$

$$\tau_{\theta} = (\sigma_y - \sigma_x) \sin \theta \cos \theta + \tau (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

$$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$$

$$\tau_{\theta} = -\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\theta + \tau \cos 2\theta$$

8-13

a)  $\theta_1 = \tan^{-1} \frac{-30}{\frac{1}{2}(20)} = 54.2^\circ$

$$\sigma_{1,2} = \frac{-20}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{20}{2}\right)^2 + 30^2}$$

$$= -10 \pm 31.6$$

$$\sigma_1 = 21.6 \text{ MPa} \quad \sigma_2 = -41.6 \text{ MPa}$$

b)  $\theta_2 = \tan^{-1} \frac{-\frac{1}{2}(20)}{-30} = 9.2^\circ$

$$\tau = \sqrt{\left(\frac{20}{2}\right)^2 + 30^2} = 31.6 \text{ MPa}$$

$$\sigma' = \frac{-20}{2} = -10 \text{ MPa}$$

8-23

a) CENTER =  $\frac{50+10}{2} = 30$

$$\text{RADIUS} = \sqrt{(50-30)^2 + 20^2} = 28.3$$

$$\sigma_1 = 30 + 28.3 = 58.3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 30 - 28.3 = 1.7 \text{ MPa}$$

$$\theta_1 = \tan^{-1} \frac{20}{28.3} = 22.5^\circ$$

b)  $\tau = 28.3 \text{ MPa}$

$$\sigma' = 30 \text{ MPa}$$

$$\theta_2 = \tan^{-1} \frac{20}{28.3} = 47.5^\circ$$

8-35

a) radius =  $r_{\max} = 3500$

$$\sigma_1 = 7000 \text{ KN/m}^2$$

$$\sigma_2 = 0$$

b)  $\theta = 180 - 2(53.1) = 73.8^\circ$

$$\sigma_1 = 3500 + 3500 \cos 73.8^\circ = 4480 \text{ KN/m}^2$$

$$\sigma_2 = 3500 - 3500 \cos 73.8^\circ = 2520 \text{ KN/m}^2$$

$$\tau = 3500 \sin 73.8^\circ = 3360 \text{ KN/m}^2$$

8-44

$$\epsilon_x = \epsilon_o = .00040$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{3}(2\epsilon_{60^\circ} + 2\epsilon_{120^\circ} - \epsilon_o)$$

$$= \frac{1}{3}(.00080 - .00120 - .00040) = -.000267$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}}(\epsilon_{60^\circ} - \epsilon_{120^\circ}) = \frac{2}{\sqrt{3}}(.00040 - .00060)$$

$$= .001155$$

$$\text{center} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} = \frac{.00040 - .000267}{2} = .000067$$

$$\frac{r}{2} = .000577$$

$$\text{radius} = \sqrt{(.00040 - .000067)^2 + .000577^2} = .000677$$

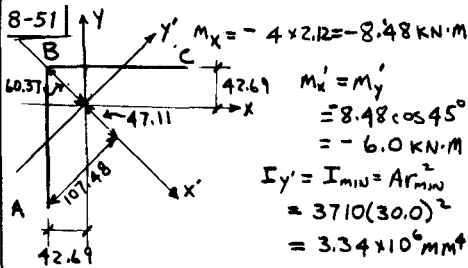
$$\epsilon_1 = .000067 + .000677 = .000734$$

$$\epsilon_2 = .000067 - .000677 = -.000600$$

$$\sigma_1 = \frac{70000}{1 - .25^2} [.000734 - .25(-.000600)] = 43.6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{70000}{1 - .25^2} [-.000600 + .25(.000734)] = -31.1 \text{ MPa}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{.000577}{.000600 + .0004} = 30^\circ$$

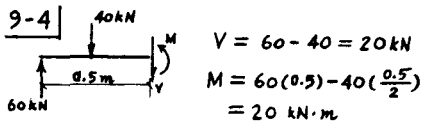


$$I_{x'} = I_x + I_y - I_{\min} = 10^6 [(8.28)^2 - 3.34] = 13.22 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_A = \frac{-6(107.48)}{13.22} - \frac{-6(47.11)}{3.34} = 133.4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B = -\frac{6(60.37)}{3.34} = -108.4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_c = \frac{-6(107.48)}{13.22} - \frac{-6(47.11)}{3.34} = 35.8 \text{ MPa}$$



Point A

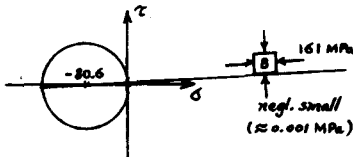
$$\sigma_x = \frac{M c}{I} = \frac{20 \times 0.06}{7.2 \times 10^{-4}} = 1.67 \times 10^5 \text{ kPa}$$

$$\sigma_y = \frac{80}{0.05} = 1.60 \times 10^3 \text{ kPa}$$

Point B

$$\sigma_x = \frac{58}{60} \times (1.67 \times 10^5) = 1.61 \times 10^5 \text{ kPa}$$

$$\tau = \frac{V Q}{I b} = \frac{20(0.05 \times 0.002 \times 0.059)}{72 \times 10^{-4} \times (0.05)} = 3.28 \times 10^2 \text{ kPa}$$



Point C

$$\sigma_x = \sigma_y = 0$$

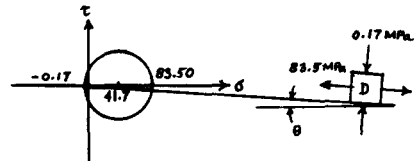
$$\tau_c = \frac{3V}{2A} = \frac{3}{2} \times \frac{20}{(0.05 \times 0.1)} = 6.00 \times 10^3 \text{ kPa}$$



Point D

$$\sigma_x = \frac{\sigma_{xx}}{2} = \frac{1.67 \times 10^5}{2} = 8.33 \times 10^4 \text{ kPa}$$

$$\tau = \frac{20(0.05 \times 0.03 \times 0.045)}{7.2 \times 10^{-4} \times (0.05)} = 3.75 \times 10^3 \text{ kPa}$$



$$r = \sqrt{(41.67)^2 + (3.75)^2} = 41.84 \text{ MPa}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{3.75}{41.84 + 41.7} \right) = 2.57^\circ$$

Point E

$$\sigma_x = \sigma_{Ax} = 1.67 \times 10^5 \text{ kPa}$$

$$167 \text{ MPa} \leftarrow E \rightarrow 167 \text{ MPa}$$

9-10

$$\Sigma M_A = 0, 20(6.3) + 2.4 \left( \frac{4}{5} R_B \right) - 4.5 \left( \frac{3}{5} R_B \right) = 0$$

$$R_B = 161.5 \text{ kN}$$

$$H_B = 96.9 \text{ kN} \leftarrow$$

$$V_B = 129.2 \text{ kN} \uparrow$$

$$\Sigma F_x = 0, H_A = 76.9 \text{ kN} \rightarrow$$

$$\Sigma F_y = 0, V_A = 114.2 \text{ kN} \uparrow$$

section a-a

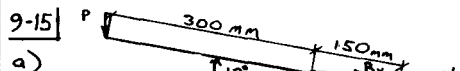
$$V = (114.2 - 76.9)(0.707) = 26.2 \text{ kN}$$

$$P = (114.2 + 76.9)(0.707) = 135.1 \text{ kN}$$

$$M = (114.2 - 76.9)(2.4) = 89.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{135.1}{(0.1)^2} = 13.5 \text{ MN/m}^2$$

$$\tau = \frac{3V}{2A} = \frac{3}{2} \times \frac{26.2}{(0.1)^2} = 3.93 \text{ MN/m}^2$$



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow B_x = 5 \text{ kN}$$

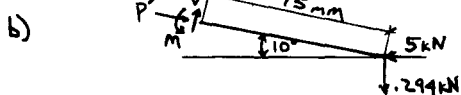
$$B_y = B_x \tan 10^\circ = 5 \text{ kN} (1.76) = .882 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_A = 0$$

$$P(450 \cos 10^\circ) - [882 \cos 10^\circ + 5 \sin 10^\circ] 150$$

$$P = .588 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \quad A_y = .882 - .588 = .294 \text{ kN}$$



$$P' = 5 \cos 10^\circ - .294 \sin 10^\circ = 4.87 \text{ kN}$$

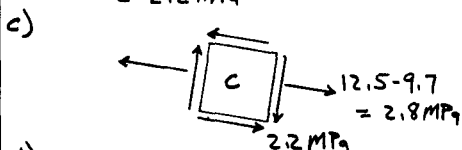
$$V = 5 \sin 10^\circ + .294 \cos 10^\circ = 1.16 \text{ kN}$$

$$M = 5(75 \sin 10^\circ) + .294(75 \cos 10^\circ) = 86.83 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$\bar{P} = \frac{P'}{A} = \frac{-4.87}{500} = -.010 \text{ kN/mm}^2 = -9.7 \text{ MPa}$$

$$\bar{M} = \frac{My}{I} = \frac{86.83(15)}{10 \times 50^3 \times \frac{1}{12}} = .013 \text{ kN/mm}^2 = 12.5 \text{ MPa}$$

$$\tau = \frac{VQ}{Ib} = \frac{1.16(10 \times 10 \times 20)}{10 \times 50^3 \times \frac{1}{12} \times 10} = .002 \text{ kN/mm}^2 = 2.2 \text{ MPa}$$



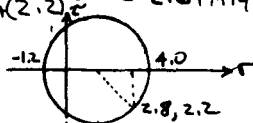
d) CENTER =  $\frac{2.8}{2} = 1.4 \text{ MPa}$

$$r = \sqrt{(1.4)^2 + (2.2)^2} = 2.6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 = 4.0 \text{ MPa}$$

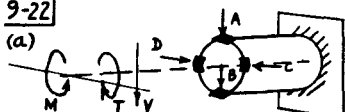
$$\sigma_2 = -1.2 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\max} = 2.6 \text{ MPa}$$

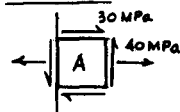


9-22

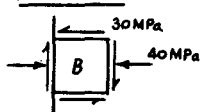
(a)



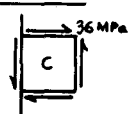
Point A



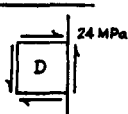
Point B



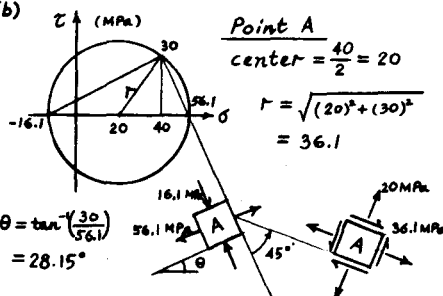
Point C



Point D



(b)



9-25]  $F_x = 135 \pi \text{ N}$ ,  $F_y = 180 \pi \text{ N}$

$$I = \frac{\pi (0.025)^4}{4} = 9.77 \times 10^{-8} \pi \text{ m}^4$$

$$J = \frac{\pi (0.025)^4}{2} = 1.95 \times 10^{-7} \pi \text{ m}^4$$

$$A = \pi (0.025)^2 = 6.25 \times 10^{-4} \pi \text{ m}^2$$

Point A

$$\sigma_A = \frac{F_x}{A} + \frac{M_{xx} \cdot x}{I} = \frac{180 \pi}{6.25 \times 10^{-4} \pi} + \frac{(180 \pi \times 0.375)(0.025)}{9.77 \times 10^{-8} \pi} = 17.0 \text{ MPa}$$

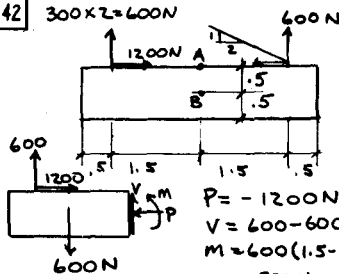
$$\tau_A = \frac{TC}{J} + \frac{VQ}{It} = \frac{135 \pi \times 0.375(0.025)}{1.95 \times 10^{-7} \pi} + \frac{135 \pi (6.25 \times 10^{-4} \pi / 2)(\frac{4 \times 0.025}{3 \pi})}{9.77 \times 10^{-8} \pi (0.05)} = -6.2 \text{ MPa}$$

Point B

$$\sigma_B = \frac{F_x}{A} + \frac{M_{xx} \cdot x}{I} = \frac{180 \pi}{6.25 \times 10^{-4} \pi} - \frac{(180 \pi \times 0.25)(0.025)}{9.77 \times 10^{-8} \pi} - \frac{(180 \pi \times 0.50)(0.025)}{9.77 \times 10^{-8} \pi} = -32.0 \text{ MPa}$$

$$\tau_B = \frac{TC}{J} = \frac{135 \pi \times 0.375(0.025)}{1.95 \times 10^{-7} \pi} = -6.5 \text{ MPa}$$

9-42]  $300 \times 2 = 600 \text{ N}$



$$\sigma_1 = \frac{360 \text{ kPa} \times 500 \text{ mm}}{6 \text{ mm}} = 30000 \text{ kPa} = 30 \text{ MPa}$$

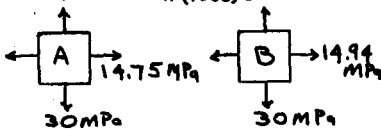
$$\sigma_2 = \frac{1}{2} \sigma_1 = 15 \text{ MPa}$$

POINT A  $\sigma_1 = 30 \text{ MPa}$

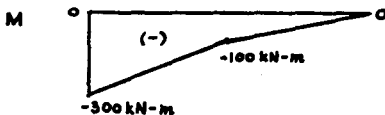
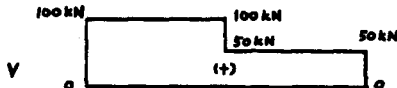
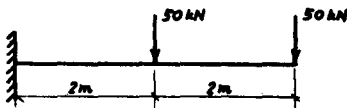
$$\sigma_2 = 15 \text{ MPa} + \frac{P}{A} + \frac{M}{I} = 15 - \frac{1200}{\pi (1000)^2} - \frac{9 \times 10^3 \times 500}{\pi (300)^3} = 14.75 \text{ MPa}$$

POINT B  $\sigma_1 = 30 \text{ MPa}$

$$\sigma_2 = 15 + \frac{P}{A} = 15 - \frac{1200}{\pi (1000)^2} = 14.94 \text{ MPa}$$



10-2



$$S = \frac{M}{\sigma_{all}} = \frac{300}{8400} = 3.57 \times 10^{-2} \text{ m}^3$$

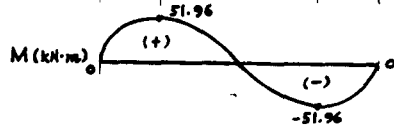
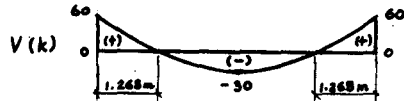
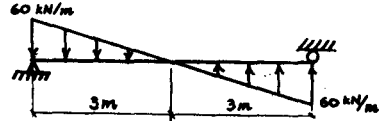
$$S = \frac{h^3}{12} = 3.57 \times 10^{-2}, \quad h = 0.754 \text{ m} \\ b = 0.377 \text{ m}$$

use a surfaced 0.40 m x 0.75 beam

$$\tau_{max} = \frac{3V}{2A} = \frac{3 \times 100}{2 \times 0.3} = 500 \text{ kPa} < \tau_{all} \therefore \text{O.K.}$$

Catatan:  
jawaban soal 10-12  
di halaman 28

10-14



$$S = \frac{M}{\sigma_{all}} = \frac{51.96}{8400} = 6.19 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

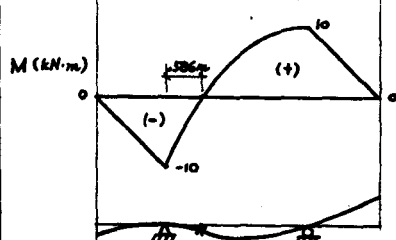
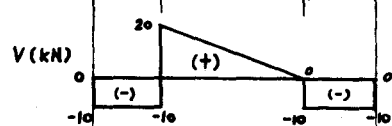
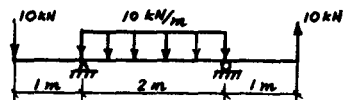
$$S = \frac{h^3}{12} = 6.19 \times 10^{-3}, \quad h = 0.42 \text{ m} \\ b = 0.21 \text{ m}$$

use a surfaced 0.25 m x 0.52 m beam

$$\tau_{max} = \frac{3V}{2A} = \frac{3 \times 60}{2 \times 0.13} = 693 \text{ kPa} < \tau_{all}$$

$\therefore \text{O.K.}$

10-21



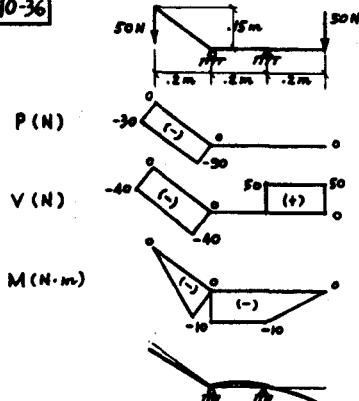
$$S = \frac{M}{\sigma_{all}} = \frac{10}{8400} = 1.19 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$S = \frac{h^3}{12} = 1.19 \times 10^{-3}, \quad h = 0.243 \text{ m} \\ b = 0.121 \text{ m}$$

use a surfaced  $0.15 \text{ m} \times 0.29 \text{ m}$  beam

$$\tau_{\max} = \frac{3V}{2A} = \frac{3 \times 20}{2 \times 0.044} = 690 \text{ kPa} < \tau_{\text{all}} \therefore \text{O.K.}$$

10-36



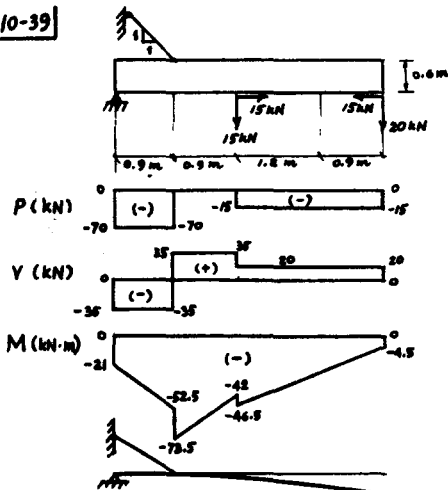
$$S = \frac{M}{\sigma_{\text{all}}} = \frac{10000}{90} = 111.11 \text{ mm}^3$$

$$S = \frac{\pi R^3}{4} = 111.11, \quad R = 5.21 \text{ mm}$$

use 11 mm diameter solid shaft

$$\tau_{\max} = \frac{4V}{3A} = \frac{4 \times 50}{3 \times (\pi \times 5.5^2)} = 0.70 \text{ MPa} < \tau_{\text{all}} \therefore \text{O.K.}$$

10-39



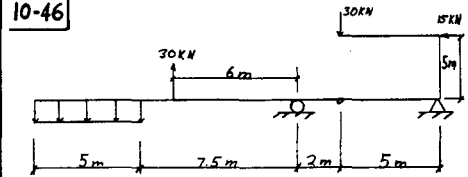
$$S = \frac{M}{\sigma_{\text{all}}} = \frac{73.5}{8400} = 8.75 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$S = \frac{b^3}{12} = 8.75 \times 10^{-3}, \quad h = 0.472 \text{ m}, \quad b = 0.236 \text{ m}$$

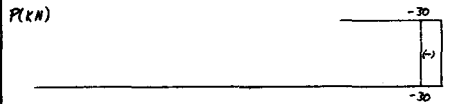
use a surfaced  $0.24 \text{ m} \times 0.47 \text{ m}$  beam

$$\tau_{\max} = \frac{3V}{2A} = \frac{3 \times 35}{2 \times 113} = 466 \text{ kPa} < \tau_{\text{all}} \therefore \text{O.K.}$$

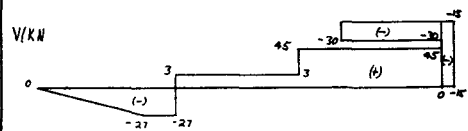
10-46



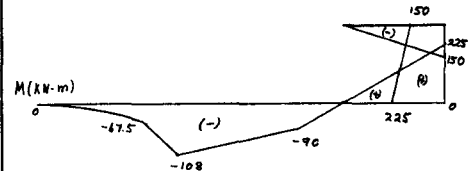
P(kN)



V(kN)



M(kN·m)



$$S = \frac{M}{\sigma_{\text{all}}} = \frac{(108)(1000)}{150 \times 10^3} = 720 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

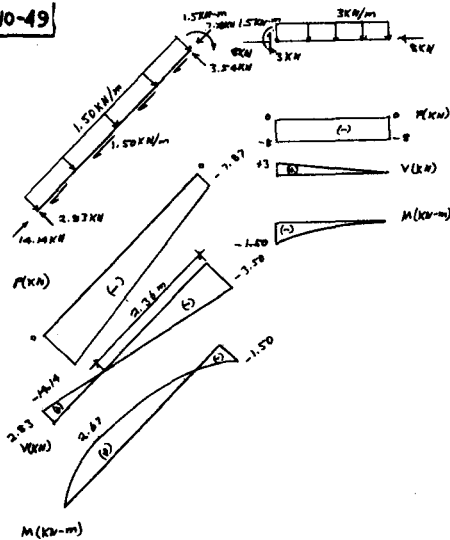
Select a W 360 x 51

$$f_{\max} = \frac{y}{\Delta_{\text{all}}} = \frac{45 \times 10^3}{(356)(7.3)} = 17.3 \text{ N/mm}^2$$

$< \tau_{\text{allow}}$

$\therefore \text{OK}$

10-49

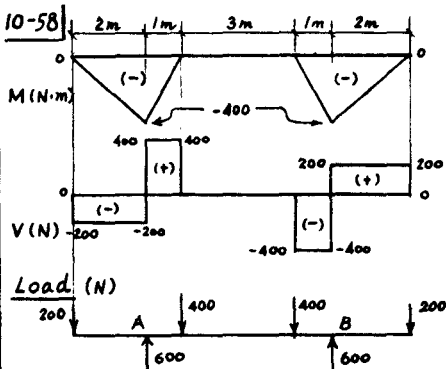


$$S = \frac{M}{\sigma_{allow}} = \frac{(2.83)(1000)^3}{10000} = 24.3 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

use C 100 x 8.0

$$\tau_{max} = \frac{V}{A_{web}} = \frac{(300)}{(4.720)(1.020 \times 10^{-3})} = 7.3 \text{ mpa} < \tau_{allow} \therefore \text{OK}$$

10-58

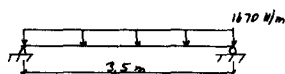


10-66

$$\text{Design } L = LL + DL = 3000 \text{ N/m} + 120 \text{ kg/m} \times 9.81 \text{ m/s}^2 = 4177 \text{ N/m}^2$$

$$(a) = 4177 \text{ N/m}^2$$

$$w = (4177)(1.4) = 1670 \text{ N/m}$$



$$M_{max} = \frac{wL^2}{8} = \frac{(1670)(3.5)^2}{8} = 2557 \text{ N-m}$$

$$V_{max} = \frac{wL}{2} = \frac{(1670)(3.5)}{2} = 2923 \text{ N}$$

$$S = \frac{M}{\sigma_{allow}} = \frac{(2557)(1000)^3}{8000000} = 319.6 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$S = \frac{I}{c} = \frac{1}{(82)(1.5)} = \frac{b^3}{6}, \quad h^3 = \frac{(319.6 \times 10^3)(6)}{50}$$

$$h = 196 \text{ mm}, \text{ use } 50 \times 200 \text{ mm joists}$$

$$\tau_{max} = \frac{3V}{2A} = \frac{3(2923)}{2(50 \times 200)} = 438 \text{ kN/m}^2 < \tau_{allow} \therefore \text{OK}$$

$$(b) w = 4177 \times 3.5 = 14619 \text{ N/m}$$

$$M_{max} = \frac{wL^2}{8} = \frac{(14619)(6)^2}{8} = 65788 \text{ N-m}$$

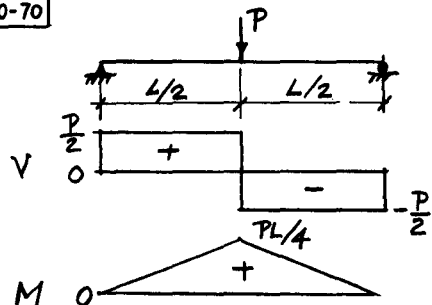
$$V_{max} = \frac{wL}{2} = \frac{(14619)(6)}{2} = 43859 \text{ N}$$

$$S = \frac{M}{\sigma_{allow}} = \frac{(65788)(1000)^3}{140000000} = 470 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

use W 310 x 40

$$\tau_{max} = \frac{V}{A_{web}} = \frac{43859}{(304)(1000)} = 24 \text{ mpa} < \tau_{allow} \therefore \text{OK}$$

10-70



$$I = \frac{1}{12} (150 \times 300^3 - 100 \times 150^3) = 309.4 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$(a) \text{ Shear in glue - } V = \frac{P_{all} I}{Q} = \frac{410 \times 10^3 \times I \times 2 \times 75}{(75 \times 100) \times 112.5 \times 10^6}$$

$$= 22550 \text{ N}$$

$$P = 2V = 2 \times 22.55 = 45.1 \text{ kN}$$

$$\text{Shear in plywood - } V = \frac{825 \times 10^3 \times I \times 2 \times 25 \times 10^{-6}}{[75 \times 100 \times 112.5 + 2 \times 25 \times 150 \times 75]} = 9076 \text{ N}$$

$$P = 2V = 18.2 \text{ kN GOVERNS}$$

$$(b) \sigma_{all} = \frac{Mc}{I} = \left( \frac{PL}{4} \right) \frac{c}{I} = 10 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$L = \frac{4 \times 10 I}{18200 \times 150} = 4533 \text{ mm} = 4.53 \text{ m}$$

$$(c) A = \frac{P}{\sigma_{all}} = \frac{9076}{2.8} = 3240 \text{ mm}^2$$



10-74

see shear and moment diagrams in Problem 10-73.

$$\bar{y} = \frac{(100 \times 25 \times 50) + 2(25 \times 25 \times 12.5)}{(100 \times 25) + 2(25 \times 25)}$$

$$= 37.5 \text{ mm from top}$$

$$I = \frac{25(100)^3}{12} + 100 \times 25 \times (12.5)^2 + 2 \left[ \frac{25(25)^3}{12} + 25 \times 25 \times (25)^2 \right]$$

$$= 3.32 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_{all} = \frac{Mc}{I} = \frac{45000 \omega (62.5)}{3.32 \times 10^6} = 3.5 \times 10^{-3}$$

$$\omega = 4.13 \times 10^{-3} \text{ kN/mm}$$

$$\tau_{glue} = \frac{VQ}{It} = \frac{300 \omega \times (25 \times 25 \times 25)}{3.32 \times 10^6 \times 25}$$

$$= 350 \times 10^{-6}$$

$$\omega = 6.20 \times 10^{-3} \text{ kN/mm}$$

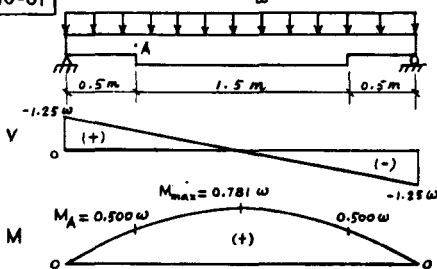
$$\tau_{pl.} = \frac{VQ}{It} = \frac{300 \omega \times (62.5 \times 25 \times 31.25)}{3.32 \times 10^6 \times 25}$$

$$= 700 \times 10^{-6}$$

$$\omega = 3.97 \times 10^{-3} \text{ kN/mm}$$

$\therefore$  maximum allowable  $\omega = 3.97 \text{ kN/m}$

10-81



$\omega$  as governed by  $M_{max}$ :

$$\sigma_{all} = \frac{M}{S} = \frac{0.781\omega}{\frac{(0.3)^3}{12}} = 10 \times 10^3$$

$$\omega = 28.81 \text{ kN/m}$$

$\omega$  as governed by  $M_n$ :

$$\sigma_{all} = \frac{M}{S} = \frac{0.5\omega}{\frac{(0.3)^3}{12} \times \frac{2}{2}} = 10 \times 10^3$$

$$\omega = 20.00 \text{ kN/m}$$

$\omega$  as governed by shear:

$$\tau_{all} = \frac{3V}{2A} = \frac{3 \times 1.25\omega}{2(0.15 \times 0.2)} = 10^3$$

$$\omega = 16.00 \text{ kN/m}$$

$\therefore$  allowable load is governed by shear,  $\omega_{all} = 16.00 \text{ kN/m}$

10-86

see moment diagram problem 10-85

$$M_z = 945 \text{ N-m}$$

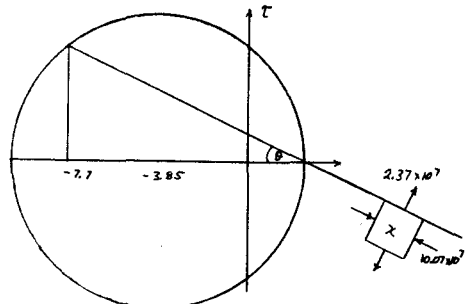
$$\sigma_{max} = \frac{Mc}{I} = \frac{(945)(0.025)}{\frac{\pi(0.025)^4}{4}}$$

$$= 7.7 \times 10^7 \text{ N/m}^2$$

$$\tau_{max} = \frac{TC}{J} = \frac{(1200)(0.025)}{\frac{\pi(0.025)^4}{4}}$$

$$= 4.89 \times 10^7 \text{ N/m}^2$$

$$\begin{aligned} \sigma &= 7.7 \times 10^7 \text{ N/m}^2 \\ \tau &= 4.89 \times 10^7 \text{ N/m}^2 \end{aligned}$$



$$\text{Center} = \frac{-7.7 \times 10^7}{2} = -3.85 \times 10^7 \text{ N/m}^2$$

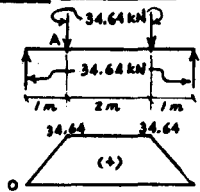
$$r = \sqrt{(3.85)^2 + (4.89)^2} = 6.22 \times 10^7 \text{ N/m}^2$$

$$\sigma_1 = 6.22 \times 10^7 - 3.85 \times 10^7 = 2.37 \times 10^7 \text{ N/m}^2$$

$$\sigma_2 = -6.22 \times 10^7 - 3.85 \times 10^7 = -10.07 \times 10^7 \text{ N/m}^2$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{4.89}{10.07} = 25.89^\circ$$

10-91 side view



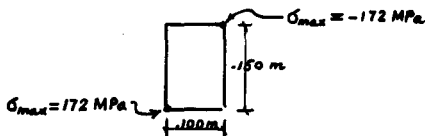
M (kN·m)

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{34.64 \times 0.075}{\left(\frac{0.1 \times 0.15^3}{12}\right)} + \pm \frac{20.0 \times 0.05}{\left(\frac{0.15 \times 0.1^3}{12}\right)}$$

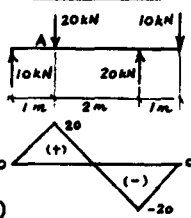
$$= \pm 92.38 \text{ MPa} \pm 80.00 \text{ MPa}$$

$$= \pm 172.38 \text{ MPa}$$

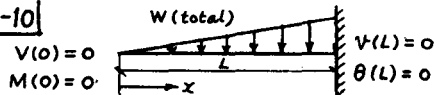
cross-section at A:



top view



11-10



$$\frac{1}{2} g' L^2 = -W, \quad g' = -\frac{2W}{L^2}, \quad g = -\frac{2Wx}{L^2}$$

$$v'''' = \frac{g}{EI} = -\frac{2Wx}{L^2} \cdot \frac{1}{EI}$$

$$v''' = -\frac{W}{EIL^2} x^2 + C_1 = \frac{V}{EI}$$

$$V(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$v'' = -\frac{W}{3EIL^2} x^3 + C_2 = \frac{M}{EI}$$

$$M(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$v' = -\frac{W}{12EIL^2} x^4 + C_3 = \theta(x)$$

$$\theta(L) = 0 \Rightarrow C_3 = \frac{WL^4}{12EIL^2} = \frac{WL^2}{12EI}$$

$$v = -\frac{W}{60EIL^2} x^5 + \frac{WL^2}{12EI} x + C_4$$

$$v(L) = 0 \Rightarrow C_4 = -\frac{WL^3}{15EI}$$

$$v(x) = -\frac{W}{60EIL^2} (x^5 - 5L^4x + 4L^5)$$

$$11-5 \quad EI v = \frac{M_0}{4L} (x^3 - x^2 L)$$

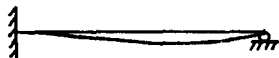
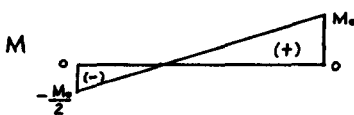
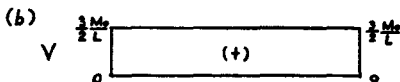
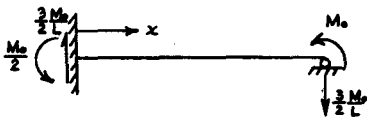
$$EI v' = \frac{M_0}{4L} (3x^2 - 2xL)$$

$$M(x) = EI v'' = \frac{M_0}{4L} (6x - 2L)$$

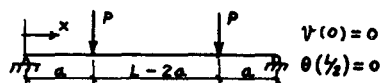
$$V(x) = EI v''' = \frac{M_0}{4L} (6) = \frac{3}{2} \frac{M_0}{L}$$

$$(a) \quad x = 0, \quad M(0) = -\frac{M_0}{2}$$

$$x = L, \quad M(L) = M_0$$



11-16

For  $0 \leq x \leq a$ ,  $M_1 = Px$ 

$$\theta_1 = \frac{1}{EI} \int M_1 dx = \frac{Px^2}{2EI} + C_1$$

$$v_1 = \int \theta_1 dx = \frac{Px^3}{6EI} + C_1 x + C_2$$

$$v(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

For  $a \leq x \leq L-a$ ,  $M_2 = Pa$ 

$$\theta_2 = \frac{1}{EI} \int M_2 dx = \frac{Pax}{EI} + C_3$$

$$\theta(\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow C_3 = -\frac{PaL}{2EI}$$

$$v_2 = \int \theta_2 dx = \frac{Pax^2}{2EI} - \frac{PaLx}{2EI} + C_4$$

At  $x = a$ ,  $\theta_1 = \theta_2$ 

$$\frac{Pa^3}{2EI} + C_1 = \frac{Pa^2}{EI} - \frac{PaL}{2EI}, \quad C_1 = \frac{Pa^2}{2EI} - \frac{PaL}{2EI}$$

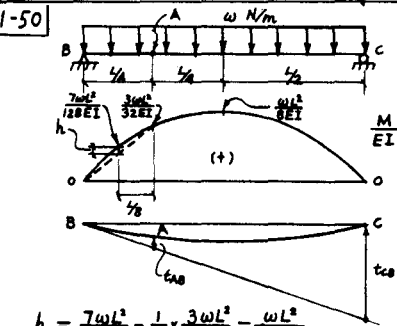
At  $x = a$ ,  $v_1 = v_2$ 

$$\frac{Pa^3}{6EI} + \frac{Pa^3}{2EI} - \frac{Pa^2L}{2EI} = \frac{Pa^3}{2EI} - \frac{Pa^2L}{2EI} + C_4$$

$$C_4 = \frac{Pa^3}{6EI}$$



11-50



$$h = \frac{7\omega L^3}{128EI} - \frac{1}{2} \times \frac{3\omega L^3}{32EI} = \frac{\omega L^3}{128EI}$$

$$t_{CB} = \frac{2}{EI} \left( \frac{2}{3} \times \frac{\omega L^3}{8} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \right) = \frac{\omega L^4}{24EI}$$

$$t_{AB} = \frac{2}{3} \times \frac{\omega L^4}{128EI} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{3\omega L^4}{32EI} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{12}$$

$$= \frac{7\omega L^4}{6144EI}$$

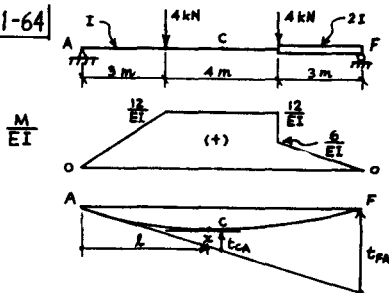
$$V_A = \frac{t_{CB}}{4} - t_{AB} = \frac{\omega L^4}{96EI} - \frac{7\omega L^4}{6144EI} = \frac{19\omega L^4}{2048EI} \quad (+)$$

$$\theta_B = \frac{t_{CB}}{L} = \frac{\omega L^3}{24EI}$$

$$\Delta\theta_{AB} = \frac{2}{3} \times \frac{\omega L^3}{128EI} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{3\omega L^3}{32EI} \times \frac{1}{4} = \frac{10\omega L^3}{768EI}$$

$$\theta_A = \theta_B - \Delta\theta_{AB} = \frac{\omega L^3}{24EI} - \frac{10\omega L^3}{768EI} = \frac{11\omega L^3}{384EI}$$

11-64



$$(a) \quad t_{FA} = \frac{1}{2} \left( \frac{12}{EI} \right) (3 \times 7 + 1) + \left( \frac{12}{EI} \right) (4 \times 3 + 2)$$

$$+ \frac{1}{2} \left( \frac{6}{EI} \right) (3 \times 2)$$

$$= \frac{402}{EI}$$

$$t_{CA} = \frac{1}{2} \left( \frac{12}{EI} \right) (3 \times 2 + 1) + \left( \frac{12}{EI} \right) (2 \times 1)$$

$$= \frac{78}{EI}$$

$$V_C = \frac{1}{2} t_{FA} - t_{CA}$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{402}{EI} \right) - \frac{78}{EI} = \frac{123}{EI} \quad (+)$$

(b)

$$\theta_x = \theta_A - \Delta\theta_{CA}$$

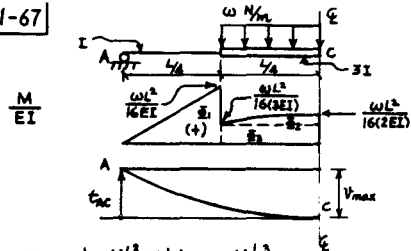
$$\theta_x = \frac{t_{FA}}{10} - \frac{1}{2} \left( \frac{12}{EI} \right) (3) - \left( \frac{12}{EI} \right) (2 - 3)$$

$$0 = \frac{40.2}{EI} - \frac{18}{EI} + \frac{36}{EI} - \frac{12L}{EI}$$

$$12L = 58.2$$

$$L = 4.85 \text{ m. from support A.}$$

11-67



$$\bar{\theta}_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\omega L^2}{16EI} \right) \left( \frac{1}{4} \right) = \frac{\omega L^3}{8(16EI)}$$

$$\bar{\theta}_2 = \frac{2}{3} \left( \frac{\omega L^2}{16EI} \right) \left( \frac{1}{4} \right) = \frac{\omega L^3}{36(16EI)}$$

$$\bar{\theta}_3 = \frac{\omega L^2}{3(16EI)} \left( \frac{1}{4} \right) = \frac{\omega L^3}{12(16EI)}$$

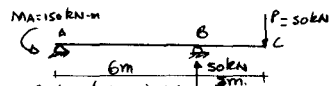
$$V_{max} = V_C$$

$$= t_{AC}$$

$$= \frac{\omega L^3}{16EI} \left[ \frac{1}{8} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{36} \left( \frac{1}{4} + \frac{5}{8} \times \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{12} \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \right) \right]$$

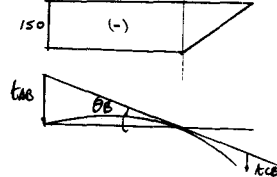
$$= \frac{73\omega L^4}{18432EI} \quad (+)$$

11-87



(a) Assume support is rigid.

M (kN-m)



$$t_{AB} = \frac{150}{EI} \times 6(3) = \frac{2700}{EI}$$

$$\theta_B = \frac{t_{AB}}{6} = \frac{2700}{6EI}$$

$$\theta_{C_1} = \theta_B + \Delta\theta_{BC} = \frac{2700}{6EI} + \frac{1}{2} \left( \frac{150}{EI} \right) (3)$$

$$= \frac{4050}{6 \times 10^3 \times 400} = 0.0085 \text{ rad.}$$

$$t_{CB} = \frac{1}{2} \left( \frac{150}{EI} \right) (3) \left( \frac{3}{2} \right) = \frac{450}{EI}$$

$$V_{C_1} = \frac{1}{2} t_{AB} + t_{CB} = \frac{2700}{2EI} + \frac{450}{EI} = 22.5 \text{ mm.}$$

(b) Due to flexibility of springs.

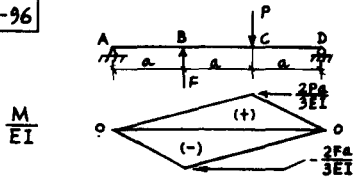
$$\theta_{C_2} = \frac{15.625}{6 \times 10^3} = 0.0026 \text{ rad}$$

$$V_{C_2} = 15.625 \left( \frac{3}{2} \right) = 23.4 \text{ mm.}$$

$$V_C = V_{C_1} + V_{C_2} = 45.9 \text{ mm.}$$

$$\theta_C = \theta_{C_1} + \theta_{C_2} = 0.0106 \text{ rad.}$$

11-96



$$t_{BA} = \frac{1}{2} \left( \frac{2Pa}{3EI} \right) \left( a \left( \frac{2}{3}a \right) \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{2Pa}{3EI} \right) \left( 2a \left( a + \frac{2a}{3} \right) \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{2Fa}{3EI} \right) \left( 2a \left( \frac{2}{3}a \right) \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{2Fa}{3EI} \right) \left( a \left( 2a + \frac{a}{3} \right) \right)$$

$$= \frac{12Pa^3}{9EI} - \frac{15Fa^3}{9EI}$$

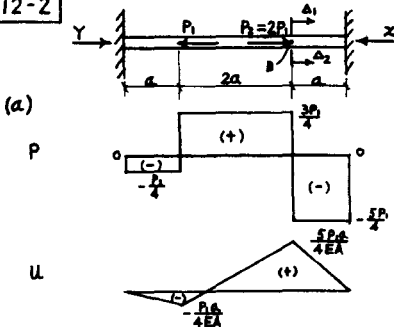
$$t_{BA} = \frac{1}{2} \left( \frac{Pa}{3EI} \right) \left( a \left( \frac{a}{3} \right) \right) + \frac{1}{2} \left( -\frac{2Fa}{3EI} \right) \left( a \left( \frac{a}{3} \right) \right)$$

$$t_{BA} = 3 t_{BA}$$

$$\frac{12Pa^3}{9EI} - \frac{15Fa^3}{9EI} = \frac{Pa^3}{6EI} - \frac{Fa^3}{3EI}$$

$$\frac{7Pa^3}{6EI} = \frac{4Fa^3}{3EI}, \quad F = \frac{7}{8}P$$

12-2

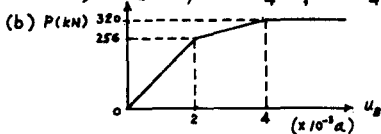


statics:  $x - 2P + P_1 - Y = 0 \dots\dots(1)$

geometry:  $\Delta_1 = \Delta_2$

$$\frac{x(a)}{EA} = \frac{(2P - x)(2a)}{EA} - \frac{Y(a)}{EA} \dots\dots(2)$$

solving (1) & (2),  $x = \frac{5P}{4}$ ,  $Y = \frac{P}{4}$



$$\sigma_{yp} A = 400 \times 400 = \left( \frac{5}{4} \frac{P}{2} \right)$$

$$P_{yp} = 256 \text{ kN}$$

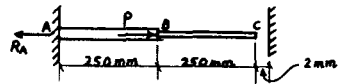
$$U_{yp} = \frac{400(a)}{2 \times 10^5} = 2 \times 10^{-3} a$$

$$P_{ult} = 160 = 160$$

$$P_{ult} = 320 \text{ kN}$$

$$U_{ult} = \frac{400(2a)}{2 \times 10^5} = 4 \times 10^{-3} a$$

12-8



Rod AB:

$$P_{yp} = \sigma_{yp} A = 200 \times 200 = 40 \text{ kN}$$

$$U_{yp} = \frac{\sigma_{yp} L}{E} = \frac{200 \times 250}{2 \times 10^5} = 0.25 \text{ mm}$$

Rod BC:

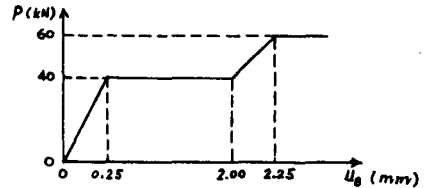
$$P_{yp} = \sigma_{yp} A = 200 \times 100 = 20 \text{ kN}$$

$$U_{yp} = \frac{\sigma_{yp} L}{E} = \frac{200 \times 250}{2 \times 10^5} = 0.25 \text{ mm}$$

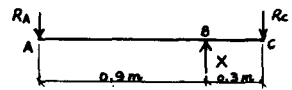
$$P_{ult} = 40 + 20 = 60 \text{ kN}$$

$$U_B \text{ at } U_B = (U_{yp})_{BC} + \text{gap}$$

$$= 0.25 + 2 = 2.25 \text{ mm}$$

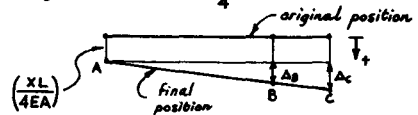


12-26



$$\sum M_C = 0, \quad R_A = \frac{X}{4}$$

$$\sum F_3 = 0, \quad R_C = \frac{3X}{4}$$



by geometry:  $\Delta_B = \frac{3}{4} \Delta_C$

$$-\frac{XL}{EA} + d(\delta T)L - \frac{(XL)}{4EA} = \frac{3}{4} \left[ \frac{3XL}{4EA} - d(\delta T)L - \frac{(XL)}{4EA} \right]$$

$$\frac{13}{8} \left( \frac{XL}{EA} \right) = \frac{7}{4} d(\delta T)$$

$$X = \frac{56}{52} \times (10^5) \times 50 \times 8 \times 10^6 \times (1200) \times 10^{-3} = 51.69 \text{ kN}$$

$$R_C = \frac{3}{4} X = \frac{3}{4} \times 51.69 = 38.77 \text{ kN (tension)}$$

12-37



Statics:  $T_A + T_2 - T_1 - T_3 = 0$

Geom:  $\theta_B = 0$

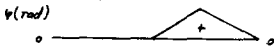
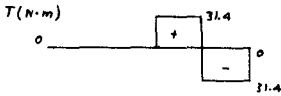
$$J_1 = \left( \frac{80}{67.3} \right)^4 \cdot 2 J_2$$

$$\frac{T_B(500)}{2 \times 6} - \frac{(T_B - T_D)(250)}{2 \times 6} + \frac{T_D(250)}{2 \times 6} = 0$$

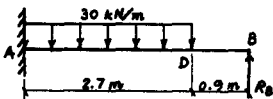
$$(T_B - 31.4) - (62.5 - T_D) + T_D = 0$$

$$T_B = 31.4 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$T_D = 0$$



12-45



$$(V_B)_p = \theta_B(0.9) + V_B = \frac{30(2.7)^3}{6EI}(0.9) + \frac{30(2.7)}{8EI}$$

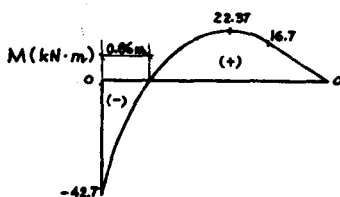
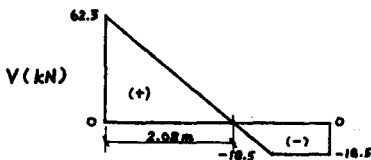
$$= \frac{287.86}{EI}$$

$$(V_B)_s = \frac{R_B L^3}{3EI} = \frac{R_B(3.6)^3}{3EI} = \frac{15.55 R_B}{EI}$$

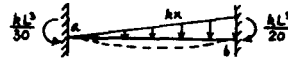
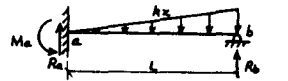
$$V_B = \frac{15.55 R_B}{EI} - \frac{287.86}{EI} = 0, \quad R_B = 18.5 \text{ kN}(\uparrow)$$

$$R_A = 81 - 18.5 = 62.5 \text{ kN}(\uparrow)$$

$$M_A = 30(2.7)\left(\frac{2.7}{2}\right) - 18.5(3.6) = 42.7 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



12-49



$$M_{A1} = \left(\frac{3EI}{L}\right)\theta_{A1}$$

$$\theta_{A2} = \frac{\theta_{B2}}{2}, \quad M_{B2} = \left(\frac{3EI}{L}\right)\theta_{B2}$$

$$\text{geometry: } \theta_A = -\theta_{A1} + \theta_{A2} = 0$$

$$\theta_{A1} = \theta_{A2} = \frac{\theta_{B2}}{2} \quad (1)$$

$$\text{Statics: } M_A = \frac{kL^3}{30} - M_{A1}$$

$$M_A = -\frac{kL^3}{30} - \left(\frac{3EI}{L}\right)\theta_{A1} \quad (2)$$

$$M_B = 0 = -\frac{kL^3}{20} + M_{B2}$$

$$0 = -\frac{kL^3}{20} + \left(\frac{3EI}{L}\right)\theta_{B2} \quad (3)$$

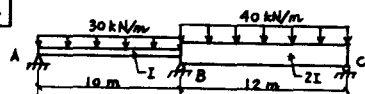
$$\text{solving (3), } \theta_{B2} = \frac{kL^4}{60EI}$$

$$\text{solving (1), } \theta_{A1} = \theta_{A2} = \frac{kL^4}{120EI}$$

$$\text{solving (2), } M_A = -\frac{kL^3}{30} - \frac{kL^3}{40} = -\frac{7kL^3}{120}$$

$$\Sigma M_A = -\frac{7kL^3}{120}, \quad R_B = \frac{11kL^2}{40}(\uparrow), \quad \Sigma F_y = 0, \quad R_A = \frac{9kL^2}{40}(\uparrow)$$

12-54



sign conventions:  $\left. \begin{array}{l} \text{moment } \curvearrowright \\ \text{rotation } \curvearrowright \end{array} \right\} \text{ for all ends}$

| member             | AB               | BC               |
|--------------------|------------------|------------------|
| $\frac{2EI}{L}$    | $\frac{2EI}{10}$ | $\frac{4EI}{12}$ |
| relative stiffness | 3                | 5                |

fixed end moment:

$$M_{FAB} = \frac{wL^2}{12} = \frac{30(10)^2}{12} = 250 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{FBA} = -250 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{FBC} = \frac{wL^2}{12} = \frac{40(12)^2}{12} = 480 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{FCB} = -480 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

applying the slope-deflection eqn.,

$$\text{At joint A: } M_{AB} = M_{FAB} + \frac{2EI}{L}(-2\theta_A - \theta_B)$$

$$M_{AB} = 0 = 250 + 3(-2\theta_A - \theta_B) \quad (1)$$

At joint B:  $M_{Ba} + M_{Bc} = 0$

$$-250 + 3(-2\theta_B - \theta_A) + 480 + 5(-2\theta_B - \theta_C) = 0$$

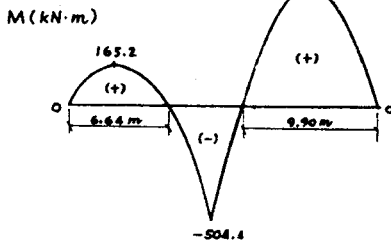
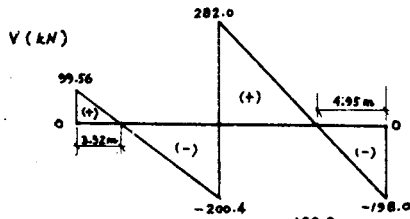
$$16\theta_B + 3\theta_A + 5\theta_C = 230 \quad \text{---(2)}$$

At joint C:  $M_{Ca} = 0$

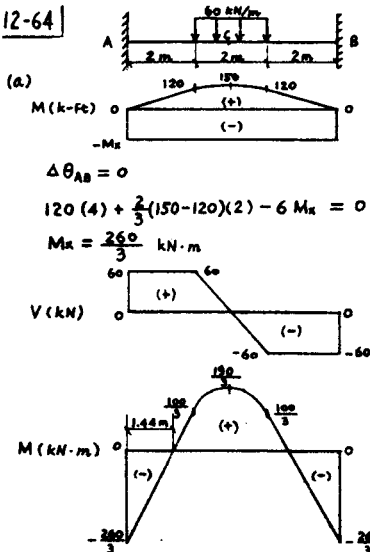
$$-480 + 5(-2\theta_C - \theta_B) = 0 \quad \text{---(3)}$$

solving (1), (2) & (3),  $\theta_A = 27.29$ ,  $\theta_B = 28.75$

$$M_{Ba} = -250 - 3(2 \times 28.75 + 27.29) = -504.4 \text{ kNm}$$



12-64

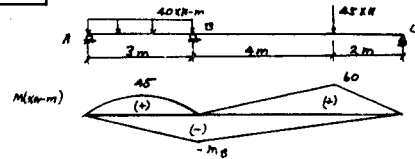


(b)

$$V_{max} = V_0$$

$$= \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2}(120 \times 2 \times \frac{5}{3}) + \frac{2}{3}(50 \times 1 \times \frac{3}{2} \times 1) + (120 \times \frac{1}{2}) \right. \\ \left. - \frac{260}{3}(3 \times \frac{3}{2}) \right] = -\frac{122.5}{EI}$$

12-73



$$t_{AB} = \frac{2}{3}(2 \times 45) \left\{ 1.5 \right\} - \frac{1}{2}(2 \times M_B) \left\{ 2 \right\}$$

$$= 135 - 3M_B$$

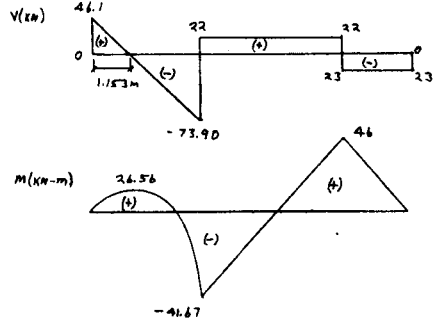
$$t_{CB} = \frac{1}{2}(60 \times 6) \left\{ \frac{3+6}{3} \right\} - \frac{1}{2}(6 \times M_B) \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

$$= 480 - 12M_B$$

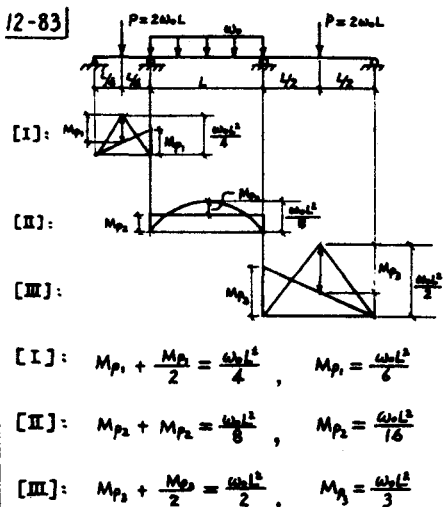
$$\theta_B = -\theta_C$$

$$\frac{135 - 3M_B}{3} = \frac{480 - 12M_B}{6}$$

$$M_B = 41.67 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



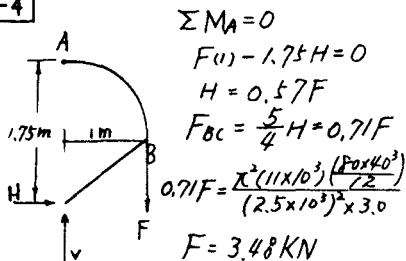
12-83



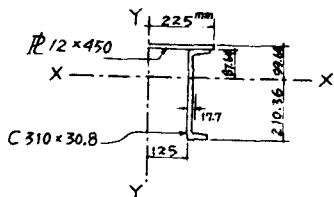
case [III] is most critical,

$$\therefore \text{governing } M_P = \frac{60kL^2}{3}$$

13-4



13-19



$A_{\text{total}} = 12 \times 450 + 2 \times 3929 = 13528 \text{ mm}^2$   
 $\bar{y} = \frac{-12 \times 450 \times 6 + 2 \times 3929 \times 155}{13528} = 87.64 \text{ mm}$   
 $I_{yy} : I_{op} = \frac{12 \times (450)^3}{12} = 91.125 \times 10^6 \text{ mm}^4$   
 $I_{oc} = 2 \times 1.61 \times 10^6 = 3.22 \times 10^6$   
 $(A r^2)_c = 2 \times 3929 \times (142.7)^2 = 160.015 \times 10^6$   
 $I_{yy} = \Sigma I = 254.36 \times 10^6 \text{ mm}^4$   
 $I_{xx} : I_{op} = \frac{1}{12} (450)(12)^3 = 0.648 \times 10^6$   
 $I_{oc} = 2 \times 53.7 \times 10^6 = 107.4 \times 10^6$   
 $(A r^2)_p = 12 \times 450 \times (93.64)^2 = 47.35 \times 10^6$   
 $(A r^2)_c = 2 \times 3929 \times (67.36)^2 = 35.65 \times 10^6$   
 $I_{xx} = \Sigma I = 190.469 \times 10^6 \text{ mm}^4$   
 $r_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A_{\text{total}}}} = \sqrt{\frac{190.469 \times 10^6}{13528}} = 118.66 \text{ mm}$   
 $\frac{L}{r_{\min}} = \frac{6000}{118.66} = 50.57$

13-25

$A_{\text{total}} = 60710 + 2(600 \times 75) = 150710 \text{ mm}^2$   
 $I_{xx} : I_{op} = 2 \times \frac{600 \times (75)^3}{12} = 42.19 \times 10^6$   
 $(A r^2)_p = 2 \times 600 \times 75 \times \left( \frac{427}{2} + \frac{75}{2} \right)^2 = 5670 \times 10^6$   
 $I_{ox} = 1720 \times 10^6$   
 $I_{xx} = \Sigma I = 7432.19 \times 10^6 \text{ mm}^4$   
 $I_{yy} : I_{op} = 2 \times \frac{75 \times (600)^3}{12} = 2700 \times 10^6$   
 $I_{oy} = 683 \times 10^6$   
 $I_{yy} = \Sigma I = 3383 \times 10^6 \text{ mm}^4$

$$r_{\min} = \sqrt{3383 \times 10^6 / 150710} = 149.82 \text{ mm}$$

$$L/r = 6000 / 149.82 = 40.05$$

$$C_c = \sqrt{2\pi^2 \times 2 \times 10^5 / 290} = 116.7 > L/r$$

$$F.S. = \frac{5}{3} + \frac{3 \times 40.05}{8(116.7)} - \frac{40.05^3}{8(116.7)^3} = 1.79$$

$$\sigma_{\text{allow}} = \left[ 1 - \frac{40.05^2}{2(116.7^2)} \right] \frac{290}{1.79} = 152.47 \text{ MPa}$$

$$P_{\text{allow}} = 152.47 \times 150710 \text{ N} = 22978.83 \text{ kN}$$

13-34 try for w 200x46 with

$$A = 4005884 \text{ mm}^2, S_{xx} = 451 \times 10^6 \text{ mm}^3, r_{\min} = 0.0512 \text{ m}$$

$$f_a = \frac{P}{A} = \frac{370}{0.005984} = 62882.4 \text{ kPa}$$

$$f_b = \frac{M}{S_{xx}} = \frac{110 \times 0.15}{451 \times 10^6} = 36585.4 \text{ kPa}$$

$$\left( \frac{L}{r} \right) = \frac{4.3}{0.0512} = 84 < C_c = 126$$

$$F.S. = \frac{5}{3} + \frac{3}{8} \left( \frac{84}{126} \right) - \frac{1}{8} \left( \frac{84}{126} \right)^3 = 1.88$$

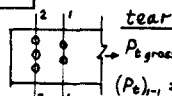
$$F_a = \frac{1}{2} \left( \frac{84}{126} \right)^2 \frac{250 \times 10^3}{1.88} = 103.4 \times 10^3$$

$$F_b = 52.67 \times 10^3$$

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{f_b}{F_b} = \frac{62882.4}{103.4 \times 10^3} + \frac{36585.4}{52.67 \times 10^3} = 0.85 < 1$$

∴ O.K.

14-5 13 mm x 250 mm main plate :



$$P_{\text{gross}} = (13 \times 250 \times 140) \times 10^{-3} = 455 \text{ kN}$$

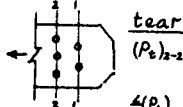
$$(P_t)_{1-1} = (13 \times 250 - 2 \times 25 \times 140) \times 10^{-3} = 364 \text{ kN}$$

$$\frac{3}{2}(P_t)_{2-2} = (13 \times 250 - 3 \times 25 \times 140) \times 10^{-3}, (P_t)_{2-2} = 531 \text{ kN}$$

$$\text{bearing } P_b = 5(22 \times 13 \times 340) \times 10^{-3} = 486 \text{ kN}$$

$$\text{shear } P_s = 10(\pi \times 11^2 \times 100) \times 10^{-3} = 380 \text{ kN}$$

7 mm x 250 mm cover plate :



$$(P_t)_{2-2} = 2(7 \times 250 - 3 \times 25 \times 140) \times 10^{-3} = 343 \text{ kN}$$

$$\frac{4}{3}(P_t)_{1-1} = 2(7 \times 250 - 2 \times 25 \times 140) \times 10^{-3}$$

$$(P_t)_{1-1} = 980 \text{ kN}$$

$$(P_t)_{2-2} \text{ of cover plate governs. } \therefore P = 343 \text{ kN}$$

$$\text{Efficiency} = \frac{343}{455} \times 100\% = 75.4\%$$



14-11 For each single bolt used:

shear  $P_s = 2 \left( \frac{\pi}{4} \right) (22 \times 10^{-3})^2 (100) 10^6 = 76.0 \text{ kN}$

$n = \frac{P}{P_s} = \frac{450}{76} = 5.92$

∴ use 3ix 22mm bolts on each main plate.

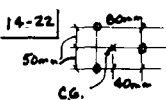
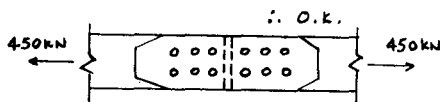
check tear: main plate

$P_{C1-1} = 25(200 - 2 \times 25) 150 = 562.5 \text{ kN}$   
 $P_{C2-1} = \frac{6}{4} (25)(200 - 2 \times 25) 150 = 843.8 \text{ kN}$   
 $P_{C3-3} = \frac{6}{2} (25)(200 - 2 \times 25) 150 = 1687.6 \text{ kN}$

200mm x 25mm PL

cover plates

$P_{C1-1} = 2(12)(200 - 2 \times 25) 150 = 540 \text{ kN}$   
 $P_{C2-2} = 2 \left( \frac{6}{4} \right) (12)(200 - 2 \times 25) 150 = 810 \text{ kN}$   
 $P_{C3-3} = 2 \left( \frac{6}{2} \right) (12)(200 - 2 \times 25) 150 = 1620 \text{ kN}$



$\bar{x} = \frac{2(50)(80)}{2000} = 40 \text{ mm}$

$d = \frac{50}{2000(10^{-6})} = 25 \text{ MPa (t)}$

$T = 50(120 + 40) 10^{-3} = 8 \text{ kN} \cdot \text{m (rv)}$

$f_{tc} = \frac{8(40) 10^{-3}}{2(500) 10^{-6} [(40^2 + 50^2) 10^{-6}] + 1000(10^{-3})(40 \times 10^{-3})^2} = 56.14 \text{ MPa (t)}$

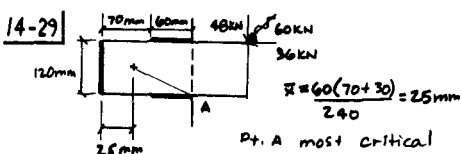
$f_{tA} = \frac{8(50) 10^{-3}}{2(500) 10^{-6} [(40^2 + 50^2) 10^{-6}] + 1000(10^{-3})(40 \times 10^{-3})^2} = 70.18 \text{ MPa (t)}$

$f_{tA} = \frac{8(40) 10^{-3}}{2(500) 10^{-6} [(40^2 + 50^2) 10^{-6}] + 1000(10^{-3})(40 \times 10^{-3})^2} = 56.14 \text{ MPa (t)}$

$f_{c \text{ total}} = 25 + 56.14 = 81.14 \text{ MPa}$

$f_{t \text{ total}} = f_{tA} = [(56.14 - 25)^2 + 70.18^2]^{1/2} = 76.78 \text{ MPa}$

Rivet C most critical.



$J = 2 \left( \frac{60^3}{12} + 60 \times 60^2 + 60 \times 75^2 \right) + \left( \frac{120^3}{12} + 120 \times 25^2 \right)$   
 $= 1.362(10^6) \text{ mm}^4$

$q_{dNA} = \frac{36}{240} = 150 \text{ N/mm (→)}, q_{dYA} = \frac{48}{240} = 200 \text{ N/mm (↑)}$

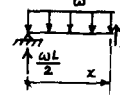
$T = 48(185) - 36(60) = 6720 \text{ kN} \cdot \text{mm}$

$q_{rNA} = \frac{6720(60)}{1.362(10^6)} = 296 \text{ N/mm}, q_{rYA} = \frac{6720(185)}{1.362(10^6)} = 518 \text{ N/mm}$

$q_A = [(150 + 296)^2 + (200 + 518)^2]^{1/2} = 845 \text{ N/mm}$

$w = \frac{q_A}{45(70.7)} = 0.24 \text{ mm}, \therefore \text{use } 9 \text{ mm welds}$

15-5  $\sigma_{max} = \frac{M_{max} C}{I} = \frac{\omega L^2 (\frac{h}{2})}{I} = \frac{\omega L^2 h}{16 I}$



$M_x = \frac{\omega x}{2} (L - x)$

$U = \int_0^L \frac{M_x^2}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \int_0^L M_x^2 dx$

$U = \frac{1}{2EI} \int_0^L \frac{\omega^2 x^2}{4} (L^2 - 2Lx + x^2) dx$

$= \frac{\omega^2}{8EI} \int_0^L (L^2 x^2 - 2Lx^3 + x^4) dx$

$= \frac{\omega^2 L^5}{8EI} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right)$

$= \frac{\omega^2 L^5}{8 \times 30 EI}$

$= \left( \frac{\omega L^2 h}{16 I} \right)^2 \frac{16^2 (\frac{bh^3}{12})}{h^2} \frac{L}{8 \times 30 E} = \frac{\sigma_{max}^2}{2E} \left( \frac{8}{45} AL \right)$

15-17  $15.3 \text{ kg} = 150 \text{ N}$   
 $\Delta_{sc} = \frac{WL^3}{48EI} = \frac{(150)(1 \times 10^3)^3}{48(20 \times 10^6)(50)^4} = 0.3$

(a) Impact factor  $= 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 60}{0.03}} = 64.25$

$\Delta_{max} = 0.3 \times 64.25 = 193 \text{ mm}$

$(\sigma_{max})_{sc} = \frac{M}{S} = \frac{WL}{4S} = \frac{150(10^3)}{4(\frac{1}{2} \times 50^4)} = 1.8 \text{ MPa}$

$\sigma_{max} = 1.8(64.25) = 115.66 \text{ MPa}$

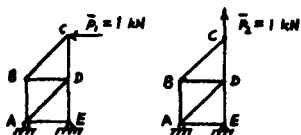
(b)  $\Delta_{sc} = \Delta_b + \Delta_s = 0.3 + \frac{75}{300} = 0.28 \text{ mm}$

Impact factor  $= 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 60}{0.28}} = 21.73$

$\Delta_{max} = 0.28 \times 21.73 = 6.08 \text{ mm}$

$\sigma_{max} = 1.8(21.73) = 39.11 \text{ MPa}$

15-22



| Member | $\bar{P}_1$ (kN) | $\bar{P}_2$ (kN) | $P$ (kN)     | $\bar{P}_1 P$ | $\bar{P}_2 P$ |
|--------|------------------|------------------|--------------|---------------|---------------|
| CB     | $-\sqrt{2}$      | 0                | $-\sqrt{2}P$ | $2P$          | 0             |
| CD     | +1               | +1               | $+P$         | $P$           | $P$           |
| BD     | +1               | 0                | $+P$         | $P$           | 0             |
| BA     | -1               | 0                | $-P$         | $P$           | 0             |
| DA     | $-\sqrt{2}$      | 0                | $-\sqrt{2}P$ | $2P$          | 0             |
| DE     | 2                | +1               | $2P$         | $4P$          | $2P$          |
| AE     | 1                | 0                | $P$          | $P$           | 0             |

$$1 \times \Delta_H = \sum \bar{P}_1 \left( \frac{PL}{AE} \right)$$

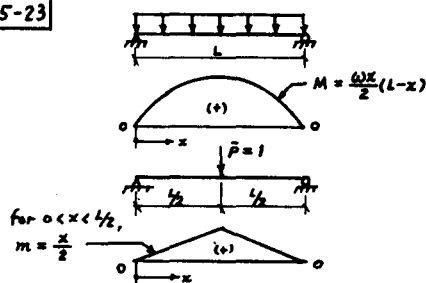
$$\Delta_H = \frac{PL}{AE} [2\sqrt{2} + 1 + 1 + 1 + 2\sqrt{2} + 4 + 1]$$

$$= \frac{10 \times 4}{1} (8 + 4\sqrt{2}) = 160(2 + \sqrt{2}) \quad (\leftarrow)$$

$$1 \times \Delta_V = \sum \bar{P}_2 \left( \frac{PL}{AE} \right)$$

$$\Delta_V = \frac{PL}{AE} [1 + 2] = \frac{10 \times 4}{1} (3) = 120 \quad (\uparrow)$$

15-23



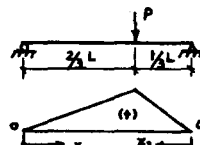
$$1 \times \Delta_{max} = \int_L \frac{mM}{EI} dx$$

$$\Delta_{max} = 2 \int_0^{L/2} \frac{1}{EI} \left( \frac{x}{2} \right) \left( \frac{wx}{2} \right) (L-x) dx$$

$$= 2 \left( \frac{w}{EI} \right) \left[ \frac{L(\frac{x}{2})^3}{12} - \frac{(\frac{x}{2})^4}{16} \right]$$

$$= \frac{5wL^4}{384EI} \quad (\downarrow)$$

15-25



$$\text{For } 0 < x_1 < \frac{1}{2}L, \quad M = \frac{Px_1}{3}, \quad m = \frac{x_1}{3}$$

$$\text{For } 0 < x_2 < \frac{1}{2}L, \quad M = \frac{2Px_2}{3}, \quad m = \frac{2x_2}{3}$$

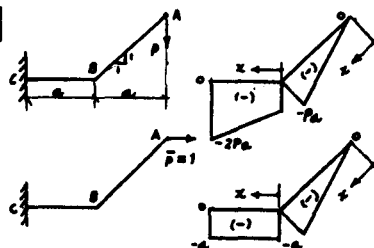
$$1 \times \Delta = \int_L \frac{mM}{EI} dx$$

$$\Delta = \int_0^{1/2} \frac{Px_1^2}{9EI} dx_1 + \int_{1/2}^L \frac{Px_2^2}{18EI} dx_2 + \int_0^{1/2} \frac{4Px_2^2}{18EI} dx_2$$

$$= \frac{P}{27EI} \left[ \frac{(\frac{L}{3})^3}{3} + \frac{1}{2} \left( \frac{2L}{3} \right)^3 - \frac{1}{2} \left( \frac{L}{3} \right)^3 + 2 \left( \frac{L}{3} \right)^3 \right]$$

$$= \frac{13PL^3}{1458EI} \quad (\downarrow)$$

15-31



$$(a) \text{ From A to B, } M = -\frac{P}{\sqrt{2}}x, \quad m = -\frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$\text{From B to C, } M = -P(a+x), \quad m = -a$$

$$1 \times \Delta_H = \int_L \frac{mM}{EI} dx$$

$$\Delta_H = \frac{P}{2EI} \int_0^a x^2 dx + \frac{P}{EI} \int_a^L (a^2 + ax) dx$$

$$= \frac{Pa^3}{EI} \left( \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{3}{2} \right) \quad (\rightarrow)$$

(b)

$$\text{from A to B, } m = -1$$

$$\text{from B to C, } m = -1$$

$$1 \times \theta_A = \int_L \frac{mM}{EI} dx$$

$$\theta_A = \frac{P}{EI} \int_0^a \frac{x}{\sqrt{2}} dx + \frac{P}{EI} \int_a^L (a+x) dx$$

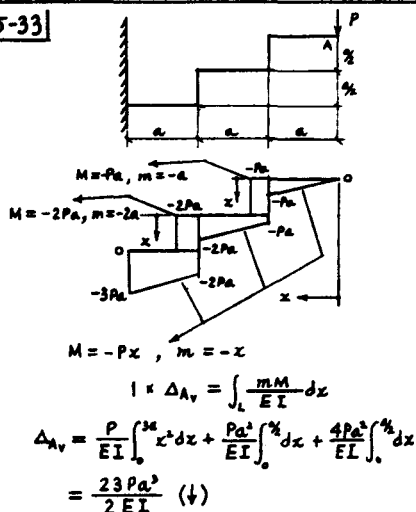
$$= \frac{Pa^2}{EI} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{Pa^2}{2EI} (\sqrt{2} + 3) \quad (2)$$

$$\text{from A to B, } m = 0$$

$$\text{from B to C, } m = -1$$

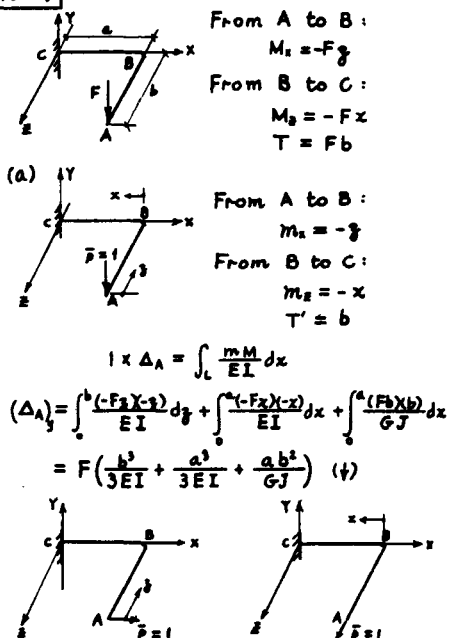
$$\theta_B = \frac{P}{EI} \int_0^a (a+x) dx = \frac{3Pa^2}{2EI} \quad (2)$$

15-33



The method of virtual work is more convenient and more efficient to apply than the method based on solving D.E., especially for 2-D & 3-D problems.

15-39



From A to B :

$$m_1 = z$$

From B to C :

$$m_2 = -x$$

$$\therefore (\Delta_A)_1 = 0$$

From A to B :

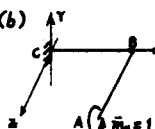
$$m_2 = m_1 = 0$$

From B to C :

$$m_3 = -x$$

$$\therefore (\Delta_A)_2 = 0$$

(b)



From A to B :

$$m_1 = -1$$

From B to C :

$$m_2 = 0$$

$$T' = 1$$

$$(\theta_A)_1 = \int_0^b \frac{Fz}{EI} dz + \int_0^a \frac{Fb}{GJ} dz$$

$$= F \left( \frac{b^2}{2EI} + \frac{ab}{GJ} \right)$$



From A to B :

$$m_1 = 0$$

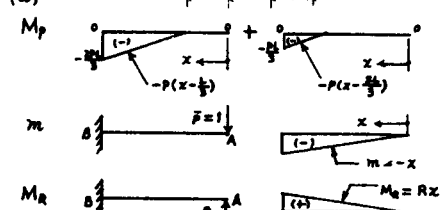
From B to C :

$$m_2 = -1, T' = 0$$

$$(\theta_A)_2 = \int_0^a \frac{Fz}{EI} dz = \frac{Fa^2}{2EI}, \quad (\theta_A)_3 = 0$$

15-41

(a)



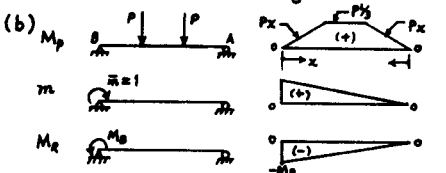
$$1 \times \Delta_p = \frac{P}{EI} \int_0^L \left( x - \frac{L}{3} \right) x dx + \frac{P}{EI} \int_0^L \left( x - \frac{2L}{3} \right) x dx$$

$$= \frac{2PL^3}{9EI} \quad (\dagger)$$

$$1 \times \Delta_R = \frac{R}{EI} \int_0^L (-x^2) dx = -\frac{RL^3}{3EI} \quad (\ddagger)$$

$$\Delta_p + \Delta_R = 0, \quad R = \frac{2}{3}P \quad (\S)$$

(b)



$$1 \times \theta_p = \frac{P}{EI} \int_0^L \left( x \left( \frac{x}{L} \right) \right) dx + \frac{P}{EI} \int_0^L \left( \frac{L}{3} \left( \frac{x}{L} \right) + \frac{x}{L} \right) dx$$

$$+ \frac{P}{EI} \int_0^L \left( x \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \right) dx = \frac{PL^3}{9EI} \quad (\S)$$

$$1 \times \theta_R = \frac{M_R}{EI} \int_0^L \left( -\frac{x}{L} \left( \frac{x}{L} \right) \right) dx = -\frac{M_R L}{3EI} \quad (\P)$$

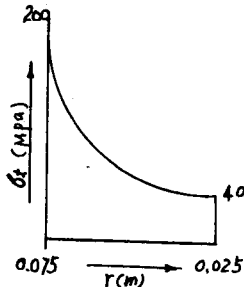
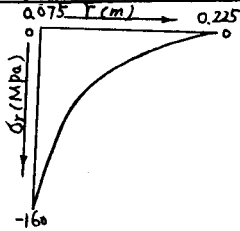
$$\theta_0 = \theta_p + \theta_R = 0, \quad M_0 = \frac{PL}{3} \quad (\P)$$

16-5  $r_i = 0.075 \text{ m}, r_o = 0.225 \text{ m}, P_i = 160 \text{ MPa}$

(a)  $\sigma_r = \frac{P_i r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} \left(1 - \frac{r_o^2}{r^2}\right) = 20 \left(1 - \frac{0.05}{r^2}\right) \text{ MPa}$

$\sigma_t = \frac{P_i r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} \left(1 + \frac{r_o^2}{r^2}\right) = 20 \left(1 + \frac{0.05}{r^2}\right) \text{ MPa}$

| $r \text{ (m)}$          | 0.075 | 100  | 125  | 150  | 175  | 200  | 225  |
|--------------------------|-------|------|------|------|------|------|------|
| $\sigma_r \text{ (MPa)}$ | 160   | 81.3 | 44.8 | 25.0 | 13.1 | 5.31 | 0.0  |
| $\sigma_t \text{ (MPa)}$ | 200   | 121  | 84.8 | 65.0 | 53.1 | 45.3 | 40.0 |



(b)  $\tau_{max} = \frac{P_i r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} = \frac{(160 \times 0.225^2)}{0.225^2 - 0.075^2} = 180 \text{ MPa}$

(c)  $A_1 = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)(P_i r_i^2 - P_o r_o^2)}{E(r_o^2 - r_i^2)}$   
 $= \frac{(1.3 \times 0.4)(160 \times 0.075^2)}{200 \times 10^3 (0.225^2 - 0.075^2)} = 5.20 \times 10^{-5}$

$A_2 = \frac{1 + \nu}{E} \frac{P_i r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} = \frac{1.3 \times 10^6 (160 \times 0.075^2 \times 0.225)}{200 \times 10^3 (0.225^2 - 0.075^2)}$

$u = A_1 r + \frac{A_2}{r} = 6.58$   
 $u_i = 5.20 \times 10^{-5} (75) + \frac{6.58 \times 10^0}{75} = 9.17 \times 10^{-2} \text{ mm}$

$u_o = 5.20 \times 10^{-5} (225) + \frac{6.58 \times 10^0}{225} = 4.10 \times 10^{-2} \text{ mm}$

16-10 Inner cylinder:  $r_i = 70 \text{ mm}, r_o = 120 \text{ mm}$

(a)  $A_1 = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)(-P_o)(120^2)}{2 \times 10^5 (120^2 - 70^2)} = -394 \times 10^{-3} P_o$

$A_2 = \frac{(1 + \nu)(-P_o)(70^2)(120^2)}{2 \times 10^5 (120^2 - 70^2)} = -4.828 \times 10^{-2} P_o$

$u_i = \left[ -394 (10^{-3}) (120) + \frac{4.828 (10^{-2})}{120} \right] (-P_o)$   
 $= -82.11 \times 10^{-5} P_o \text{ (mm)}$

Outer cylinder:  $r_i = 120 \text{ mm}, r_o = 200 \text{ mm}$

$A_1 = \frac{(1 + \nu)(-P_o)(120^2)}{2 \times 10^5 (200^2 - 120^2)} = 1.463 \times 10^{-6} P_o$

$A_2 = \frac{1 + \nu}{2 \times 10^5} \frac{P_o (120^2)(200^2)}{200^2 - 120^2} = 1.463 \times 10^{-1} P_o$

$u_o = \left[ 1.463 \times 10^{-6} (120) + \frac{1.463}{120} \right] P_o$   
 $= 139.47 \times 10^{-5} P_o \text{ (mm)}$

$|u_i| + |u_o| = \frac{-3}{2}$

$\Rightarrow (82.11 + 139.47) \times 10^{-5} P_o = .15$

$P = 67.7 \text{ MPa}$

(b) Inner cylinder:  $r_i = 70 \text{ mm}, r_o = 120 \text{ mm}, P_o = 67.7 \text{ MPa}$

$\sigma_r = \frac{-67.7 (120^2)}{120^2 - 70^2} \left(1 - \frac{70^2}{r^2}\right) = -102.62 \left(1 - \frac{4900}{r^2}\right)$

$\sigma_t = \frac{-67.7 (120^2)}{120^2 - 70^2} \left(1 + \frac{70^2}{r^2}\right) = -102.62 \left(1 + \frac{4900}{r^2}\right)$

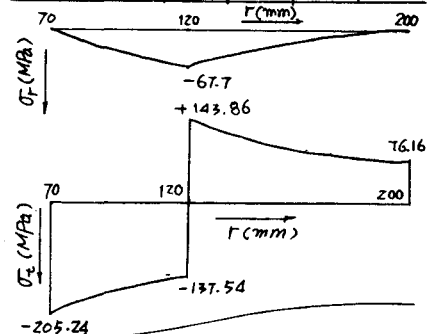
Outer cylinder:  $r_i = 120 \text{ mm}, r_o = 200 \text{ mm}, P_i = 67.7 \text{ MPa}$

$\sigma_r = \frac{67.7 (120^2)}{200^2 - 120^2} \left(1 - \frac{200^2}{r^2}\right) = 38.08 \left(1 - \frac{200^2}{r^2}\right)$

$\sigma_t = \frac{67.7 (120^2)}{200^2 - 120^2} \left(1 + \frac{200^2}{r^2}\right) = 38.08 \left(1 + \frac{200^2}{r^2}\right)$

| $r \text{ (mm)}$         | 70     | 80     | 90    | 100   | 110    | 120    |
|--------------------------|--------|--------|-------|-------|--------|--------|
| $\sigma_r \text{ (MPa)}$ | 205.24 | 181.19 | 164.7 | 152.9 | 144.18 | 137.54 |
| $\sigma_t \text{ (MPa)}$ | 0      | 24.05  | 40.54 | 52.74 | 61.06  | 67.7   |

| $r \text{ (mm)}$         | 120    | 140    | 160   | 180   | 200   |
|--------------------------|--------|--------|-------|-------|-------|
| $\sigma_r \text{ (MPa)}$ | 67.7   | 39.63  | 21.42 | 8.93  | 0     |
| $\sigma_t \text{ (MPa)}$ | 143.86 | 115.79 | 97.58 | 85.09 | 76.16 |



$$(c) \sigma_t = 140 + 205.24 = 345.24 \text{ MPa}$$

$$\sigma_r(r_i) = \frac{P_i (r_o^2 + r_i^2)}{r_o^2 - r_i^2}$$

$$345.24 = \frac{P_i (70^2 + 200^2)}{200^2 - 70^2} \Rightarrow P_i = 269.89 \text{ MPa}$$

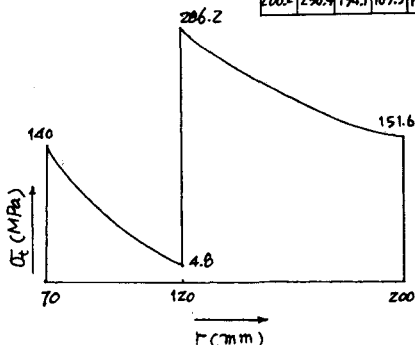
$$(d) P_i = 269.89 \text{ MPa}$$

$$\sigma_t = \frac{P_i r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} \left(1 + \frac{r_o^2}{r_i^2}\right) = 37.68 \left(1 + \frac{200^2}{r_i^2}\right)$$

| r (mm)           | 70    | 80    | 90    | 100   | 110   | 120   | 140   | 160  | 180  | 200  |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|------|
| $\sigma_t$ (MPa) | 345.2 | 273.2 | 223.7 | 188.4 | 162.2 | 142.3 | 114.5 | 96.5 | 84.2 | 75.4 |

Superposing,

| r (mm)           | 70  | 80 | 90 | 100  | 110 | 120   | 140   | 160   | 180   | 200   |
|------------------|-----|----|----|------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\sigma_t$ (MPa) | 140 | 92 | 59 | 35.5 | 18  | 4.8   |       |       |       |       |
|                  |     |    |    |      |     | 266.2 | 230.4 | 194.1 | 169.3 | 151.6 |



16-12

$$r_i = a, \quad r_o = 2a$$

$$(a) \sigma_r = \sigma_{yp} \ln\left(\frac{r}{c}\right) - \frac{\sigma_{yp}}{2} \left(\frac{b^2 - c^2}{b^2}\right)$$

$$\text{for } c = 1.5a$$

$$P_i = \sigma_r(a) = 250 \left[ \ln\left(\frac{a}{1.5a}\right) - \frac{1(20^2 - 1.5^2)}{2(20^2)} \right]$$

$$= 250[-0.41 - 0.22]$$

$$= -156.05 \text{ MPa}$$

$$(b) \text{ plastic zone: } 0 < r < 1.5a$$

$$\sigma_r = 250 \left[ \ln\left(\frac{r}{1.5a}\right) - 0.22 \right]$$

$$\sigma_t = 250 + \sigma_r$$

$$\text{elastic zone: } 1.5a < a < 2a$$

$$\sigma_r = \frac{54.69}{\left(\frac{2}{1.5}\right)^2 - 1} \left(1 - \frac{4a^2}{r^2}\right) = 70.31 \left(1 - \frac{4a^2}{r^2}\right)$$

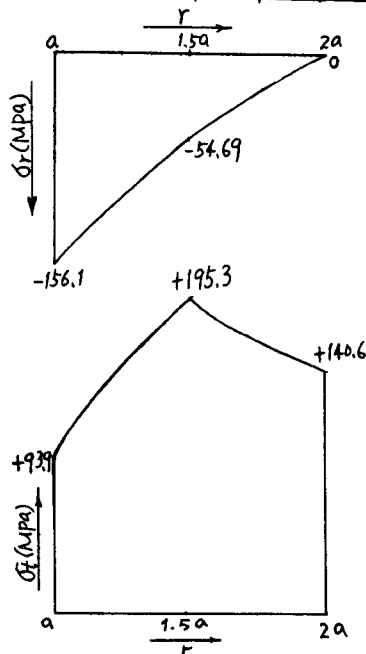
$$\sigma_t = \frac{54.69}{\left(\frac{2}{1.5}\right)^2 - 1} \left(1 + \frac{4a^2}{r^2}\right) = 70.31 \left(1 + \frac{4a^2}{r^2}\right)$$

plastic zone:

| r                | a     | 1.1a  | 1.2a  | 1.3a  | 1.4a  | 1.5a  |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\sigma_r$ (MPa) | 156.1 | 132.2 | 110.5 | 90.46 | 71.94 | 54.69 |
| $\sigma_t$ (MPa) | 93.9  | 117.8 | 139.3 | 159.5 | 178.1 | 195.3 |

elastic zone:

| r                | 1.5a  | 1.6a  | 1.7a  | 1.8a  | 1.9a  | 2.0a  |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\sigma_r$ (MPa) | 54.69 | 39.55 | 27.01 | 16.49 | 7.60  | 0.0   |
| $\sigma_t$ (MPa) | 195.3 | 180.2 | 167.6 | 157.1 | 148.2 | 140.6 |



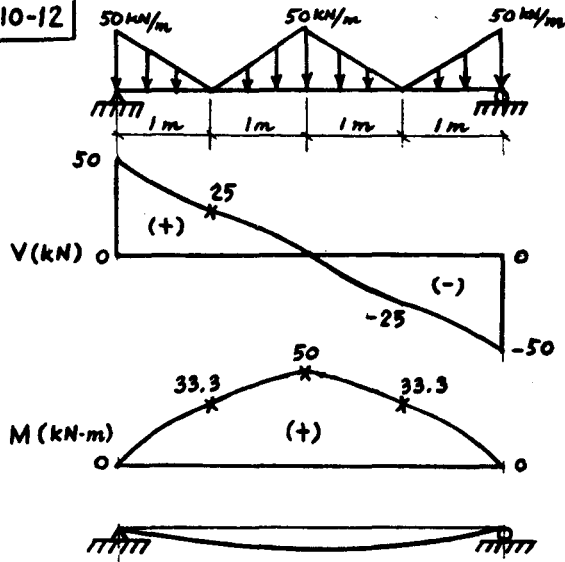
$$(c) P_{ult} = \sigma_r(a) = \sigma_{yp} \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$= 250 \ln\left(\frac{a}{2a}\right)$$

$$= 250(-0.693)$$

$$= -173.3 \text{ MPa}$$

10-12



$$S = \frac{M}{\sigma_{all}} = \frac{50}{8400} = 5.95 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$S = \frac{h^3}{12} = 5.95 \times 10^{-3}, \quad h = 0.415 \text{ m} \\ b = 0.207 \text{ m}$$

use a surfaced 0.24 m x 0.45 m beam

$$\tau_{max} = \frac{3V}{2A} = \frac{3 \times 50}{2 \times 0.108} = 695 \text{ kPa} \\ < \tau_{all} \quad \therefore \text{O.K.}$$

SATUAN DASAR SI

| Kuantitas | Satuan (Simbol) |
|-----------|-----------------|
| Panjang   | meter (m)       |
| Massa     | kilogram (kg)   |
| Gaya      | newton (N)*     |
| Waktu     | detik (dtk)     |

\* Satuan yang diturunkan ( $\text{kg}\cdot\text{m}/\text{dtk}^2$ )

SATUAN JAMAK DAN SUBJAMAK YANG DITURUNKAN

| Faktor Perkalian | Awalan | Simbol SI |
|------------------|--------|-----------|
| 1 000 000 000    | giga   | G         |
| 1 000 000        | mega   | M         |
| 1 000            | kilo   | k         |
| 0,001            | mili   | m         |
| 0,000 001        | mikro  | $\mu$     |
| 0,000 000 001    | nano   | n         |

BENTUK PENGGUNAAN SI DALAM BEBERAPA ATURAN

Sebuah titik harus digunakan untuk memisahkan satuan-satuan yang diperkalikan bersama-sama. Jadi, misalnya, Newton-meter ditulis  $\text{N}\cdot\text{m}$  dan tidak harus disalah artikan dengan  $\text{mN}$  yang merupakan singkatan milinewton.

Penggunaan awalan dalam penyebut satuan yang tergabung harus dihindarkan kecuali untuk kg karena kilogram merupakan satuan SI dasar.

Untuk bilangan-bilangan yang mempunyai lima angka atau lebih, angka-angka tersebut harus ditulis dalam kelompok-kelompok yang terdiri dari tiga angka yang dipisahkan jarak antara sebagai dari koma, dengan memperhitungkan ke sebelah kiri dan sebelah kanan dari titik desimal. Untuk bilangan empat angka, jarak tersebut tidak diperlukan kecuali bilangan empat angka itu digunakan dalam sebuah kolom bilangan-bilangan dengan lima angka atau lebih. Jadi, umpamanya ditulis 37 638,246 15 sebagai 37,638,24615 dan 5 943,1068 sebagai 5.943,1068. Jarak antara tersebut digunakan sebagai pengganti koma untuk menghindari kesalah-pahaman dengan negeri-negeri yang menggunakan koma sebagai tanda desimal.

† Untuk detail-detail selanjutnya lihat *ASTM Metric Practise Guide* Designation: E 380–74.